近代分析基础

胡适耕　编著

科　学　出　版　社

北　京

内 容 简 介

本书以基本、统一的观点，系统介绍了近代分析数学中最基本的概念、结果与方法，内容涵盖抽象空间理论、Banach 空间上的实分析与复分析、Banach 代数、Fourier 分析及广义函数论等．书中较深入地阐述了近代分析理论赖以形成的基本思路，并以典型实例解释了分析理论在多领域的应用.

本书可供数学专业高年级本科生与研究生阅读，亦可供相关专业的教师及科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

近代分析基础/胡适耕编著.—北京：科学出版社，2009

ISBN 978-7-03-023744-6

Ⅰ.近… Ⅱ.胡… Ⅲ.数学分析-高等学校-教材 Ⅳ. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 203378 号

责任编辑：张 扬 房 阳／责任校对：张 琪

责任印制：钱玉芬／封面设计：王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 3 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2009 年 3 月第一次印刷 印张：23

印数：1—3 000 字数：447 000

定价：59.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

前　言

大体上说,近代数学是伴随着微积分学的诞生而兴起的. 以微积分学为基础而衍生的分析数学,在其凯歌式的前进中,长时间占据着数学的中心位置. 那些在近代数学史上光芒四射的人物——Leibniz、Euler、D' Alembert、Lagrange、Riemann、Weierstrass、Poincáre 等,虽然大多堪称所在时代的全才,但毕竟主要以其分析学上的贡献而名垂后世.

19 世纪与 20 世纪之交,是数学史(也是整个科学史)的大爆发时期,重大事件风起云涌,里程碑式的发现纷至沓来——以公理化为标志的近世几何与近世代数初步形成;Lebesgue 的积分论在人们的惊疑惶惑中诞生;各种抽象空间理论如雨后春笋般崛起. 以这些重大突破为标志,数学进入了它的现代史时期. 这是一个真正的黄金时代. 现代数学在整整一个世纪的迅猛发展中,大大扩张了自己的疆界,充分细化了自己的学科,同时也模糊了各分支之间的界线. 新的理论与分支几乎每天都在涌现,而一些老的分析学科则似乎逐渐淡出数学舞台的中心. 于是,一种声音隐约出现并逐渐响亮起来:分析学还是数学的中心吗? 新技术时代难道不应有全新的数学,现代数学难道不应告别 Euler 与 Lagrange,告别 Cauchy 与 Riemann,甚至也告别 Lebesgue、Fréchet 与 Riesz 等分析大师吗?

完全没有疑问,新的时代确需要新的数学, 而新的数学有赖于新的驱动力. 传统或纯粹的分析学,确实不足以引领现代数学的新潮流. 不同于经典数学,现代数学建立在远为宽广与坚实的基础上. 现代数学理论大厦的构建,比以往任何时候都更得益于以公理化为标志的观念与方法,而这些观念与方法的兴起和发展,在很大程度上来自近代几何与代数学中发生的那些影响深远的变革,这些变革整个地改变了数学的面貌. 数学更加统一了,更难以“几何、代数与分析”这种传统的三分法加以区分了. 近世代数与几何(包括拓扑)语言的运用,已完全支配了近代分析学,致使纯粹的分析学逐渐成为历史.

然而,所有上述变化并未而且也不足以改变一个基本事实:支配数学发展的根本动力,与其说是公理化的理论构架与形式语言,倒不如说是描述发展过程与变动的永恒需要. 如同现实世界一样,数学对象首先呈现出动态特征,与之相应的研究方法必然是变量数学的方法. 关于变动、逼近与转化的思想,既支配了 Newton 与 Leibniz,也支配了近代的 Poincáre 与 Hilbert. 而这种起支配作用的思想,正是属于分析学的,而且是分析学的真正灵魂. 既然数学永远需要过程与动态的观点,分析学的使命就永远不会完结,其生命之树自然会长青! 没有任何证据表明分析学正

在走向衰落. 恰恰相反,现代数学所有令人振奋的进展,几乎都可用作分析学不朽力量的明证. 近年内数学界最引人注目的事件之一——三维 Poincáre 猜想的证明,当然是一项拓扑学的成就. 但如果没有高度精细的分析方法的有效应用,结果又将如何呢?

于是,我们还是看到,今日分析学仍旧昂然屹立,它满载往昔的辉煌与当代的盛誉,在历史的波涛中面向未来. 对于一门不折不扣的现代学科——Modern Analysis, 人们宁可给它冠以"近代"之名,乃是一种应有的超然姿态. 对于"现代"一词,人们不能不心怀敬畏,唯恐被人讥为"今天还属时尚,明日即将过时".

然而,究竟何谓"近代分析"? 用一个定义去回答它,显然非智者所为. 但这并不妨碍我们谈到近代分析的某些公认的特点与标志. 首先,近代分析必然是抽象空间上的分析学——无论所用的空间是拓扑向量空间、无限维流形,或者仅仅是 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$. 在今天看来,$\mathbb{R}^n$ 已如此具体,似乎人们已能身居其中了,但它毕竟是一种抽象空间. 其次, 如 300 年前一样,分析学的对象仍然是函数及施于函数的分析运算,只是所涉及的函数与运算更加复杂,而且今天的关注点不是个别函数而是各种函数类(或函数空间)罢了. 再者,近代分析学仍然被一个看似平常实则威力无比的思想所支配:通过适当的归化程序,研究对象能够且应当转化为某种初等、常规或正则的替代物. 分析学已铸就了一双慧眼,得以从简单中透视复杂,从原始初等的论题中发现新思想,从平淡无奇的常规思考中领悟到足以破解深奥问题的诀窍. 分析学所依仗的,不过是"转化"二字而已,只是这种转化的技巧已经发展到出神入化、登峰造极的地步. 在实现从高深到浅显转化的同时,分析学每天都在向高处攀登,这样做的一个内在动力就是最大限度地突破现有理论的限制,使人们在进行各种分析运算时获得越来越大的自由. 在 Newton 时代,人们几乎只关注初等函数的积分;即使在 Cauchy 时代,实质上也只限于连续函数的积分. 多亏 Lebesgue 的不朽贡献,才使人们在积分时将连续性丢弃一旁, 而 Lebesgue 的后继者们所引入的那些积分,则初看起来几乎使积分的原始思想踪迹难觅了.

分析学在其发展中不断表现出向初等层面回归的强烈意向,似乎是一种"保守性". 但正因为如此,分析学才在其变动不居的永恒发展中保持理论形式的相对稳定,这不能不说是一件幸事. 将新发现的、缺乏了解的事物转化为已知的、老的事物,乃是人类认知的一种基本方法,任何科学探索概莫能外. 但分析学在这一点上做得格外突出,堪称典范. 例如,"空间"一词用于分析学,已经表现出要将复杂事物转化为似乎伸手可触的直观对象的强烈意向. 通过从复杂到简单的回归或者设计出恰当的类比,分析学的前沿理论与其初等原型之间的距离拉近了. 甚至可以说,自 Newton 时代以来,分析学所循的基本思路与理论框架, 如收敛性、连续性、微积分运算及其种种推广或变形, 从形式上看是很接近的. 但这并不妨碍类似的理论外壳之内所容纳的内容及应用的广度获得巨大的提升. 分析学的理论形式及

其基本用语的相对稳定性，既使进入这一领域的初学者深得其便，也使分析学的著作能在一定程度上袭用一些已经成熟并被广泛认可的理论框架，不必处处从头开始. 本书读者开卷所见就是一些熟悉的标题，如微分学、测度与积分、解析函数等. 这些名词即使放在 100 年以前，也不会被认为是新奇事物，但就其涵盖的内容而言，则实在已不能同日而语.

这就是在进入本书之前，关于近代分析这一题目预先要作的简单解说. 这些解说既不全面也未必准确，仅一家之言而已. 有兴趣的读者，倘能从中获得某些启发，以至增加对该领域的好奇与思考乐趣，作者将不胜欣慰.

对于本书的意图与特点，尚需少量交代.

一本分析学著作，既要阐明理论所循的基本思想，又要提供可操作的方法与技巧. 这两者其实是很难兼顾的. 作者向来主张将基本思想的阐发置于对技术性细节的处理之上. 所有重要概念与基本结果的背景与直观本质都尽量作了充分说明，关键之处甚至到喋喋不休的地步. 相反，一些推导细节却被省略了. 有些属于割爱，但大部分略去的细节确实不是一个急于前行的探索者愿意停下来驻足细看的.

不会有哪一本著作（包括 Dieudonné 的 *Treatise on Analysis* 在内）试图去“概括”近代分析学，此学科的身躯实在太大了，而且每天都在成长. 仅以提供“近代分析基础”为目标的本书，当然只在相对较小的范围内选择最基本的材料. 但确定哪些材料应属“基本”并不容易，任何有关取舍失当的批评都是值得作者考虑的.

叙述与论证的简明性是本书所追求的基本目标之一. 除了篇幅的考虑之外，作者觉得，唯有简洁的方法才是真正有前途的. “简单即美”，似乎应成为数学的格言. 单纯削减文字，显然不足以达到简洁的目的，体系与方法上的改进，才是真正发掘潜力之道. 对于材料的安排及所有重要结论的处理，都作了反复考虑，至于能否达到预期的效果，就只能由读者来评判了.

本书常将一些互有联系的概念统合在一个定义中（如定义 1.4.1）. 长的定义并不受初学者欢迎，但出于参考目的的读者可能更喜欢适度集中处理的表述. 本书中某些定理在叙述了主要结论之后，用“因此，……”或“特别地，……”这样的句式顺便补述一个次要结论（如定理 1.5.1），而不是将次要结论作为推论单独列出，而且定理证明也不涉及次要结论. 以上两者都可能收简便之功效，但本意却不在于节省篇幅，而在于强调相关内容的联系，也更便于引用.

本书初稿特请张敦穆教授审阅，他独具慧眼的批评建议对于本书的最后成形作用甚大. 在此，谨致以深深的感谢.

作　者

2008 年 9 月

目　　录

符 号 说 明

符号	说明
A^c	集 A 的补
A°	集 A 的内部
$\bar{A}$	集 A 的闭包
$A^\perp$	集 A 的正交补或零化子
A_Ω	集 $\{x \in A: \sigma(x) \subset \Omega\}$
AC	绝对连续函数类
α,β	常记重指标，$\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$
$B_r(a)$	以 a 为心、r 为半径的球
$\bar{B}_r(a)$	以 a 为心、r 为半径的闭球
$\mathrm{B}(x,y)$	β 函数
$\mathscr{B}$	常记 Borel 集族
$B(\Omega)$	Ω 上的有界函数空间
BV	有界变差函数类
$\mathbb{C}^n$	n 维复 Euclid 空间;$\mathbb{C} = \mathbb{C}^1$
$\mathbb{C}^{n\times n}$	$n \times n$ 阶复矩阵之全体
$C(X,Y)$	从 X 到 Y 的连续映射之全体;$C(X) = C(X,\mathbb{K})$
$C^r(X,Y)$	从 X 到 Y 的 C^r 映射之全体;$C^r(X) = C(X,\mathbb{K})$
$C_c(X,Y)$	从 X 到 Y 的有紧支集的 C^r 映射之全体;$C_c^r(X) = C_c^r(X,\mathbb{K})$
$C_0(X,Y)$	从 X 到 Y 且无穷远点为零的连续映射之全体
$C_0(X)$	$C_0(X,\mathbb{K})$
co A	集 A 的凸包
D	微分算子 $-\mathrm{i}\partial$
∂	微分算子$(\partial_1,\partial_2,\cdots,\partial_n)$,$\partial_j = \partial/\partial x_j$
$D(F)$	F 的定义域
$D_m(x)$	Dirichlet 核
$d(A,B)$	集 A 与集 B 之间的距离;$d(x,A) = d(\{x\},A)$
diam A	集 A 的直径
∂A	集 A 的边界
Δ	Laplace 算子
$\Delta(A)$	代数 A 的结构空间

δ_{ij}	Kronecker 记号
E	常记 Banach 空间
$\mathscr{E}^r(\Omega,E)$	带 F 空间结构的 $C^r(\Omega,E)$;$\mathscr{E}^r(\Omega) = \mathscr{E}^r(\Omega,\mathbb{K})$
$\mathscr{E}(\Omega,E)$	即 $\mathscr{E}^\infty(\Omega,E)$;$\mathscr{E}(\Omega) = \mathscr{E}(\Omega,\mathbb{K})$
e_ξ	函数 $e^{i\xi\cdot x}$
$F'(x)$	Fréchet 导数
$F'(x,h)$	方向导数;$F'_\pm(x,h)$:单侧方向导数
$\hat{f}$	函数 f 的 Fourier 变换
$F_m(x)$	Fejér 核
G	群;B 代数中的可逆元之全体
$\mathrm{GL}(X)$	X 上的拓扑自同构之全体
$\varGamma$	Gelfand 表示
$\Gamma(x)$	Γ 函数
H	常记某个 Hilbert 空间
$H(\Omega,E)$	从 Ω 到 E 的全纯函数之全体;$H(\Omega) = H(\Omega,\mathbb{C})$
$H^m(\Omega)$	Sobolev 空间
I	单位算子;1_X:X 上的单位算子
i	包含映射 $i: A \subset X$.
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ 或$\mathbb{C}$(由上下文判定)
Ker F	同态 F 的核
LCH	局部紧 Hausdorff 空间
LCS	局部凸空间
$L^p(\Omega,E,\mu)$	(Ω,μ) 上 p 次可积 E 值函数空间;$L^p(\Omega,\mu) = L^p(\Omega,\mathbb{K},\mu)$
$L^\infty(\Omega,E,\mu)$	(Ω,μ) 上本性有界函数空间;$L^\infty(\Omega,\mu) = L^\infty(\Omega,\mathbb{K},\mu)$
$L(X,Y)$	从 X 到 Y 的连续线性算子之空间;$L(X) = L(X,X)$
$L(X_1,\cdots,X_n;Y)$	从 $X_1\times\cdots\times X_n$ 到 Y 的连续 n 重线性算子之空间
$L^n(X,Y)$	$L(X,\cdots,X;Y)$
$L^n_s(X,Y)$	连续对称 n 重线性算子之空间
$l^p(\Omega,E)$	空间 $L^p(\Omega,E,\mu)$,μ 为计数测度
$l^p(\Omega)$	空间 $l^p(\Omega,\mathbb{K})$;$l^p = l^p(\mathbb{N})$
$M(\Omega,E)$	Ω 上有界 E 值测度之全体;$M(\Omega) = M(\Omega,\mathbb{K})$
m	Lebesgue 测度
μ	通常记正测度
$\mathbb{N}$	自然数集
$\mathscr{N}_x$	点 x 的邻域系

$N(T)$	算子 T 的零空间
ξ_A	集 A 的特征函数
$P_r(x),P_t(x)$	Poisson 核
P	通常记投影
$\mathbb{Q}$	有理数集
$\mathbb{R}^n$	n 维实 Euclid 空间；$\mathbb{R}=\mathbb{R}^1$
$\mathbb{R}_+$	区间$[0,\infty)$；$\mathbb{R}_+^n=(\mathbb{R}_+)^n$
$R(F)$	F 的值域
$r_\sigma(x)$	x 的谱半径
$\mathbb{S}^n$	n 维单位球面
$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n,E)$	E 值速降函数空间；$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)=\mathscr{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$
$\operatorname{sgn} x$	符号函数
$\operatorname{span} A$	集 A 生成的向量子空间
$\operatorname{supp} f$	函数 f 的支集
$\sigma(x)$	x 的谱
$\sigma_p(T)$	T 的点谱
$\mathbb{T}^n$	n 重环面；$\mathbb{T}=\mathbb{T}^1=\mathbb{S}^1$
τ	拓扑；实或复变元
τ_a	平移算子
$\mathrm{V}_a^b(f)$	f 在$[a,b]$上的全变差，亦写作 $\mathrm{V}(f)$
X^*	X 的对偶空间
$\hat{x}$	x 的 Gelfand 表示
$W^{m,p}(\Omega)$	Sobolev 空间
$\mathbb{Z}$	整数集
$\mathbb{Z}_+$	非负整数集；$\mathbb{Z}_+^n=(\mathbb{Z}_+)^n$
Ω	测度空间，拓扑空间或某个开集
$\equiv$	恒等于
$\approx$	近似于
$\cong$	同构、同胚或拓扑同构（由上下文判定）
$\sim$	等价于
$\triangleq$	定义为
∞	总认作 $+\infty$
$\square$	定理或命题证完

几 点 说 明

1. 指标用法

出现于 $\sum$，$\prod$，$\cup$，$\cap$ 下的指标通常省略，其变程由上下文判定. 和式 $\sum a_n (n \in \mathbb{N})$ 依情况可写成

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum\nolimits_{1}^{\infty} a_n \text{ 或} \sum_n a_n;$$

$\prod a_n$，$\cup A_n$ 等类似. 给定 $x \in \mathbb{K}^n$ 与 $\mathbb{K}^n$ 值函数 f，总自动地认定 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，$f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)^{\mathrm{T}}$，上标 T 表示转置.

2. 集记号

集 $\{x \in X: x$ 满足 $P\}$ 常缩写作 $\{P\}$，如 $\{f > 0\} = \{x \in X: f(x) > 0\}$. 约定 $A + B = \{a + b: a \in A, b \in B\}$，$a + B = \{a + b: b \in B\}$，只要其中的 $a + b$ 有定义；AB，AB^{-1} 等类似. 对于 $\beta \subset 2^X$，约定 β^* 为 β 的任何有限子族之交的全体，$\beta^\#$ 为 β 中所有集之并.

3. 映射记号

$F: D \subset X \to Y$ 表示映射 $F: D \to Y$，但强调 D 看成 X 的子空间或子集. $\varphi(\cdot, y)$ 表示映射 $x \to \varphi(x, y)$，其中 y 固定.

4. 不等式记号

$A \leqslant B \Leftrightarrow \forall a \in A, b \in B$，有 $a \leqslant b$，$a \leqslant B \Leftrightarrow \forall b \in B$，有 $a \leqslant b$，只要其中 $a \leqslant b$ 有定义；$A < B$，$A \leqslant b$ 等类似. $f(A) \leqslant f(B) \Leftrightarrow \forall a \in A, b \in B$，有 $f(a) \leqslant f(b)$；$f \leqslant g \Leftrightarrow \forall x \in D(f) = D(g)$，有 $f(x) \leqslant g(x)$；$f < g$ 类似.

5. 范数

$|\cdot|$ 表示 $\mathbb{K}^n$ 中的 Euclid 范数；$\|\cdot\|_0$ 表示 sup 范数；$\|\cdot\|_p$ 表示 L^p 范数. 不必区别时，赋范空间 $X, Y, L(X, Y)$ 及 X^* 中的范数均记作 $\|\cdot\|$. 约定 $\|f\|_S = \sup_{x\in S} \|f(x)\|$，只要 $\|f(x)\| (x \in S)$ 有定义.

6. 极限

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 与 $\lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn}$ 分别缩写为 $\lim\limits_n x_n$ 与 $\lim\limits_{m,n} x_{mn}$. $\rightrightarrows$ 表示一致收敛，$\xrightarrow{L^p}$ 表示 L^p 收敛，$\xrightarrow{\mu}$ 表示依测度 μ 收敛，$\to$ a. e. 表示几乎处处收敛，$\rightharpoonup$ 表示弱收敛，$\overset{*}{\rightharpoonup}$ 表示弱 * 收敛.

7. 零记号

0 依情况表示数零、零向量、零泛函或零算子，具体含义由上下文判定.

8. 空间记号

空间 $L^p(\Omega,E,\mu)$ 依情况缩写为 $L^p(\Omega,E)$，$L^p(\mu)$ 或 L^p；$\mathscr{E}'$ 通常表示空间 $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ 或 $\mathscr{E}'(\Omega)$；$\mathscr{D}'$，$\mathscr{D}_r'$，$\mathscr{S}$，$\mathscr{S}'$ 等类似.

9. const 的用法

当 const 出现在式子中时，它表示某个常数，其具体数值难以或不必明确写出.

10. 其他约定

$a \vee b = \max\{a,b\}$，$a \wedge b = \min\{a,b\}$；$a^+ = a \vee 0$，$a^- = (-a)^+$；$\sup \varnothing = -\infty$，$\inf \varnothing = \infty$.

第1章 抽象空间

抽象空间被称为近代分析的数学分支,大体上形成于20世纪前半叶,其突出特点是:概念、理论与方法在各种抽象空间中展开,并大量运用近世代数、几何与拓扑学的语言与处理模式.在一定程度上可以说,抽象空间理论之于近代分析,有如实数理论之于经典分析.这就使得任何一本关于近代分析的著作,不得不花相当大的篇幅,先去介绍抽象空间.本书自然不能例外,但在篇幅安排上则吝惜得多,仅用一章而已.这就只能选择最必需的材料,而且运用高度紧凑的表述方式,略去某些推导细节.这样做的结果,当然不会使本章特别具有可读性,它看起来更像是定义与结果的堆砌,以至使你很快耗尽停留于此的耐心.这倒不是什么特别严重的事情.在初次阅读时,你完全可以选择匆匆而过,尽快转入后面的章节(已初步学过泛函分析的读者尤其如此),只是到必要查询时,再回顾一下本章的相关部分.

抽象空间无疑是一个大题目,短短的一章甚至不足以观其一斑.但一个快速的浏览可能有一个好处:对于拓扑空间、度量空间、Banach 空间、F 空间及局部凸空间等众多对象,更易从互相对照中获得某种综合印象,而这对于理解近代分析的逻辑基础是非常有益的.

1.1 拓扑空间

在抽象空间这一逻辑链条上,最初的3个环节就是集、拓扑空间与度量空间,它们构成本节的对象.

本书所用到的集论知识都是常规的,几乎不超出常识的范围,无需备述其详.下面只是列举若干术语与记号备查.

给定集 X,以 2^X 记 X 子集的全体.表示一集 $A(\subset X)$ 的标准方式是

$$A = \{x \in X : x \text{满足} P\},$$

其中,P 是某个命题或条件.只要不致误解,就用简略写法 $A = X(P)$ 或 $A = \{P\}$.例如,设 A 是实多项式 f 的实零点之集,则记

$$A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\} \text{ 或 } A = \{f = 0\}.$$

集运算的记号是标准的.差集"A 减 B"写作 $A\backslash B$,而将记号 $A - B$ 保留给向量空间使用.任给 $A \subset X$,以 A^c 记补集 $X\backslash A$,以 ξ_A 记 A 在 X 中的特征函数.约定字母$\mathbb{N}$,$\mathbb{Z}$,$\mathbb{Q}$,$\mathbb{R}$,$\mathbb{C}$ 分别记自然数集、整数集、有理数集、实数集与复数集,而令$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或$\mathbb{C}$.

任给一组集 $X_i(1 \leqslant i \leqslant n)$,其积集定义为

$$\prod_{i=1}^{n} X_i = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n): x_i \in X_i (1 \leqslant i \leqslant n)\}.$$

当 $X_i = X(1 \leqslant i \leqslant n)$ 时记 $\prod X_i$ 为 X^n，且称其为 X 的 n 重积.

任给非空集 X 与 Y，设 $F \subset X \times Y$. 称 F 为一个(二元)关系，当 $(x,y) \in F$ 时，说 x 与 y"F 相关"，记作 xFy. 令

$$D(F) = \{x: (x,y) \in F(\exists y \in Y)\},$$
$$R(F) = \{y: (x,y) \in F(\exists x \in X)\},$$

二者分别称为 F 的定义域与值域. 若 $D = D(F) \neq \varnothing$，任给 $x \in D$，恰有一个 $y \in Y$ 使 $(x,y) \in F$，则称 y 为 F 在 x 的值，记作 Fx 或 $F(x)$，并称 F 为从 D 到 Y 的映射，记作 $F: D \to Y$，当必要强调 D 是 X 的子集时写作

$$F: D \subset X \to Y.$$

习惯上，常将取值于 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 中的映射称为函数，但我们宁可视映射、函数、算子等为同义语而不严加区别. 以 I 或 1_X 记单位映射 $X \to X, x \to x$. 若 $\varnothing \neq A \subset X$，则以 $i: A \subset X$ 记包含映射 $A \to X, x \to x$. 给定映射 $F: X \to Y$ 与 $A \subset X, B \subset Y$，约定

$$FA = \{Fx: x \in A\}, \quad F^{-1}B = \{x: Fx \in B\},$$

二者分别称为 A 关于 F 的像与 B 关于 F 的原像. 任给 $B, B_i \subset Y(i \in I)$，成立

$$\begin{cases} F^{-1}\left(\bigcup\limits_i B_i\right) = \bigcup\limits_i F^{-1}B_i, \quad F^{-1}\left(\bigcap\limits_i B_i\right) = \bigcap\limits_i F^{-1}B_i, \\ F^{-1}B^{c} = (F^{-1}B)^{c}. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

鉴于连续映射与可测映射等均要用原像刻画，式(1.1.1)有重要意义. 若当 $Fx = Fz$ 时必 $x = z$，则称 F 为单射；若 $FX = Y$，则称 F 为满射；若 F 同时是单射与满射，则称 F 为双射，此时 F 有一逆映射或反函数 F^{-1}，它定义为

$$F^{-1}: Y \to X, \quad Fx \to x.$$

设 F 与 G 是两个映射. 若 $F \subset G$，则称 G 为 F 的扩张，而称 F 为 G 在 $D(F)$ 上的限制，写作 $F = G | D(F)$. 若 $R(F) \subset D(G)$，则 G 与 F 的复合映射定义为

$$G \circ F: x \to G(Fx).$$

若 $F \circ F$ 有意义，则记作 F^2；F^n 的意义依此类推.

设 A 是一集. 若存在一单射 $A \to \mathbb{N}$，则称 A 为可数集. 约定空集也为可数集. 习惯上，说可数集"含可数多个元". 若 I 为可数集，则说集族 $\{A_i: i \in I\}$ 含可数多个集. 集族 $\{A_n: n \in \mathbb{N}\}$ 称为集列，通常简写作 $\{A_n\}$. 若 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$(或 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$)，则称 $\{A_n\}$ 为升列(或降列). 在本书中，说到可数集族 $\{A_i\}$ 时，不妨总认定它是无限可数集族，这在涉及并与交运算时并不失一般性，因总可运用

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots$$

一类的等式. 集列 $\{A_n\}$ 的上极限与下极限分别定义为

$$\overline{\lim_n} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \underline{\lim_n} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

序关系在分析中被广泛使用,其定义是很简单的.

定义 1.1.1 设非空集 X 上给定了一个关系 $\leqslant$. 若 $\leqslant$ 满足条件

(i) 自反性: $x \leqslant x (x \in X)$;

(ii) 传递性: $x \leqslant y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z (x,y,z \in X)$,

则称 $\leqslant$ 为**拟序**.

若进而设 $\leqslant$ 满足条件

(iii) 反对称性: $x \leqslant y \leqslant x \Rightarrow x = y (x,y \in X)$,

则称 $\leqslant$ 为**半序**.

若半序 $\leqslant$ 满足条件

(iv) 完全性: $x \leqslant y$ 与 $y \leqslant x$ 必居其一$(x,y \in X)$,

则称 $\leqslant$ 为**全序**.

当 $\leqslant$ 为拟序、半序与全序时分别称 $(X, \leqslant)$ 为拟序集、半序集与全序集. 当 $x \leqslant y$ 时总约定 $y \geqslant x$. 若 $\leqslant$ 是拟序, $\forall x,y \in X, \exists z \in X$,使得 $x \leqslant z, y \leqslant z$,则称 $(X, \leqslant)$ 为**有向集**.

设 $(X, \leqslant)$ 为半序集, $A \subset X, b \in X$. 若 $A \leqslant b$(这意味着 $\forall a \in A$,有 $a \leqslant b$),则称 b 为 A 的上界;若 $A \leqslant b \in A$,则称 b 为 A 的最大元;若 $b \in A$,当 $b \leqslant a \in A$ 时必 $a = b$,则称 b 为 A 的**极大元**. 类似地可定义下界、最小元与极小元.

以下命题称为**极大原理**,它被作为公理接受.

命题 1.1.1 设 X 是一半序集,其中,每个全序子集有上界,则 X 必有极大元.

最常用的两个半序集如下:其一是 $\mathbb{R}^n$,在其中规定

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x_i \leqslant y_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

这样的 $\leqslant$ 称为标准向量序,简称为**向量序**. 本书在 $\mathbb{R}^n$ 中用到序时总是指向量序. $\leqslant$ 不是全序,除非 $n = 1$. 其次,任给集 X,包含 $\subset$ 与 $\supset$ 都是集 2^X 中的半序.

现在转向本节的主题:拓扑. 它用来描述最一般意义下的极限与连续性,而这正是近代分析所必需的.

定义 1.1.2 设 X 是一非空集, $\tau \subset 2^X$. 若 τ 满足如下**开集公理**①:

(O_1) τ 中任一族集的并属于 τ;

(O_2) τ 中任何有限个集的交属于 τ;

(O_3) $X, \varnothing \in \tau$,

则称 τ 为 X 上的一个拓扑,称 (X,τ) 或 X 为一个**拓扑空间**,称每个 $A \in \tau$ 为开集,而称 A^c 为闭集. 可数个开集之交称为 $\boldsymbol{G_\delta}$ **集**,可数个闭集之并称为 $\boldsymbol{F_\sigma}$ **集**.

给定拓扑空间 (X,τ), $A \subset X, x \in X$. 无论 x 的具体形态如何,总称 x 为 X 中的

---

① Hausdorff 最早(1914)提出拓扑空间的公理化定义. 不过,Hausdorff 的定义与此处基于开集公理的定义略有不同.

点,而称 A 为点集,这有助于将拓扑概念与常识中的空间事实类比. 下面界定一系列与 A 有关的概念,且顺便指出一些相关的简单结论(其证明是平凡的,均被省去),术语的选择自然联系着这些概念的直观背景.

(i) 若存在 $V \in \tau$ 使 $x \in V \subset A$,则称 x 为 A 的内点,称 A 为 x 的邻域. A 的全体内点组成 A 的内部,记作 A°. x 的全部邻域组成 x 的邻域系,记作 $\mathscr{N}_x$. 当 $B \subset A^{\circ}$ 时也称 A 为集 B 的邻域. A° 恒为开集, A 是开集 $\Leftrightarrow A = A^{\circ}$.

(ii) 若 $\forall V \in \mathscr{N}_x$,有 $A \cap V \neq \varnothing$,则称 x 为 A 的触点. A 的全体触点组成 A 的闭包,记作 $\bar{A}$. 闭包与内部呈某种对偶性

$$\bar{A} = A^{c\circ c}, \quad A^{\circ} = (\overline{A^{c}})^{c} = A^{c-c}. \tag{1.1.2}$$

据此推出: $\bar{A}$ 是闭集, A 是闭集 $\Leftrightarrow A = \bar{A}$. 若 $\bar{A} = X$,则称 A 为稠集或说 A 在 X 中稠密. 若 X 中存在可数稠集,则称 X 为**可分空间**.

(iii) 称 $\partial A \triangleq \bar{A} \backslash A^{\circ}$ 为 A 的边界, ∂A 中的点称为 A 的边界点. ∂A 恒为闭集, A 是闭集 $\Leftrightarrow \partial A \subset A$, $\partial A = \varnothing \Leftrightarrow A$ 是既开又闭之集.

(iv) 若 $x \in \overline{A\backslash\{x\}}$,则称 x 为 A 的聚点或极限点. A 的全体聚点组成 A 的导集,记作 A'. 若 $x \in A\backslash A'$,则称 x 为 A 的孤立点. A' 恒为闭集且 $\bar{A} = A \cup A'$, A 是闭集 $\Leftrightarrow A' \subset A$.

(v) 设 $A \neq \varnothing$,令 $\tau_A = \{A \cap V: V \in \tau\}$,则 τ_A 是 A 上的一个拓扑,称为 τ 在 A 中导出的**相对拓扑**. 只要未另作说明,在拓扑空间 X 的非空子集 A 上总使用相对拓扑,且称 A 为 X 的拓扑子空间. 与相对拓扑有关的所有概念均冠以相对二字,如相对开集、相对闭集、相对闭包等.

设 $\beta \subset 2^X$,约定以 $\beta^{\#}$ 记 β 中所有集之并,以 β^{*} 记 β 的有限子族之交的全体. 显然 $\beta \subset \beta^{*}$, $\beta = \beta^{*} \Leftrightarrow \beta$ 对有限交运算封闭, $A \subset \beta^{\#} \Leftrightarrow \beta$ 覆盖 A.

定义 1.1.3 设 (X,τ) 是一拓扑空间,$\beta \subset \tau$. 若每个 $A \in \tau$ 可表为 β 中某些集之并,则称 β 为 X(或 τ) 的**拓扑基**;若 β^{*} 是 X 的拓扑基,则称 β 为 X 的**拓扑次基**或拓扑子基. 若 X 有可数的拓扑基,则称 X 为**第二可数空间**.

几乎平行地,若 $x \in X, \beta \subset \mathscr{N}_x$, $\forall A \in \mathscr{N}_x$, $\exists B \in \beta$,使 $B \subset A$,则称 β 为 x 的**邻域基**;若 β^{*} 是 x 的邻域基,则称 β 为 x 的**邻域次基**. 若 X 中每点有可数的邻域基,则称 X 为**第一可数空间**. 拓扑基(或邻域基)中的集也称为基开集(或基邻域).

凡用拓扑描述的概念与结论,通常可改用拓扑基(甚至拓扑次基)来描述,而后者只需用到较少的集,且往往是特别选定的结构简单的集,这就可能简化问题. 基概念的作用即系于此. 邻域基与邻域次基亦有类似好处. 顺便指出,从一类对象的总体中挑选出一部分代表,使之能起到与总体等价的作用,乃是分析数学中的一种普遍方法. 各种形式的基概念正是为实行此方法而设.

命题 1.1.2 设 X 是一非空集, $\beta \subset 2^X$. 若 β 满足条件

(i) $\beta^{\#} = X$;

(ii) $\forall A,B\in\beta,\forall x\in A\cap B,\exists C\in\beta$,使 $x\in C\subset A\cap B$,
则 X 上存在唯一拓扑 τ 以 β 为其拓扑基. 若 β 仅满足条件(i),则 X 中存在唯一拓扑 τ 以 β 为其拓扑次基(这样的 τ 称为由 β 生成的拓扑).

证 令 $\tau=\{A: A$ 是 β 中某些集之并$\}$,则用条件(i)与(ii)可验证 τ 就是以 β 为拓扑基的唯一拓扑. 若 β 仅满足条件(i),则 β^* 必满足条件(i)与(ii),因而 β 生成所要求的拓扑. □

构成拓扑时通常要直接或间接地用到命题 1.1.2,度量拓扑的构成就是一个典型例子. 下面就来定义度量空间.

定义 1.1.4 设 X 是一非空集,函数 $d: X\times X\to\mathbb{R}_+$ 满足如下**距离公理**:

(D_1) 对称性: $d(x,y)=d(y,x)$;

(D_2) 三角不等式: $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$;

(D_3) 正定性: $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$,

其中,$x,y,z\in X$, 则称 d 为 X 上的一个度量,称 (X,d) 或 X 为一个**度量空间**.

给定度量空间 (X,d) 与非空集 $A,B\subset X$. 令

$$d(A,B)=\inf_{a\in A;b\in B}d(a,b),\quad \operatorname{diam}A=\sup_{a,b\in A}d(a,b),\tag{1.1.3}$$

称 $d(A,B)$ 为集 A 与 B 之间的距离,约定 $d(x,A)=d(\{x\},A)$;称 $\operatorname{diam}A$ 为集 A 的直径,当 $\operatorname{diam}A<\infty$ 时称 A 为有界集. 任给 $a\in X$ 与 $r>0$,令

$$\begin{cases}B_r(a)=\{x\in X: d(a,x)<r\},\\ \bar{B}_r(a)=\{x\in X: d(a,x)\leqslant r\}.\end{cases}\tag{1.1.4}$$

二者分别称为以 a 为心以 r 为半径的球(或开球)与闭球. 球是度量空间中唯一具某种规则性的"图形",其作用至大. 若令

$$\beta=\{B_r(a): a\in X,r>0\},\tag{1.1.5}$$

则易验证 β 满足命题 1.1.2(i)与(ii),因而以 β 为拓扑基在 X 中生成一个拓扑 τ,称它为由度量 d 导出的**度量拓扑**. 只要未另作规定,在度量空间中总使用度量拓扑. 任给 $x\in X$,$\{B_{1/n}(x): n\in\mathbb{N}\}$ 是 x 的一个可数邻域基. 因此,度量空间总是第一可数空间. 更深刻一点的结论是

定理 1.1.1 第二可数的拓扑空间是可分空间,可分的度量空间是第二可数空间. 因此,对于度量空间而言,第二可数性与可分性一致.

证 若拓扑空间 X 有可数拓扑基 $\{B_n\}$,任取 $b_n\in B_n(n\in\mathbb{N})$,则易见 $\{b_n\}$ 是 X 中的可数稠集,因而 X 可分. 若度量空间 X 有可数稠集 $\{b_n\}$,则可验证 $\{B_{1/k}(b_n): n,k\in\mathbb{N}\}$ 是 X 的可数拓扑基,因而 X 是第二可数空间. □

任给拓扑空间 (X,τ),若存在 X 上的度量 d 使 τ 为其度量拓扑,则说 X 是**可度量化**的,或称 τ 为可度量化拓扑. 必须强调指出,对于可度量化空间来说,本质的东西是其中的拓扑,而不是导出该拓扑的度量. 同一个拓扑可以由多个(甚至无限多个)不同的度量导出. 例如,若 d 是 X 上的一个度量,则

$$d_1(x,y) = d(x,y) \wedge 1, \quad x,y \in X$$

亦是 X 上的一个度量,且与 d 导出同一个度量拓扑. 度量空间较具直观性,分析学家无疑更乐于使用可度量化空间. 但如本书后面将看到的,完全排除不可度量化的拓扑空间,在分析学中是行不通的.

最常用的度量空间之一是 Euclid 空间 $\mathbb{K}^n$(记住,已约定$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或$\mathbb{C}$),在其中使用如下的 Euclid 度量:

$$d(x,y) = \left(\sum_i |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}, \quad x,y \in \mathbb{K}^n. \tag{1.1.6}$$

注意本书中只要写出 $x \in \mathbb{K}^n$,就认定 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$,而不特别注明. 由 Euclid 度量导出的拓扑称为**通常拓扑**,在 $\mathbb{K}^n$ 中总使用通常拓扑.

在本书中,度量空间主要以 Banach 空间或 F 空间的子集的形式出现. 可以证明,任何度量空间(改赋适当等价度量后)都可嵌入某个 Banach 空间. 因此,并无专门深论度量空间的必要.

再回到一般的拓扑空间 (X,τ). 对 X 中点集性质所作的描述多少带有几何色彩,而我们的主要兴趣却在分析学. 在拓扑空间这种高度抽象的结构中,能否建立某种分析学?这首先取决于其中能否有效地界定极限与连续性,这正是我们下面就要考虑的问题.

定义 1.1.5　设 X 是一拓扑空间,$(T, \leqslant)$ 是一有向集,$\{x_t : t \in T\} \subset X$,后者也简写作$\{x_t\}$,称它为 X 中的一个**网**. 若有 $x \in X$,使得

$$\forall V \in \mathcal{N}_x, \exists t_0 \in T, \forall t \geqslant t_0, \text{有 } x_t \in V, \tag{1.1.7}$$

则称 $\{x_t\}$ 为**收敛网**,且说它收敛于极限 x,记作 $x_t \to x$.

显然序列是网的特例,因而网可看成序列的推广(有人称之为广义序列或有向列),条件(1.1.7)正是参照序列收敛的条件仿制出来的. 如定义 1.1.5 的极限概念首先由 Moore-Smith 于 1922 年提出,因而称为 **Moore-Smith 极限**,它涵盖了数学中迄今所用到的各种极限,当然也包含了通常的序列极限与函数极限,具有极大的普遍性. 唯因其过于一般,关于它能建立的结论很少,除非引入附加条件. 例如,要使极限有唯一性,就要对空间 X 加以限制.

定理 1.1.2　拓扑空间 X 中任何收敛网有唯一极限的充要条件是:任给一对相异点 $x,y \in X$,存在 $U \in \mathcal{N}_x, V \in \mathcal{N}_y$,使得 $U \cap V = \varnothing$.

定理 1.1.2 的证明并不难,但还是略去. 具有定理所给性质的空间称为 **Hausdorff 空间**或 T_2 空间. 本书用不到非 Hausdorff 的拓扑空间.

对于条件(1.1.7)值得作点说明. 首先,其中的 $\mathcal{N}_x$ 可代以 x 的某个邻域基或邻域次基,这就可能大大简化条件的验证. 若 X 是度量空间,以$\{B_\varepsilon(x) : \varepsilon > 0\}$ 取代 $\mathcal{N}_x$,则条件(1.1.7) 成为

$$\forall \varepsilon > 0, \exists t_0 \in T, \forall t \geqslant t_0, \text{有 } d(x_t, x) < \varepsilon. \tag{1.1.8}$$

若进而以序列 $\{x_n\}$ 取代网 $\{x_t\}$，则条件(1.1.8) 又可写成

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \text{有 } d(x_n, x) < \varepsilon,$$

这正是通常 $d(x_n, x) \to 0$ 的条件.

原则上，所有拓扑概念均可用收敛网来刻画，这是分析学者乐于看到的一个事实. 例如，不难验明：$x \in \bar{A} \Leftrightarrow$ 存在网 $\{x_t\} \subset A$，使得 $x_t \to x$；A 是闭集 $\Leftrightarrow$ 若 $\{x_t\} \subset A, x_t \to x$，则必 $x \in A$. 简言之，闭集就是对极限运算封闭的集. 对于第一可数空间，上述结论中用到的网均可改为序列. 若 $\tau_i (i = 1, 2)$ 是 X 上的两个拓扑，$\tau_1 \subset \tau_2$，则说 τ_1 弱于 τ_2 或 τ_2 强于 τ_1. 以 $x_t \xrightarrow{(i)} x$ 记网 $\{x_t\}$ 依拓 τ_i 收敛于 x. 则 $\tau_1 \subset \tau_2 \Leftrightarrow$ 对 X 中任何网 $\{x_t\}$，从 $x_t \xrightarrow{(2)} x$ 推出 $x_t \xrightarrow{(1)} x$；$\tau_1 = \tau_2 \Leftrightarrow$ 对 X 中任何网 $\{x_t\}$，$x_t \xrightarrow{(1)} x$ 等价于 $x_t \xrightarrow{(2)} x$. 这就表明，X 上的拓扑完全由网的收敛性确定.

尽管网与序列有很大的类似性，但网毕竟缺乏直观性，难以为人们所接受，至今许多著作都回避它. 实际上，网所带来的麻烦比表面上看来要少得多，在理论分析中尤其如此. 因此，网的使用在本书中要稍多一点. 凡不适应它的读者，且把它当作序列看待好了. 若仅考虑第一可数空间(特别是度量空间)，当然仅用序列就够了.

定义 1.1.6 设 X 是度量空间. 若序列 $\{x_n\} \subset X$ 满足如下 **Cauchy 条件**：

$$\lim_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n) = 0, \tag{1.1.9}$$

则称 $\{x_n\}$ 为 **Cauchy 序列**. 若 X 中的 Cauchy 序列均收敛，则称 X 为**完备度量空间**.

若取 $X = \mathbb{R}$，则条件(1.1.9)成为

$$\lim_{m,n\to\infty} |x_m - x_n| = 0.$$

根据熟知的 Cauchy 收敛准则，这正是 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件. 因此不妨说，完备度量空间正是**使 Cauchy 收敛准则适用的度量空间**. 完备性的意义，已不言而喻. 以上解释同时说明了：$\mathbb{R}$(以及$\mathbb{K}^n$) 是完备度量空间.

关于完备性易验证以下简单结论：

命题 1.1.3 设 X 是度量空间，$\varnothing \neq A \subset X$. 若 A 依 X 中的度量完备，则 A 是闭集. 若 X 完备而 A 是闭集，则 A 作为度量空间必完备.

定义 1.1.7 设 X 与 Y 是拓扑空间，$F: X \to Y, x \in X$. 若 F 满足条件

$$\forall V \in \mathcal{N}_{Fx}, \exists U \in \mathcal{N}_x, \text{使得 } FU \subset V, \tag{1.1.10}$$

则说 F 在 x 连续. 若映射 F 在每点 $x \in X$ 连续，则称 $F: X \to Y$ 为连续映射. 以 $C(X, Y)$ 记从 X 到 Y 的连续映射的全体，令 $C(X) = C(X, \mathbb{K})$. 若 $F \in C(X, Y)$ 且 $F^{-1} \in C(Y, X)$，则称 F 为**同胚**，记作 $F: X \cong Y$. 当这样一个同胚 F 存在时，就说 X 与 Y 互相同胚. 若 $F: X \cong FX$，FX 是 Y 的子空间，则说 $F: X \to Y$ 是一个**拓扑嵌入**. 若 F 映 X 中的开集为 Y 中的开集，则称 F 为开映射. 若 F 映 X 中的闭集为 Y 中的闭集，则称 F 为闭映射.

条件(1.1.10)中的 $\mathscr{N}_{Fx}$ 可代以 Fx 的某个邻域次基. 注意及此,通常可明显简化条件(1.1.10) 的验证. 若 X 与 Y 均为度量空间,则条件(1.1.10) 可代以条件

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当} y \in X, d(x,y) < \delta \text{时}, d(Fx,Fy) < \varepsilon. \tag{1.1.11}$$

这已十分接近于经典分析中的连续性条件. 若将条件(1.1.11)加强为

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x,y \in X, d(x,y) < \delta \Rightarrow d(Fx,Fy) < \varepsilon, \tag{1.1.12}$$

则说 $F: X \to Y$ 一致连续. 换成极限的说法,条件(1.1.10) ~ (1.1.12) 分别等价于

$$x_t \to x \Rightarrow Fx_t \to Fx, \tag{1.1.10$'$}$$

$$x_n \to x \Rightarrow Fx_n \to Fx, \tag{1.1.11$'$}$$

$$d(x_n,y_n) \to 0 \Rightarrow d(Fx_n,Fy_n) \to 0, \tag{1.1.12$'$}$$

其中, $\{x_t\}$ 是 X 中的网, $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 是 X 中的序列.

经典分析中关于连续性的一些简单结论,如连续函数的复合函数是连续函数,实(或复)值连续函数的和与积是连续函数等,在一般拓扑空间中仍然有效,且其证明亦无重大差别,这些都不必细述. 此处要强调的,只是以下基本结果.

定理 1.1.3 设 X 与 Y 是两个拓扑空间, $F: X \to Y$, 则以下条件互相等价:

(i) $F \in C(X,Y)$;

(ii) 任给开集(或闭集) $B \subset Y$, $F^{-1}B$ 是开集(或闭集);

(iii) $\forall B \in \beta$, $F^{-1}B$ 是开集, β 是 Y 的某个拓扑次基;

(iv) $\forall A \subset X$, 有 $F\bar{A} \subset \overline{FA}$.

对于 $f: X \to \mathbb{R}$, 以下条件互相等价:

(i)$'$ $f \in C(X)$;

(ii)$'$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\{f < \alpha\}$ 与 $\{f > \alpha\}$ 为开集;

(iii)$'$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\{f \leqslant \alpha\}$ 与 $\{f \geqslant \alpha\}$ 为闭集.

证 只需证定理的前半部分. (i)⇒(iii)⇒(ii)是明显的.

(ii)⇒(iv)　$\overline{FA}$ 为闭集与条件(ii) 一起推出 $F^{-1}\overline{FA}$ 为闭集,于是

$$F\bar{A} \subset F\,\overline{F^{-1}FA} \subset FF^{-1}\,\overline{FA} \subset \overline{FA}.$$

(iv)⇒(i)　设 $x \in X, V \in \mathscr{N}_{Fx}$, 令 $U = F^{-1}V^{\circ}$, 则 $FU \subset V$. 下面说明条件(iv)推出 $U \in \mathscr{N}_x$. 反证之. 若 $U \notin \mathscr{N}_x$, 则 $x \in U^{\circ c} = \overline{U^c}$(由式(1.1.2)). 于是

$$Fx \in F\overline{U^c} \subset \overline{FU^c} = \overline{FF^{-1}V^{\circ c}} \subset \overline{V^{\circ c}} = V^{\circ c},$$

这与 $Fx \in V^{\circ}$ 相矛盾. 因此 F 在 x 连续. □

注意定理 1.1.3 中的诸条件给出连续映射的整体刻画,它并不直接涉及 F 在点的连续性. 可从两个方面应用定理 1.1.3. 其一是利用连续映射来构成开集与闭集,这是获得开集与闭集的最简捷的途径之一. 例如, 取 $X = \mathbb{R}^{n\times n}$(将其等同于 $\mathbb{R}^{n^2}$,其中, 使用通常拓扑), 令 $f(A) = \det A$ $(A = [a_{ij}] \in X)$. 因 $f(A)$ 是 a_{ij} 的多项式,连续性不成问题. 于是由定理 1.1.3 得出

$$G = \{f \neq 0\} = \{f > 0\} \cup \{f < 0\}$$

是 X 中的开集. 注意 G 正是 n 阶可逆实矩阵之全体. 不妨设想一下,如果不用定理 1.1.3 而直接判定 G 为开集,能否如此快捷!

另一方面,亦可用定理 1.1.3 来判定连续性. 试看一例.

引理1.1.1 设 X 与 Y 是拓扑空间,$X = \mathscr{A}^{\#}$,$\mathscr{A}$ 是开集族或闭集的有限族,映射族 $\{F_A \in C(A,Y): A \in \mathscr{A}\}$ 满足条件

$$F_A \mid A \cap B = F_B \mid A \cap B, \quad A,B \in \mathscr{A}, \tag{1.1.13}$$

则存在唯一映射 $F \in C(X,Y)$,使得 $F \mid A = F_A(A \in \mathscr{A})$.

证 只考虑 $\mathscr{A}$ 是开集族的情况(当 $\mathscr{A}$ 是有限闭集族时证明是类似的). 由条件(1.1.13)显然推出有唯一映射 $F: X \to Y$ 使得 $F \mid A = F_A(A \in \mathscr{A})$. 任给开集 $V \subset Y$,因 $F_A^{-1}V$ 是 X 中的开集,故 $F^{-1}V = \cup \{F_A^{-1}V: A \in \mathscr{A}\}$ 是 X 中的开集. 这正表明 $F \in C(X,Y)$. □

可以说,引理 1.1.1 中的 F 乃由连续映射 $F_A(A \in \mathscr{A})$ 拼接而成. 因此引理 1.1.1 称为**拼接引理**,应用颇广. 微积分学中判定所谓分段函数的连续性时,实际上相当于用了拼接引理,只是未加注意罢了.

1.2 赋范空间

在 1.1 节中看到,在拓扑空间上可展开某种极限与连续性理论,而且不乏具有实质意义的结果. 抽象空间理论的开拓者曾经一度认为,拓扑空间或许是建立某种抽象分析的适当框架. 但人们很快发现,沿这一方向行之不远. 分析学特别依赖的两种手段——代数运算与度量估计,拓扑空间都不能提供. 这就需要能同时弥补上述缺陷的抽象空间. 有多种选择能适合这一需要,最适当的选择或许应推本节所述的赋范空间,它既不失之过宽,也不失之过窄. 在一定意义上可以说,近代分析学的主要部分就是赋范空间上的分析学.

本节主要考虑赋范空间,同时也附带地涉及更一般的 F 空间与局部凸空间,这些空间都是带有一定拓扑结构的向量空间. 本书中用到向量空间时总假定其基域为$\mathbb{K}$,$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或$\mathbb{C}$. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 与$\mathbb{C}$ 分别对应实向量空间与复向量空间,每个复向量空间也可当作实向量空间使用. 关于向量空间的基、维数、向量子空间等概念假定是熟知的,它们属于线性代数的内容,可参考任一本线性代数著作. 对于向量空间中的子集 A,B,以下记号是通行的:

$$A \pm B = \{a \pm b: a \in A, b \in B\},$$

$$\lambda A = \{\lambda a: a \in A\}, \quad \mathbb{K}x = \{\lambda x: \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

定义 1.2.1 设 X 是$\mathbb{K}$ 上的向量空间. 若函数 $\|x\|: X \to \mathbb{R}_+$ 满足条件

(N_1) 齐次性: $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\alpha \in \mathbb{K}, x \in X$;

(N_2) 三角不等式: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x,y \in X$,

则称 $\|x\|$ 为 X 上的一个**半范**.

若半范 $\|x\|$ 进而满足条件

(N_3) 正定性：$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x \in X$,

则称 $\|x\|$ 为 X 上的范数,且称 $(X, \|\cdot\|)$ 或 X 为**赋范空间**.

今后说到**范数公理**(N_1) ~ (N_3)时总依定义 1.2.1.

设 X 是给定的赋范空间. 直观上,范数 $\|x\|$ 可看成向量 x 的长度. 令 $d(x,y) = \|x - y\|$ $(x,y \in X)$,则直接看出 d 满足距离公理(D_1) ~ (D_3)(由定义 1.1.4),因而 d 是 X 上的一个度量,称为由范数决定的度量,其度量拓扑称为**范数拓扑**. 依范数拓扑的收敛称为**范数收敛**, 序列 $\{x_n\} \subset X$ 范数收敛于 $x \Leftrightarrow \|x_n - x\| \to 0$. 只要未另作规定,在赋范空间上总使用由范数决定的度量与范数拓扑. 若 X 作为度量空间完备,则称 X 为 **Banach 空间**. X 是 Banach 空间意味着,X 中任何序列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是它满足 Cauchy 条件(对照式(1.1.9))

$$\lim_{m,n\to\infty} \|x_m - x_n\| = 0. \tag{1.2.1}$$

从公理(N_1) ~ (N_3)直接推出,X 中的加法 $x + y$ 与数乘 αx $(\alpha \in \mathbb{K}, x,y \in X)$ 都是连续的,而由此又推出以下意义重大的结论:固定 $a \in X, 0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$,平移 $x \to x + a$ 与相似变换 $x \to \alpha x$ 都是 X 到自身的同胚. 这就表明,就拓扑性质而言,赋范空间 X 是"各处一致"的,而且不同半径的球亦无区别. $x = 0$ 的邻域称为 **0 邻域**,0 邻域系完全决定了全空间的拓扑结构. 为描述 X 中的收敛性,只要描述 $x_n \to 0$ ($\{x_n\} \subset X$ 是任一序列)的条件就够了. 你会看到,本书对各种赋范空间(以及 LCS)所给的收敛条件,都是"收敛于零"的条件.

结合代数运算与极限运算的自然结果是导向考虑无穷级数. 设 $\{x_n\} \subset X$,则

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \Leftrightarrow s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \to x,\ n \to \infty.$$

当 $\sum \|x_n\|$ 收敛时说级数 $\sum x_n$ 绝对收敛. 顺便指出,将范数类比于绝对值,是理解赋范空间问题的一个好方法. 以下结果易被忽略但意义重大.

引理 1.2.1　赋范空间 X 完备的充要条件是其中的绝对收敛级数均收敛.

证　必要性是明显的,只证充分性. 设 X 中的绝对收敛级数均收敛, $\{x_n\} \subset X$ 是一 Cauchy 序列,今证 $\{x_n\}$ 收敛. 利用条件(1.2.1)可依次取出下标 n_k,使得 $1 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots$,且

$$\|x_n - x_{n_k}\| < 2^{-k}, \quad \forall n \geqslant n_k, k \in \mathbb{N}. \tag{1.2.2}$$

这推出级数 $\sum (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ 绝对收敛,因而收敛. 这又推出序列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛. 设 $x_{n_k} \to x$ $(k \to \infty)$,则

$$\overline{\lim_{n}} \|x_n - x\| = \overline{\lim_{n}} \lim_{k} \|x_n - x_{n_k}\| = 0,$$

其中用了不等式(1.2.2). 这表明 $x_n \to x$,如所要证. □

在分析中,很难避免使用"绝对收敛⇒收敛"这样的命题,但由引理 1.2.1, 这只能在完备空间中运用. 幸而我们有以下标准结果:

定理 1.2.1 设 X 是一个赋范空间,则必存在 Banach 空间 $\bar{X}$,它以 X 为其稠密子空间.

如上的 $\bar{X}$ 称为 X 的**完备化**,它本质上是唯一的. X 的两个完备化必互相拓扑同构,拓扑同构的意义就在下面界定.

定义 1.2.2 设 X 与 Y 是$\mathbb{K}$ 上的两个赋范空间. 若 $T: X \to Y$ 是一个线性同构且为同胚,则称 T 为**拓扑同构**. 当这样的拓扑同构存在时, 就说 X 与 Y 是互相拓扑同构的. X 到自身的拓扑同构称为**拓扑自同构**,其全体记作 $\mathrm{GL}(X)$. 若 $T: X \to Y$ 是线性同构且 $\|Tx\| \equiv \|x\|$,则称 T 为**等距同构**;当这样一个等距同构存在时, 就说 X 与 Y 互相等距同构. 若 X 等距同构于 Y 的某个子空间,则说 X 可**等距嵌入** Y.

仅就代数性质与拓扑性质(及完备性)而言,互相拓扑同构的赋范空间完全一致,因而不必区别. 互相等距同构的赋范空间的度量性质也是一样的.

常常需要比较同一向量空间 X 上的不同范数 $\|x\|_i (i = 1,2)$,这关联着映射

$$I: (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2), \quad x \to x \tag{1.2.3}$$

的连续性. 容易验证以下条件互相等价:

(i) X 中关于 $\|\cdot\|_1$ 的范数拓扑强于关于 $\|\cdot\|_2$ 的范数拓扑;

(ii) 映射(1.2.3) 连续;

(iii) $\|x\|_2 \leqslant \mathrm{const}\ \|x\|_1,\ x \in X$.

由此立即推出:范数 $\|\cdot\|_i (i = 1,2)$ 具有同样的范数拓扑 ⇔ 映射(1.2.3) 是拓扑同构 ⇔ 存在正常数 α,β,使得

$$\alpha \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta \|x\|_1, \quad x \in X.$$

当以上条件满足时,称 $\|x\|_i (i = 1,2)$ 为 X 上的**等价范数**. 选择适当的等价范数,以适应具体问题的特定需要,是应用赋范空间时常需考虑的一项基本技巧.

判定两个赋范空间拓扑同构,无疑是非常重要但往往困难的问题. 不过,对于有限维空间此问题有十分简单的答案.

定理 1.2.2 $\mathbb{K}$ 上任意两个 n 维赋范空间互相拓扑同构.

证 不妨只考虑$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 的情况,且只要证任一 n 维实赋范空间 X 拓扑同构于 $\mathbb{R}^n$,$\mathbb{R}^n$ 中采用 **Euclid 范数**

$$|x| = \left(\sum_i x_i^2 \right)^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.2.4}$$

注意 Euclid 范数恰好决定 Euclid 度量(由式(1.1.6)). 取定 X 的一组基 $\{e_i\}$,则

$$T: \mathbb{R}^n \to X, \quad x \to \sum_i x_i e_i$$

显然是一个连续的线性同构. 为证逆映射 T^{-1} 亦连续,用反证法. 设 T^{-1} 不连续,则有序列$\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$,使得 $Tx^k \to 0, x^k \not\to 0 (k \to \infty)$. 不妨设 $|x^k| \geqslant \mathrm{const} > 0$. 令 y^k

$= x^k/|x^k|$，则$\{y^k\}$位于$\mathbb{R}^n$中的单位球面上. 不妨设$y^k \to y$，则显然有$|y| = 1$，$Ty^k = |x^k|^{-1}Tx^k \to 0(k\to\infty)$，这与$Ty \neq 0$矛盾. □

定理1.2.2(结合空间$\mathbb{K}^n$的完备性)有一系列推论，它们虽然简单，但经常要用到，应当成为“分析学常识”中的一部分.

推论1.2.1　有限维赋范空间必定完备；赋范空间的有限维子空间必是闭的；一个有限维向量空间上的任何范数必互相等价.

向量空间的基概念当然适用于赋范空间，但对于无限维空间作用不大. 基的作用在于：由特别选定的一部分向量经线性运算表出空间中任何向量. 如果加入极限运算，就从线性代数意义上的基过渡到基本集，后者的准确定义如下：

定义1.2.3　设X是一个赋范空间，$B\subset X$，$\operatorname{span} B$记B生成的向量子空间. 若$\overline{\operatorname{span} B} = X$，则称$B$为$X$的**基本集**.

从定义1.2.3直接看出，B是X的基本集$\Leftrightarrow$每个$x\in X$可用B中元的线性组合任意逼近. 基本集的意义在于：如果要在X中建立某个命题P，则可首先验证X的某个基本集B中每个元均满足P，然后通过线性运算与极限运算，将所得结论推广到X中每个元. 要使这一方法收到显著效果，自然应将基本集B取得尽可能“小”，而且B中的元尽可能具有某些良好特性而便于处理. 本书中将有多次机会显示运用基本集的好处. 显然X本身就是它的基本集，因此基本集的存在性不成问题. 难点在于选取“好”的基本集. 若X是一个有限维赋范空间，则用它的基作为基本集已是最好的选择. 若X中存在可数无限个元e_i，使得每个$x\in X$可唯一地表成$\{e_i\}$的无穷线性组合$x = \sum \alpha_i e_i$，则称$\{e_i\}$为X的**Schauder基**. Schauder基显然也是基本集. 若X可分，则X中任何可数稠集都是X的基本集. 反之，若X有可数的基本集B，取$\mathbb{K}$的可数稠子集F，则

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i : \alpha_i\in F, b_i\in B, 1\leqslant i\leqslant n, n\in\mathbb{N}\right\}$$

是X中的可数稠集，因而X可分. 这就表明：X可分$\Leftrightarrow X$有可数的基本集.

至此，尚未接触具体的赋范空间(不算$\mathbb{R}^n$这个特例). 近代分析学不可避免地要用到大量具体的赋范空间，其中，一部分在本书中将作系统考察. 至于目前，则仅能给出少数简单例子，用以作为解释概念的样本. 在讨论具体例子之前，作点一般说明. 首先指出，应用上重要的赋范空间，几乎都是函数空间，它们作为向量空间使用函数的自然运算(即逐点进行的运算)，因而除了线性运算的封闭性可能需要验证之外，向量空间所需的其他条件均自动满足，无需验证. 要做的事情只是

(i) 适当定义范数并验证范数公理$(\mathrm{N}_1)\sim(\mathrm{N}_3)$.

(ii) 解释范数收敛的具体含义.

(iii) 验证完备性(如果空间确完备的话).

(iv) 讨论空间的其他性质(如选择基本集、判定可分性等).

例1.2.1 (i) 有界函数空间$B(\Omega)$. 设Ω是任一非空集,$B(\Omega)$是Ω上的有界$\mathbb{K}$值函数之全体. $B(\Omega)$显然是$\mathbb{K}$上的向量空间. 任给$u \in B(\Omega)$,定义其**sup 范数**(或称一致范数)为

$$\| u \|_0 = \sup_{x \in \Omega} | u(x) |. \tag{1.2.5}$$

sup 范数显然满足范数公理,因此$(B(\Omega), \| \cdot \|_0)$是一个赋范空间,其中,范数收敛显然就是一致收敛. 设$\{u_n\} \subset B(\Omega)$,$\sum \| u_n \|_0$收敛,则

$$\sum_n | u_n(x) | \leqslant \sum_n \| u_n \|_0 < \infty, \quad \forall x \in \Omega .$$

这推出级数$\sum u_n(x)$在Ω上一致收敛,其和函数显然属于$B(\Omega)$. 由引理1.2.1,$B(\Omega)$是完备的,因而是一个 Banach 空间.

通常记$B(\mathbb{N})$为l^∞且其中的范数写作$\| x \|_\infty$.

(ii) 有界连续函数空间$C_b(\Omega)$(也记作$BC(\Omega)$). 设Ω是任一拓扑空间,令$C_b(\Omega) = B(\Omega) \cap C(\Omega)$. $C_b(\Omega)$显然是$B(\Omega)$的向量子空间,今证$C_b(\Omega)$在$B(\Omega)$中是闭的(因而$C_b(\Omega)$也为 Banach 空间). 设$\{u_n\} \subset C_b(\Omega)$,$u_n \rightrightarrows u$. 如同初等分析中一样,由一个标准的论证得出$u \in C_b(\Omega)$. 若$\Omega$为$\mathbb{K}^n$中的有界闭集,则$C_b(\Omega) = C(\Omega)$;当$\Omega = [a,b] \subset \mathbb{R}$时$C(\Omega)$写作$C[a,b]$. 由 Weierstrass 定理,$\{x^n : n \geqslant 0\}$是$C[a,b]$的一个基本集. 若$\Omega$是离散拓扑空间(即其中每个集为开集),则$C_b(\Omega) = B(\Omega)$.

(iii) 空间$l^p (1 \leqslant p < \infty)$. 任给无限维向量$x = (x_i) = (x_1, x_2, \cdots)$,令

$$\| x \|_p = \left(\sum_i | x_i |^p \right)^{1/p}, \tag{1.2.6}$$

记$l^p = \{x : \| x \|_p < \infty\}$,则可验证$l^p$是一个 Banach 空间(所有验证在3.5节中将在远为一般的情形下完成,此处不必单独处理). 令$e_i = (0, \cdots, 1, 0, \cdots)$(第$i$个分量是1),则$\| e_i \|_p = 1$. $\forall x = (x_i) \in l^p$,有

$$\left\| x - \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|_p^p = \sum_{i>n} | x_i |^p \to 0, \quad n \to \infty .$$

可见$x = \sum x_i e_i$. 这表明$\{e_i\}$是l^p的一个 Schauder 基,因而也是基本集,称为l^p的标准基. 令$l_n^p = \mathrm{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$,则$l_n^p$是$l^p$的一个$n$维子空间,它必与$\mathbb{K}^n$拓扑同构(由定理1.2.2). 若在$\mathbb{K}^n$中采用范数$\| x \|_p$,则$\mathbb{K}^n$与$l_n^p$等距同构,因而$\mathbb{K}^n$被等距嵌入$l^p$中(见定义1.2.2). $p = 2$的情况是特别值得注意的,在l^2中范数

$$\| x \|_2 = \left(\sum_i | x_i |^2 \right)^{1/2}$$

是 Euclid 范数(1.2.4)最直接的推广.

本节的余下部分简略介绍一下局部凸空间,它是颇接近于赋范空间的一类抽

象空间,亦是近代分析所不可缺少的,本书后面各章都要用到.

定义 1.2.4 设 X 是 $\mathbb{K}$ 上的向量空间. 若 X 上定义了一族半范 $\{\|x\|_i: i \in I\}$, 它满足条件

(N_3') $\|x\|_i = 0,\ \forall i \in I \Leftrightarrow x = 0, x \in X,$

则称 $\{\|x\|_i: i \in I\}$ 为一个**分离半范族**,称 X 为一个**局部凸空间**,简称为 LCS.

设 X 与 $\|x\|_i$ 依定义 1.2.4,令(对照式(1.1.4) 与式(1.1.5))

$$\begin{cases}\beta = \{B_{ir}(x): x \in X, r > 0, i \in I\},\\ B_{ir}(x) = \{y \in X: \|y - x\|_i < r\}.\end{cases} \tag{1.2.7}$$

由命题1.1.2,以 β 为拓扑次基生成 X 上的一个拓扑 τ,称为由半范族 $\{\|x\|_i\}$ 导出的拓扑. 容易验证 (X,τ) 有如下性质:

(i) $\forall x \in X, \{B_{ir}(x): r > 0, i \in I\}$ 是 x 的一个邻域次基, 若 $\{x_t\}$ 是 X 中的网,则

$$x_t \to 0 \Leftrightarrow \|x_t\|_i \to 0,\ \forall i \in I. \tag{1.2.8}$$

(ii) X 中的线性运算是连续的.

(iii) 由条件 (N_3') 推出, (X,τ) 是 Hausdorff 空间.

若在定义 1.2.4 中 $I = \mathbb{N}$,令

$$\|x\| = \sum_i 2^{-i}(\|x\|_i \wedge 1),\quad x \in X, \tag{1.2.9}$$

则 $\|x\|$ 满足范数公理(N_2),(N_3)且 $\|-x\| = \|x\|$,称为准范数. 若令 $d(x,y) = \|x - y\|$,则易验证 d 是 X 上的一个度量. 由式(1.2.9) 推出

$$2^{-i}(\|x\|_i \wedge 1) \leqslant \|x\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} 2^{-j}(\|x\|_j \wedge 1) + \frac{1}{2^n}. \tag{1.2.10}$$

设 $\{x_t\}$ 是 X 中的一个网,则由式(1.2.10)推出

$$\|x_t\| \to 0 \Leftrightarrow \|x_t\|_i \to 0,\ \forall i \in \mathbb{N}.$$

与式(1.2.8)对照表明, X 中依度量的收敛重合于由半范族决定的收敛,因而度量拓扑就是由半范族导出的拓扑. 类似地,由式(1.2.10)推出: $\{x_n\} \subset X$ 依度量 d 为 Cauchy 序列 $\Leftrightarrow \|x_m - x_n\|_i \to 0 (m,n \to \infty, i \in \mathbb{N})$. 若 X 依度量 d 完备,则称 X 为 **Fréchet 空间**,简称为 **F 空间**①. F 空间是最接近于 Banach 空间的 LCS,在分析中被大量应用,本书中用到的 LCS 大多是 F 空间.

需要解释一下"局部凸"一词的由来,这涉及凸集概念. 任给 $x, y \in X$,令

$$[x,y] = \{(1 - t)x + ty: 0 \leqslant t \leqslant 1\}, \tag{1.2.11}$$

称 $[x,y]$ 为以 x,y 为端点的线段. 若 $A \subset X, \forall x,y \in A$,有$[x,y] \subset A$,则称 A 为凸集. 任给有限集 $\{x_i\} \subset X$,若 $t_i \geqslant 0, \sum t_i = 1$,则称 $\sum t_i x_i$ 为 $\{x_i\}$ 的一个**凸组合**. 任

---

① 对于 F 空间,文献中有多种互有差异的定义,此处采用较强的定义,有其方便之处.

给$A\subset X$，A中有限集的凸组合之全体构成A的**凸包**，记作$\mathrm{co}\,A$. 显然A是凸集$\Leftrightarrow$ $A=\mathrm{co}\,A$；凸集的交总是凸集. 由半范的性质易推出，式(1.2.7)中的集$B_{ir}(x)$均为凸集，因此LCS中每点有一个由凸集组成的邻域基(就称为凸邻域基)，这就解释了局部凸空间的意义.

局部凸空间还有另一种导入法. 设向量空间X上给定了一个拓扑τ，使得X中的线性运算连续，则称X为拓扑向量空间，简写为TVS. 然后将每点有凸邻域基的TVS定义为LCS. 在这样的空间上总可构成一分离半范族$\{\|x\|_i : i\in I\}$，使得由其导出的拓扑恰为原拓扑. 因此，LCS的两种定义实质上是一致的. 后一定义出发点是拓扑，从逻辑上看更为可取，因为对于LCS本质的东西毕竟是拓扑. 前一定义的出发点是半范族，它有直观且便于运用的好处，也更有利于与赋范空间对照，因而被本书所采用. 但这种定义留下一个问题：如何判定两个不同的分离半范族导出同一拓扑(此时说两半范族等价)？不过，本书中处理具体的LCS时，此问题都不难解决.

前面指出了，$\{B_{ir}(x) : r>0, i\in I\}$(记号依式(1.2.7))是$x$的一个邻域次基，但未必是邻域基，这常常是不方便的. 若$\forall x\in X$，$\{B_{ir}(x) : r>0, i\in I\}$是$x$的邻域基，则称$\{\|x\|_i : i\in I\}$为**基本半范族**. 处理LCS问题时，唯有运用基本半范族才是最方便的. 在具体情况下如何构成基本半范族常不成问题. 例如，设$\{\|x\|_i : i\in\mathbb{N}\}$是$X$上的一个分离半范族，令

$$\|x\|_n' = \|x\|_1 \vee \|x\|_2 \vee \cdots \vee \|x\|_n, \quad x\in X,$$

则$\{\|x\|_n' : n\in\mathbb{N}\}$就是一个等价于$\{\|x\|_i : i\in\mathbb{N}\}$的基本半范族. 一般地，$X$上的半范族$\{\|x\|_i : i\in I\}$是基本半范族的充要条件是

$$\forall i,j\in I, \exists k\in I, \text{使得 } \|x\|_i \vee \|x\|_j \leqslant C\|x\|_k, \tag{1.2.12}$$

其中，$C=C_{ijk}$是与x无关的正常数.

关于赋范空间的许多概念与结论能以自然的方式推广于LCS(如定义1.2.2与定义1.2.3，定理1.2.2)，这些都不细述.

本书将在适当地方系统讨论一些典型的F空间与LCS. 此处仅考虑两个最简单的LCS，以便获得初步的印象.

例1.2.2 (i) 空间$\mathbb{K}^\Omega$. 设Ω是任一非空集，以$\mathbb{K}^\Omega$记Ω上$\mathbb{K}$值函数的全体.令

$$\|u\|_x = |u(x)|, \quad u\in\mathbb{K}^\Omega, x\in\Omega. \tag{1.2.13}$$

直接看出$\{\|u\|_x : x\in\Omega\}$是$\mathbb{K}^\Omega$上的一个分离半范族，因而$\mathbb{K}^\Omega$是一个LCS. 若$\{u_t\}\subset\mathbb{K}^\Omega$是一个网，则由收敛条件(1.2.8)有

$$u_t\to 0 \Leftrightarrow \|u_t\|_x\to 0(\forall x\in\Omega) \Leftrightarrow u_t(x)\to 0(\forall x\in\Omega).$$

可见，$\mathbb{K}^\Omega$中的收敛是"点态收敛"，即在每点$x\in\Omega$收敛.

(ii) 连续函数空间$C(\mathbb{R})$. 令

$$\| u \|_n = \sup_{|x| \leqslant n} | u(x) |, \quad u \in C(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}.$$

直接看出 $\{ \| u \|_n : n \in \mathbb{N} \}$ 是 $C(\mathbb{R})$ 上的一个分离半范族. 任给 $\{u_k\} \in C(\mathbb{R})$,有

$$\begin{aligned} u_k \to 0 &\Leftrightarrow \| u_k \|_n \to 0 (k \to \infty, n \in \mathbb{N}) \\ &\Leftrightarrow u_k(x) \rightrightarrows 0 (k \to \infty, |x| \leqslant n, n \in \mathbb{N}) \\ &\Leftrightarrow \text{在任何闭区间上 } u_k(x) \rightrightarrows 0 (k \to \infty), \end{aligned}$$

这表明 $C(\mathbb{R})$ 中的收敛就是“内闭一致收敛”. 令

$$\| u \| = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (\| u \|_n \wedge 1).$$

若 $\{u_k\}$ 是 $C(\mathbb{R})$ 中的 Cauchy 序列,则 $\| u_k - u_l \|_n \to 0 (k, l \to \infty, n \in \mathbb{N})$. 于是 $\{u_n\}$ 在$\mathbb{R}$上内闭一致收敛于某个$u \in C(\mathbb{R})$,这表明$C(\mathbb{R})$是完备的,因此$C(\mathbb{R})$是一个 F 空间.

1.3 拓扑性质

本书将用到的抽象空间:拓扑空间、度量空间、LCS 与赋范空间,在 1.1 节和 1.2 节中都已有所交代. 所有这些空间都是拓扑空间,它们作为拓扑空间的性质,即拓扑性质,对于奠立于抽象空间之上的分析学论题,有着深刻的影响,因而值得作适当的阐述. 我们将涉及 3 种最基本的拓扑性质:分离性、紧性与连通性,考虑的重点是紧性. 完全的讨论当然非本书的任务,所挑选的材料只是本书所必需的,复杂的证明概予省略. 欲知其详者可参考(Kelley, 1955; Engelking, 1977)等书.

本节中 X, Y 等均记 Hausdorff 空间, E 是给定的 Banach 空间.

定义 1.3.1 设 $A, B \subset X$. 若存在 A 的邻域 U 与 B 的邻域 V,使 $U \cap V = \varnothing$,则说 A 与 B 可邻域分离($\Leftrightarrow$$A$ 与 B 可用开邻域分离). 若 X 中任何闭集 A 与任一点 $x \in A^c$ 可邻域分离,则称 X 为**正则空间**或 T_3 空间. 若 X 中任何一对互不相交的闭集可邻域分离,则称 X 为**正规空间**或 T_4 空间.

显然 $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2$①. 若 X 是度量空间, $A \subset X$,则易验证 $x \in \bar{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0$; $d(x, A)$ 对 x 连续. 因此,若 $A, B \subset X$ 是不交闭集,则

$$\{x : d(x, A) < d(x, B)\} \text{ 与 } \{x : d(x, A) > d(x, B)\}$$

就是分离 A 与 B 的开邻域. 可见度量空间是正规空间. 这又推出,赋范空间或 F 空间的任何非空子集作为拓扑空间是正规的.

关于正规空间不加证明地引述以下基本结果(Kelley, 1955):

---

① 此结论依赖于本节的预设前提:所涉空间均为 T_2 空间. 在一些文献中,正则空间与正规空间的定义并不包含 T_2 条件.

定理 1.3.1 设 X 是 Hausdorff 空间,则以下条件互相等价:

(i) X 是正规空间;

(ii) X 中互不相交的非空闭集 A,B 可函数分离,即存在 $f\in C(X,[0,1])$,使得 $f(A)=0,f(B)=1$(约定 $f(A)=0\Leftrightarrow f(a)=0(\forall a\in A)$);

(iii) 任给非空闭集 $A\subset X$ 与 $f\in C(A,\mathbb{R})$,存在 $g\in C(X,\mathbb{R})$,使得 $g|A=f$,且

$$\|f\|_A=\|g\|_X\triangleq\sup_{x\in X}|g(x)|. \tag{1.3.1}$$

定理 1.3.1 中条件(ii)与(iii)所给出的正规性刻画,在文献中分别称为 **Urysohn 引理**与 **Tietze 扩张定理**.

若 $\mathscr{A}$ 是开集族,$A\subset\mathscr{A}^{\#}$,则称 $\mathscr{A}$ 为 A 的开覆盖.

定义 1.3.2 设 $A\subset X$. 若 A 的任何开覆盖包含有限子覆盖,则称 A 为**紧集**;若 $\bar{A}$ 为紧集,则称 A 为**相对紧集**[①];若 X 本身为紧集,则称 X 为紧空间. 可数个紧集之并称为 **σ 紧集**.

粗略地说,紧集就是**使有限覆盖定理适用的点集**. 倘能充分理解有限覆盖定理在经典分析中的作用,就不难想象紧集对于近代分析的价值了.

直接由定义可推出以下简单结论:Hausdorff 空间中的紧集是闭集,紧集的闭子集是紧集(以上结论可与命题 1.1.3 对照);有限个紧集之并是紧集;连续映射映紧集为紧集. 这些都应成为了然于胸的常识.

对于度量空间的紧性有较简单的刻画.

定理 1.3.2 设 X 是一度量空间,则以下条件互相等价:

(i) X 是紧空间;

(ii) X 中非空闭集的降列 $\{B_n\}$ 有非空交;

(iii) X 中任何序列 $\{x_n\}$ 有收敛子列;

(iv) X 完备且**全有界**,即 $\forall\varepsilon>0$,X 可被有限个半径为 ε 的球覆盖.

证 (i)$\Rightarrow$(ii)是明显的.

(ii)$\Rightarrow$(iii) 不妨设 x_n 互异. 令 $B_n=\{x_k: k\geqslant n\}(n\in\mathbb{N})$. 若 $\{x_n\}$ 无收敛子列,则 B_n 均为闭集. 但 $\cap B_n=\varnothing$, 故条件(ii)必不满足.

(iii)$\Rightarrow$(iv) (iii)$\Rightarrow$完备性是明显的. 若 X 非全有界,则有 $\varepsilon>0$,X 不被任何有限个半径为 ε 的球覆盖. 任取 $x_1\in X$, 必有 $x_2\in X\backslash B_\varepsilon(x_1)$,$x_3\in[B_\varepsilon(x_1)\cup B_\varepsilon(x_2)]^c$,$\cdots$,如此所得的序列 $\{x_n\}$ 必无收敛子列. 因此(iii)$\Rightarrow$全有界.

(iv)$\Rightarrow$(i) 用反证法. 设条件(iv)满足,但 X 的某个开覆盖 β 不含有限子覆盖. 由全有界性,可取有限个半径为 1 的球覆盖 X,其中, 必有一个(记作 B_1) 不被

---

① 此处的"相对"二字与相对拓扑无关,有些著作称相对紧集为预紧集.

β 中有限个集覆盖;又可取有限个半径为 1/2 的球覆盖 B_1,其中,必有一个(记作 B_2) $B_1 \cap B_2$ 不被 β 中的有限个集覆盖,…,如此得到一列球 $\{B_n\}$,B_n 的半径为 $1/n$,$A_n \triangleq \bigcap_1^n B_i$ 不被 β 中有限个集覆盖. 任取 $x_n \in A_n (n \in \mathbb{N})$,则 $\{x_n\}$ 显然是一 Cauchy 序列,由 X 完备有 $x_n \to x \in X$. 取 $B \in \beta$ 使 $x \in B$,则当 n 充分大时有 $A_n \subset B$,得出矛盾. □

由定理 1.3.2 推出:若 X 是度量空间,$A \subset X$,则 A 是相对紧集 $\Leftrightarrow A$ 中任何序列有收敛子列 $\Rightarrow A$ 全有界 $\Rightarrow A$ 有界;若 X 完备,则 A 相对紧 $\Leftrightarrow A$ 全有界. 在有限维赋范空间中,全有界 $\Leftrightarrow$ 有界 $\Leftrightarrow$ 相对紧,紧集即有界闭集. 由此又得出,若取 X 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集,则定理 1.3.2 可解释为经典实分析中的以下 4 个定理互相等价:有限覆盖定理、闭集套定理(区间套定理为其特例)、Bolzano-Weierstrass 定理、Cauchy 收敛原理,其中,Bolzano-Weierstrass 定理断言,$\mathbb{R}^n$ 中任何有界序列有收敛子列. 在定理 1.2.2 的证明中就用了这一结论.

例 1.2.1 中描述的空间 $B(\Omega)$ 与 $C_b(\Omega)$ 可推广如下:

给定 $\mathbb{K}$ 上的 Banach 空间 E 与非空集 Ω,以 $B(\Omega,E)$ 记 Ω 上的有界 E 值函数之全体. 任给 $u \in B(\Omega,E)$,令

$$\| u \|_0 = \sup_{x \in \Omega} \| u(x) \|. \tag{1.3.2}$$

若 Ω 是拓扑空间,则令 $C_b(\Omega,E) = C(\Omega,E) \cap B(\Omega,E)$. 上述的 $B(\Omega,E)$ 与 $C_b(\Omega,E)$ 依 **sup 范数** (1.3.2) 均为 Banach 空间,其中,范数收敛就是一致收敛. 若 Ω 是紧拓扑空间,则 $C_b(\Omega,E) = C(\Omega,E)$. 本书中用到空间 $B(\Omega,E)$,$C_b(\Omega,E)$ 与 $C(\Omega,E)$ (后者要求 Ω 是紧的) 时,其中总使用 sup 范数而不另作解释.

从 $C(\Omega,E)$ 中选出一致收敛函数列,是分析中许多存在性证明的基础. 著名的 **Arzela-Ascoli 定理**就是为此目的而设,在本节的记号下它取如下一般形式:

定理 1.3.3 设 Ω 是紧度量空间,E 是 Banach 空间,$A \subset C(\Omega,E)$,则 A 相对紧的充要条件是

(i) $\forall x \in \Omega, A_x \triangleq \{u(x) : u \in A\}$ 相对紧;

(ii) A **等度连续**,即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当 $x,y \in \Omega, d(x,y) < \delta$ 时,对任给 $u \in A$ 有 $\| u(x) - u(y) \| < \varepsilon$.

当 $\dim E < \infty$ 时,条件(i)可改换成 $\sup_{u \in A} \| u \|_0 < \infty$(一致有界).

证 首先设 A 相对紧. 显然 $A_x (x \in \Omega)$ 必相对紧. 若 A 非等度连续,则存在 $\varepsilon > 0, x_n, y_n \in \Omega, u_n \in A (n \in \mathbb{N})$,使得

$$d(x_n, y_n) \to 0, \quad \| u_n(x_n) - u_n(y_n) \| \geq \varepsilon, \quad n \in \mathbb{N}.$$

因 Ω 紧而 A 相对紧,不妨设 $x_n \to x \in \Omega, u_n \rightrightarrows u \in C(\Omega,E) (n \to \infty)$. 这推出

$$\varepsilon \leq \| u_n(x_n) - u(x_n) \| + \| u(x_n) - u(x) \| + \| u(x) - u(y_n) \| + \| u(y_n) - u_n(y_n) \| \to 0, \quad n \to \infty,$$

得出矛盾. 故 A 必等度连续.

其次设条件(i)(ii)满足, $\{u_n\} \subset A$,今要从$\{u_n\}$ 中选出一致收敛子列. 易见紧度量空间必可分, 故 Ω 有可数稠集$\{x_n\}$. 由 A_{x_1} 相对紧推出存在$\{u_n\}$ 的子列$\{u_n^1\}$,使得$\{u_n^1(x_1)\}$ 收敛. 同理, 有 $\{u_n^1\}$ 的子列$\{u_n^2\}$,使得$\{u_n^2(x_2)\}$ 收敛,……,如此得到$\{u_n\}$ 的无限个子列$\{u_n^k\}$,使当$k \in \mathbb{N}$ 固定时$\{u_n^k(x_k)\}$ 收敛,令$v_n = u_n^n$,则$\{v_n\}$ 是$\{u_n\}$ 的一个子列,它在每点 $x_k(k \in \mathbb{N})$ 收敛. 然后用条件(ii) 可证 $\| v_m - v_n \|_0 \to 0(m,n \to \infty)$,因而$\{v_n\}$ 是$\{u_n\}$ 的一致收敛子列. □

对于函数空间中的紧性论证,定理 1.3.3 是基本而常用的. 定理证明中所得的序列 u_n^n 称为对角线序列. 相应地,所用的证法称为对角线法,是一种被广泛应用的标准方法. 论证“ A 相对紧 $\Rightarrow A$ 等度连续”的方法也是很典型的,它充分体现出运用“紧性论证”的简洁性. 类似的方法可用来得出如下标准结果,它们在初等分析中的原型是人们所熟知的.

定理 1.3.4 (i) 设 Ω 是紧度空间, X 是度量空间, $F \in C(\Omega,X)$,则 F 有界(即 $F\Omega$ 为有界集)且一致连续;

(ii) 设 Ω 是紧拓扑空间, $f \in C(\Omega,\mathbb{R})$,则 f 在 Ω 上取得最大值与最小值.

紧性常用来加强分离性结论,下面是典型一例,其证明是简单的.

定理 1.3.5 紧 Hausdorff 空间是正规空间.

鉴于紧集具有多方面的良好性质,在分析学中深受喜爱是很自然的. 可惜,紧集并不如人们所希望的那样常见,尤其未必恰好出现于人们需要它的地方. 因此,那些“处处有紧集”的空间具有特殊的意义,局部紧空间就是这样的空间. 正式的定义十分简单:若 X 中每点有一紧邻域,则称 X 为**局部紧空间**. “局部紧 Hausdorff 空间”已成为一个高度频现的术语,因此值得专设一缩记号——LCH. LCH 首先包括了熟知的 Euclid 空间,因此也包括了任何有限维赋范空间及它们的非空开子集与闭子集. 鉴于 LCH 的重要性,本节将用较多的篇幅来讨论它,提供较多的结论以供后面章节之用. 首先给出直接源于定义的以下结论:

命题 1.3.1 设 X 是 LCH,则它有以下性质:

(i) 每点 $x \in X$ 有紧邻域基(即由紧邻域组成的邻域基);

(ii) X 有由相对紧开集组成的拓扑基,当 X 是第二可数的 LCH 时, 可要求此拓扑基由可数个相对紧开集组成;

(iii) X 是正则空间.

要形成对 LCH 的某种直观印象,最简单的方法莫过于选取 $\mathbb{R}^n$ 这个样本. 任给 $x \in \mathbb{R}^n$, $\{\overline{B}_r(x): r > 0\}$(记号依式(1.1.4))就是 x 的一个紧邻域基, $\{B_r(x): r > 0, x \in \mathbb{R}^n\}$ 是$\mathbb{R}^n$ 的由相对紧开集构成的拓扑基. 若以$\mathbb{R}^n$ 的任一非空开子集 Ω 取代$\mathbb{R}^n$,则以上结论稍作修改后依然适用.

关于 LCH 的更深刻的结论关联着一定的连续函数. 首先引入几个在本书中将

反复用到的记号. 设$f: X \to E$,令

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}, \tag{1.3.3}$$

称它为f的**支集**. 令

$$C_c(X,E) = \{f \in C(X,E) : \operatorname{supp} f \text{为紧集}\}^{①}, \tag{1.3.4}$$

$C_c(X) = C_c(X,\mathbb{K})$. 函数类$C_c(X,E)$的重要性在于:$f \in C_c(X,E)$在某个紧集之外为零,因而不妨认为关于$f$的研究只是一个局部问题. 设$A,B \subset X, f \in C(X,[0,1])$,则约定

$$A < f \Leftrightarrow f(A) = 1, \quad f < B \Leftrightarrow \operatorname{supp} f \subset B^{\circ}. \tag{1.3.5}$$

注意记号$A < f$或$f < B$隐含了$0 \leqslant f \leqslant 1$. 关系 $<$ 的重要性在于:若$f \in C(X,E)$, $A \subset B \subset X, A < \varphi < B, g = \varphi f$,则$g \in C(X,E)$, $g | A = f | A$, $\operatorname{supp} g \subset \operatorname{supp} \varphi \subset B^{\circ}$,因而当$B$为紧集时有$g \in C_c(X,E)$. 这相当于通过$\varphi$在集$A$上将$f$截取下来了. 或许会认为取$g = \xi_A f$也能达到同一目的,但这样的$g$却未必连续了. 不过尚成问题的是上述的$\varphi$是否存在,这正是以下定理要回答的.

定理 1.3.6　设X是一个 LCH, $\varnothing \neq A \subset V \subset X$, A为紧集,V为开集,则以下结论成立(对照定理 1.3.1):

(i) 存在紧集K,使得$A \subset K^{\circ}, K \subset V$;

(ii) Urysohn 引理:存在$\varphi \in C_c(X)$,使得$A < \varphi < V$;

(iii) Tietze 扩张定理:若$f \in C(A,\mathbb{R})$,则存在$g \in C_c(X,\mathbb{R})$,使得$g | A = f$,且式(1.3.1)成立.

证　(i) $\forall x \in A$,取x的紧邻域K_x,使$K_x \subset V$(由命题 1.3.1(i)). 因$\{K_x^{\circ} : x \in A\}$是紧集$A$的开覆盖,故有有限集$\{x_i\} \subset A$,使得$A \subset \bigcup K_{x_i}^{\circ}$. 令$K = \bigcup K_{x_i}$,则$K$是紧集,$A \subset K^{\circ}, K \subset V$.

(ii) 设K依结论(i). K作为X的子空间是正规空间(由定理 1.3.5),A与∂K是K中互不相交的闭集. 由定理 1.3.1,存在$\varphi \in C(K,[0,1])$,使得$\varphi(A) = 1$, $\varphi(\partial K) = 0$. 补充定义$\varphi | K^c = 0$,则$\varphi \in C(X,[0,1])$(注意此处用了拼接引理 1.1.1!), $\operatorname{supp} \varphi \subset K$,因而$\operatorname{supp} \varphi$为紧集. 直接看出$A < \varphi < V$.

(iii) 仍设K依结论(i). 在正规空间K中应用定理 1.3.1 得出$h \in C(K,\mathbb{R})$,使得$h | A = f$且$\|f\|_A = \|h\|_K$. 以K°代替V应用结论(ii)得出$\varphi \in C(X,\mathbb{R})$. 使得$A < \varphi < K^{\circ}$. 令$g(x) = \varphi(x)h(x)$ $(x \in K)$,补充定义$g | K^c = 0$,则易验证(再用拼接引理 1.1.1)g合于所求. □

定理 1.3.6 中最重要的结论是(ii)(不难看出它蕴涵了结论(i)),本书中将多次用到它. 在应用中,重要的是如定理所要求的φ存在,并不需要知道φ是如何具体构成的. 由定理 1.3.6(ii)特别推出:任给一对相异点$x, y \in X$,必有$f \in C_c(X)$,

---

① 一些著作用记号$C_0(X,E)$,但此记号在本书中另有所用(见式(1.3.6)).

使$f(x) \neq f(y)$;或者说$C_c(X)$区分X中的点,这对于函数空间$C_c(X)$用于X的研究是意义重大的.

如果说定理1.3.6常用来实现问题的局部化,那么以下结果则有助于实现从局部到整体的过渡:

定理1.3.7 设X是第二可数的LCH,则存在紧集序列$\{K_n\}$,使得$K_n \subset K_{n+1}^{\circ}(n \in \mathbb{N})$,$X = \cup K_n$,因而$X$是$\sigma$紧的.

证 由命题1.3.1(ii),X有由相对紧开集组成的拓扑基$\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$.令$K_1 = \overline{U}_1$.因$\{U_i\}$是紧集$K_1$的开覆盖,故有$i_2 > i_1 = 1$,使得$K_1 \subset \bigcup_1^{i_2} U_i$.令$K_2 = \bigcup_1^{i_2} \overline{U}_i$,则$K_2$是紧集,$K_1 \subset K_2^{\circ}$.重复这一过程可得到序列$i_1 < i_2 < \cdots$,$K_n = \bigcup_1^{i_n} \overline{U}_i \subset \bigcup_1^{i_{n+1}} U_i (n \in \mathbb{N})$.这样的$\{K_n\}$显然能满足定理的要求. □

上述的$\{K_n\}$称为X中**紧集的穷竭序列**.$\mathbb{R}^n$中的闭球序列$\{\overline{B}_k(0) : k \in \mathbb{N}\}$就是一个紧集的穷竭序列.不过,对于定理1.3.7的应用来说,重要的是所要求的序列$\{K_n\}$存在这一结论,至于这些紧集K_n如何构成,通常是不必关心的.

以下结果表明,LCH可通过很简单的方式改造成为紧空间:

定理1.3.8 设X是一个非紧的LCH,则存在紧Hausdorff空间$\overline{X}$,它以X为其稠密子空间,且$\overline{X} \backslash X$仅含一点.

如上的$\overline{X}$在同胚的意义下是唯一的,称为X的**一点紧化**,通常写作$\overline{X} = X_\infty = X \cup \{\infty\}$,唯一的附加点$\infty$也就称为$X_\infty$中的无穷远点.注意,$\{K^c : K$是$X$中的紧集$\}$构成$\infty$点的一个邻域基.粗略地说,"进入点$\infty$邻近"意味着"到达任何给定紧集$K(\subset X)$之外".

设$f \in C(X,E)$,则f可以扩张为$f \in C(X_\infty,E)$且使$f(\infty) = 0$的充要条件是$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$,这意味着:$\forall \varepsilon > 0$,存在紧集$K \subset X$,$\forall x \in X \backslash K$,有$\|f(x)\| < \varepsilon$.约定

$$C_0(X,E) = \{f \in C(X,E) : \lim_{x \to \infty} f(x) = 0\}, \tag{1.3.6}$$

而令$C_0(X) = C_0(X,\mathbb{K})$.依自然的嵌入$C_0(X,E) \subset C(X_\infty,E)$,$C_0(X,E)$可看成Banach空间$C(X_\infty,E)$的闭子空间,因而也是一个Banach空间.本书中将多次用到这个空间.直接看出$\overline{C_c(X,E)} = C_0(X,E)$,因此$C_0(X,E)$可看成赋范空间$C_c(X,E)$(其中,用sup范数)的完备化.

TVS(拓扑向量空间)成为LCH的机会并不多.准确地说,就是

定理1.3.9 设X是$\mathbb{K}$上的TVS,则X是一个LCH $\Leftrightarrow \dim X = n < \infty \Leftrightarrow X$拓扑同构于$\mathbb{K}^n$.特别地,若$X$是赋范空间,则$X$是LCH $\Leftrightarrow X$中的任何闭球是紧集$\Leftrightarrow \dim X < \infty$.

下面转向连通性.

定义1.3.3 若拓扑空间X不能分解为两个互不相交的非空开集之并,则称

X 为连通空间. 若 $A \subset X$ 作为 X 的子空间是连通的,则称 A 为**连通集**. 若每点 x 有一个由连通集组成的邻域基,则称 X 为局部连通空间. 若 $\varphi \in C([0,1],X)$,则称 φ 为 X 中连结点 $\varphi(0)$ 与 $\varphi(1)$ 的道路. 若 X 中任一对点可用 X 中的道路连接,则称 X 为道路连通空间. 若每点 $x \in X$ 有一个由道路连通集组成的邻域基,则称 X 为局部道路连通空间.

连通性在本书中涉及不多,因此下面仅举出少数几个结果.

定理 1.3.10　X 是连通空间$\Leftrightarrow \forall f \in C(X,\mathbb{R})$, $f(X)$ 是一个区间.

非空集 $J \subset \mathbb{R}$ 为区间可刻画为当 $a,b \in J, a \leqslant b$ 时, 必 $[a,b] \subset J$.

证　若 X 不连通,则 X 可分解为互不相交的非空开集 A 与 B 之并. 令 $f = \xi_A$,则用定理 1.1.3 可验证 $f \in C(X)$,而 $f(X) = \{0,1\}$ 不是区间. 反之,若有 $f \in C(X,\mathbb{R})$ 使 $f(X)$ 不是区间,则必有 $x,y \in X, r \in \mathbb{R}\backslash f(X)$,使得 $f(x) < r < f(y)$. 于是 X 是互不相交的非空开集 $\{f < r\}$ 与 $\{f > r\}$ 的并,因而不连通. □

基于以上结果可以说,连通空间正是**使连续函数介值定理适用的空间**. 至此,初等分析中关于连续函数的三大定理——介值定理、极值定理与一致连续性定理,都推广到了很一般的情况(见定理 1.3.4).

定理 1.3.11　道路连通空间是连通的, 局部道路连通的连通空间是道路连通的.

证　设 X 是道路连通空间,任给 $f \in C(X,\mathbb{R})$,设 $a,b \in X, f(a) < f(b)$. 由道路连通性,有 $\varphi \in C([0,1],X)$ 使 $\varphi(0) = a, \varphi(1) = b$,于是 $g = f \circ \varphi \in C[0,1]$,

$$[f(a),f(b)] = [g(0),g(1)] \subset g([0,1]) \subset f(X),$$

可见 $f(X)$ 是一区间. 由定理 1.3.10, X 是连通的.

其次, 设 X 是局部道路连通的连通空间. 取定 $a \in X$,令

$$A = \{x \in X: X \text{ 中存在连接 } a \text{ 与 } x \text{ 的道路}\},$$

则 $a \in A$. 任给 $b \in A$,取 b 的道路连通邻域 V, $\forall x \in V$, V 中有连接点 b 与 x 的道路,因而 $V \subset A$. 可见 A 是开集. 同理, 可证 A^c 是开集,于是由 X 连通得出 $A^c = \varnothing, A = X$,这表明 X 是道路连通的. □

连通开集称为区域. 直接看出 LCS 中的凸集是道路连通的,因而开集是局部道路连通的. 因此由定理 1.3.11 得出

推论 1.3.1　LCS 中的区域是道路连通的.

定义 1.3.4　设 $A \subset X$. 若 $(\bar{A})^\circ = \varnothing$,则称 A 为疏集. 可数个疏集之并称为**第一纲集**,非第一纲集称为**第二纲集**①. 若 X 中任何第一纲集的补为稠集,则称 X 为 **Baire 空间**. Baire 空间中第一纲集的补集称为**剩余集**.

---

① 这些术语出自 Baire,是字面上不具任何启示意义的数学名词的典型例子,因而有人建议代之以"瘦集"(meager set)与"非瘦集"(nonmeager set), 但似乎宁可使用人们已经习惯的老名词.

由定义 1.3.4 易验证 Baire 空间 X 有以下性质：X 本身是第二纲集；若 $X = \cup A_n, A_n(n \in \mathbb{N})$ 均为闭集，则必有某个 A_n 含内点；X 中可数个稠密 G_δ 集之交仍为稠密 G_δ 集；剩余集必含稠密 G_δ 集. X 是 Baire 空间 $\Leftrightarrow$ X 中的第一纲集无内点.

如下的所谓 **Baire 纲定理**，在分析中起特殊作用.

定理 1.3.12 在以下两种情况下 X 是 Baire 空间：

(i) X 是 LCH；

(ii) X 是局部完备的，即每点 $x \in X$ 有一邻域为完备度量空间.

证 就 X 为完备度量空间的情况给出证明，其他情况类似. 设 $A = \cup A_n \subset X$，$(\bar{A}_n)^\circ = \varnothing(n \in \mathbb{N})$，今证 $A^\circ = \varnothing$. 反设 $A^\circ \neq \varnothing$，则 $A^\circ \backslash \bar{A}_1$ 为非空开集. 于是有球 $B_1 = B_{r_1}(x_1)(0 < r_1 < 1)$，使 $\bar{B}_1 \subset A^\circ \backslash \bar{A}_1$. 以 B_1 取代 A° 又得球 $B_2 = B_{r_2}(x_2)(0 < r_2 < 1/2)$，使 $\bar{B}_2 \subset B_1 \backslash \bar{A}_2, \cdots$，一般地，有 $B_n = B_{r_n}(x_n)(0 < r_n < 1/n)$，$\bar{B}_n \subset B_{n-1} \backslash \bar{A}_n(n \in \mathbb{N}, B_0 = A^\circ)$. 显然 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 序列，设 $x_n \to x$，则可验证 $x \in A^\circ \backslash (\cup \bar{A}_n)$，得出矛盾. 故 $A^\circ = \varnothing$. □

特别地，对于 Banach 空间、F 空间或其中的非空开子集，可应用定理 1.3.12. 还应注意，尽管条件(ii)涉及度量，但 Baire 空间完全是一拓扑概念. 因此，若 X 是同胚于某个完备度量空间的拓扑空间，则 X 必为 Baire 空间.

若 X 是 Baire 空间，则依次从 X 中挖去可数个第一纲集，不仅不会使 X 穷竭，而且余下的集仍为第二纲集且在 X 中稠密. 这就表明，Baire 空间中的第一纲集与其剩余集的关系，犹如 $\mathbb{R}$ 中的有理点集与无理点集的关系. 前者只是可“忽略”的一小部分，而后者则几乎占据了整个空间. 这一理解导致描述“稀有性”与“一般性”这两个对立范畴的强有力的拓扑方法，此方法在现代数学中有许多深刻的应用. 为使所述方法更具形象性，约定以下说法：若 A 是 Baire 空间 X 中的第一纲集，则说 X 中“几乎每点属于 A^c”①. 下面以一个著名例子来解释 Baire 定理的应用.

例 1.3.1 几乎每个 $f \in C[a,b](a < b)$ 处处不可微.

证 令 $X = C[a,b]$，则 X 作为 Banach 空间是一个 Baire 空间. 令

$$A = \{f \in X : f \text{至少在某点} x \in [a,b) \text{可微}\},$$
$$B = \{f \in X : f \text{至少在某点} x \in (a,b] \text{可微}\}.$$

只要证 A 是第一纲集(同理，B 也为第一纲集，因而 $A \cup B$ 是第一纲集，而 $f \in (A \cup B)^c$ 在 $[a,b]$ 上处处不可微). 令

$$A_n = \{f \in X : \exists x \in [a, b - n^{-1}], \text{使} \sup_{h>0} h^{-1} |\Delta f(x,h)| \leq n\},$$

其中，$\Delta f(x,h) = f(x+h) - f(x)$. 显然 $A \subset \bigcup_1^\infty A_n$，只需证 A_n 是疏集. 可验证 A_n 是

① 这一说法仅有相对的合理性，不可滥用. 除了此处的拓扑观点之外，还有基于测度观点的“几乎处处”概念，二者差别甚大. 例如，可构成区间 [0,1] 的第一纲子集 A，使其具有 Lebesgue 测度 1！

闭集,故只要证 $A_n^{\circ} = \varnothing$,即证 A_n^c 在 X 中稠密. 注意

$$A_n^c = \{f \in X: \forall x \in [a, b - n^{-1}], \text{有} \sup_{h>0} h^{-1} | \Delta f(x,h) | > n\}.$$

取定 $n \in \mathbb{N}, g \in X$,总可作出 $f \in X$,使 $\|f - g\|_0$ 充分小,且 f 是振动足够快的"锯齿形函数",因而 $f \in A_n^c$. 这正表明 A_n^c 在 X 中稠密. □

与以上结论形成鲜明对照的是,举出一个处处不可微的连续函数可不是一件平凡的事. 这样的例子最早由 Weierstrass 于 1872 年给出,当时在数学界引起的轰动可想而知. 而现在我们知道,连续函数处处不可微并非病态,而是常态! 或者说,一条连续曲线处处不光滑是很正常的事情. 这就彻底颠覆了肤浅直观所形成的错觉. 抽象分析方法的强大威力,遂为人们所认可.

1.4 积空间与商空间

利用已知空间作为材料,通过某种"运算"构成新的空间,是抽象空间理论中经常需要处理的问题. 最常用且已标准化的构成方法是从已知空间形成积空间与商空间. 本节依次从集论、拓扑、代数及赋范空间等多个层次处理积与商的构成. 不同层次表述形式各异,但有某种统一的思想贯穿于其中,而这正是我们所要强调的.

首先考虑积空间的构成,下面是一个颇长的定义.

定义 1.4.1 (i) 设 $X_i (i \in I)$ 是一族集,其积集 $X = \prod X_i$ 界定为

$$X = \{x: x \text{ 是从 } I \text{ 到 } \cup X_i \text{ 的函数}, x(i) \in X_i (\forall i \in I)\}. \tag{1.4.1}$$

约定 $x_i = x(i)$,以 $x = (x_i)$ 表示 X 中的一般元,称 x_i 为 x 的第 i 坐标,称映射 P_i: $X \to X_i, x \to x_i$ 为**投影**. 若 $X_i \equiv Y$,则记 $\prod X_i$ 为 Y^I (Y^I 就是映射 $F: I \to Y$ 的全体). 任给一族映射 $f_i: T \to X_i (i \in I)$,可唯一地确定一个映射

$$f: T \to \prod_i X_i, \quad t \to (f_i(t)), \tag{1.4.2}$$

称 f 为 $f_i (i \in I)$ 的对角线映射,记作 $f = (f_i)$;

(ii) 若 $(X_i, \tau_i) (i \in I)$ 是一族拓扑空间, $X = \prod X_i, \beta = \{P_i^{-1} V: V \in \tau_i, i \in I\}$,则以 β 为拓扑次基在 X 中生成一拓扑 τ,称为**积拓扑**. 称 (X, τ) 为 $X_i (i \in I)$ 的积拓扑空间,简称为**积空间**;

(iii) 若 $X_i (i \in I)$ 是一族 $\mathbb{K}$ 上的向量空间, $X = \prod X_i$,则 X 依运算

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_i + \beta y_i), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}, x, y \in X \tag{1.4.3}$$

是 $\mathbb{K}$ 上的向量空间,称为 $X_i (i \in I)$ 的积向量空间,简称为积空间.

(iv) 若 $X_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的赋范空间, $X = \prod X_i$ 是积向量空间, $\|x\|$ 是

X 上的一个范数,其范数拓扑重合于 X 上的积拓扑,则称 $\|x\|$ 为**积范数**.

今后只要未另作说明,在拓扑空间的积空间中总采用积拓扑,在向量空间的积空间中总采用由式(1.4.3)所定义的线性运算,在赋范空间的积空间中总采用积范数. 积范数总存在. 例如, 可取

$$\|x\| = \sum_i \|x_i\| \quad \text{或} \quad \|x\| = \max_i \|x_i\|,$$

其中, $x = (x_i) \in X$, $\|x_i\|$ 是 $X_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 中的范数. 积范数的具体选定通常并不重要,甚至不必提及.

对于积集与积向量空间,已不必再说什么. 对于积拓扑空间与积赋范空间,则经常需要解答如下基本问题:如果每个"因子空间" X_i 均具有某性质 P,能否断定积空间 $\prod X_i$ 亦具有性质 P?如果回答是肯定的,就说 P 是一个"可乘的"性质. 此问题远不简单,此处无法深入讨论,仅写出某些本书将用到的结论. 不过,首先要解说积拓扑的若干基本特性.

命题 1.4.1　设 $(X_i,\tau_i)(i \in I)$ 是一族拓扑空间,(X,τ) 是其积空间, 则以下结论成立:

(i) 投影 $P_i: X \to X_i(i \in I)$ 均为连续映射且为开映射, 积拓扑 τ 是 X 上使每个 P_i 连续的最小拓扑(鉴于此,积拓扑有弱拓扑之称);

(ii) 设 $\{x^t\} \subset X$ 是一个网,$x \in X$,则

$$x^t \to x \Leftrightarrow x_i^t \to x_i, \ \forall i \in I. \tag{1.4.4}$$

(iii) 设 T 是一个拓扑空间,$f = (f_i)$ 依式(1.4.2),则

$$f \in C(T,X) \Leftrightarrow f_i \in C(T,X_i), \ \forall i \in I. \tag{1.4.5}$$

积拓扑的构成似乎不很简单(你能写出积空间 X 的开集族吗?),但由命题 1.4.1 所陈述的积拓扑性质却十分简单. 尤其是结论(ii)与(iii)可概括为积空间中的收敛与连续分别为依坐标收敛与依坐标连续. 如此简单的结论既直观又便于运用,不能不说是积拓扑的最大优点. 实际上,结论(ii)是积拓扑的本质特征. 这意味着,若 X 中的某个拓扑使得其收敛性符合条件(1.4.4),则该拓扑必为积拓扑. 若 Y 是一拓扑空间, Ω 是任一非空集,$\{f_t\} \subset Y^\Omega$ 是一个网, $f \in Y^\Omega$, 则由结论(ii)有

$$f_t \to f \Leftrightarrow f_t(x) \to f(x), \ \forall x \in \Omega,$$

这意味着 $\{f_t\}$ 在 Ω 上点态收敛于 f. 因此,积拓扑也称为**点态收敛拓扑**.

定理 1.4.1　设 $X = \prod X_i$ 是积拓扑空间. 若每个 $X_i(i \in I)$ 均为 Hausdorff 空间、正则空间、紧空间连通空间,则积空间 X 分别为 Hausdorff 空间、正则空间、紧空间与连通空间.

换言之,Hausdorff 性、正则性、紧性与连通性均是可乘的拓扑性质.

定理 1.4.1 中关于 Hausdorff 性、正则性与连通性的结论是不难证明的. 但关于紧性的结论(通常称为 **Tychonoff 定理**[①])则异常深刻,属于拓扑学的重大成果之列,其证明也是比较困难的,而且本质上依赖于极大原理这种集论公理. 在近代分析中,Tychonoff 定理是重要而不可缺少的.

对于积赋范空间只举出一个结果,其证明是平凡的.

命题 1.4.2　设 $X_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是赋范空间,$X = \prod X_i$ 是积赋范空间,则以下结论成立:

(i) 投影 $P_i: X \to X_i (i \in I)$ 是连续线性映射且为开映射;

(ii) 若定义**嵌入映射**

$$J_i: X_i \to X, \quad x_i \to (0, \cdots, x_i, \cdots, 0), \tag{1.4.6}$$

则 $J_i (i \in I)$ 是线性映射且为拓扑嵌入, X_i 可看成 X 的闭子空间;

(iii) X 是完备(或可分)的 $\Leftrightarrow$ 每个 $X_i (i \in I)$ 是完备(或可分)的.

以上结论与积范数的选择无关.

现在转向商空间,它在风格上与积空间迥然不同.

定义 1.4.2　(i) 设 X 是一非空集,在 X 上定义了一个关系 $x \sim y$,满足以下条件:$x \sim x$(自反性);$x \sim y \Rightarrow y \sim x$(对称性);$x \sim y \sim z \Rightarrow x \sim z$(传递性),则称 $\sim$ 为 X 上的一个等价关系. $\forall x \in X$,令 $\tilde{x} = \{y: y \sim x\}$,称 $\tilde{x}$ 为以 x 为代表元的等价类. 全体等价类组成一集 $\tilde{X}$,称为 X 模 $\sim$ 的**商集**,也记作 $X/\sim$. 等价关系 $\sim$ 决定一个映射

$$P: X \to \tilde{X}, \quad x \to \tilde{x}, \tag{1.4.7}$$

称为**投影**,亦称为自然映射或商映射;

(ii) 若 (X, τ) 是一个拓扑空间, $\sim$ 是 X 上的一个等价关系,$\tilde{X} = X/\sim$, $P: X \to \tilde{X}$ 是投影,令

$$\tilde{\tau} = \{B \subset \tilde{X}: P^{-1}B \in \tau\}, \tag{1.4.8}$$

则 $\tilde{\tau}$ 是 $\tilde{X}$ 上的一个拓扑,称其为**商拓扑**,称$(\tilde{X}, \tilde{\tau})$ 或 $\tilde{X}$ 为 X 的商拓扑空间,简称为**商空间**;

(iii) 若 X 是 $\mathbb{K}$ 上的向量空间,A 是 X 的一个子空间,定义 $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in A (x, y \in X)$,则 $\sim$ 是 X 上的一个等价关系,其商集 $\tilde{X} = X/\sim$ 依运算

$$\alpha \tilde{x} + \beta \tilde{y} = \widetilde{\alpha x + \beta y}, \quad \tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X} \tag{1.4.9}$$

是 $\mathbb{K}$ 上的向量空间,称为 X 模 A 的商向量空间,简称为商空间,记作 X/A;

(iv) 若 X 是 $\mathbb{K}$ 上的赋范空间,A 是 X 的一个闭子空间,$\tilde{X} = X/A$,令

$$\|\tilde{x}\| = \inf\{\|x\|: x \in \tilde{x}\}, \quad \tilde{x} \in \tilde{X}, \tag{1.4.10}$$

---

① Tychonoff 仅证明了 $X_i = [0,1]$ 这种特殊情况,一般情况是 Čech 于 1937 年证明的.

则 $\|\tilde{x}\|$ 是 $\tilde{X}$ 上的一个范数,称为**商范数**,称 $(\tilde{X}, \|\tilde{x}\|)$ 或 $\tilde{X}$ 为 X 的商赋范空间,简称为商空间.

定义 1.4.2 中的一些断语并不能自明,因而需要验证. 例如,要验证依式(1.4.8)所定义的 $\tilde{\tau}$ 确是一个拓扑,运算(1.4.9)合理且满足向量空间的条件,$\|\tilde{x}\|$(依式(1.4.10))确是一个范数. 不过,这些验证并不困难,因而都不必详细写出. 也容易直接由定义 1.4.2 推出以下简单结论:

命题 1.4.3 (i) 设 $\tilde{X} = X/\sim$ 依定义 1.4.2(i),$P: X \to \tilde{X}$ 是投影(下同),则 $\tilde{X}$ 中的不同等价类必互不相交,P 是一满射;

(ii) 设 $(\tilde{X}, \tilde{\tau})$ 依定义 1.4.2(ii),则 $P \in C(X, \tilde{X})$ 且 $\tilde{\tau}$ 是 $\tilde{X}$ 上使 P 连续的最强拓扑;

(iii) 设 $\tilde{X} = X/A$ 依定义 1.4.2(iii),则 $\tilde{x} = x + A$,$P: X \to \tilde{X}$ 是一个线性同态(即线性算子),$N(P) = P^{-1}(\tilde{0}) = A$;

(iv) 设 $\tilde{X} = X/A$ 依定义 1.4.2(iv),则 $\tilde{X}$ 中的范数拓扑恰为商拓扑;$P: X \to \tilde{X}$ 是连续线性映射且为开映射.

商空间颇为奇特之处在于,其中的元素作为等价类是一些集合. 这在逻辑上并无不妥,但从"观感"上说,初看起来似乎略感别扭. 如果认定这是一个缺陷,那么下面的定理有助于消除此缺陷. 借用代数学中的用语,可将下面定理中的结论概称为**同态定理**.

定理 1.4.2 设 $F: X \to Y$ 是一满射,规定 $x \sim y \Leftrightarrow Fx = Fy\ (x, y \in X)$,$\tilde{X} = X/\sim$,$P: X \to \tilde{X}$ 是投影,定义

$$G: \tilde{X} \to Y, \quad Px \to Fx. \tag{1.4.11}$$

(i) $\sim$ 是一等价关系,G 是一双射,它由等式 $G \circ P = F$ 唯一决定;

(ii) 若 X 与 Y 是拓扑空间,F 是**商映射**,即满足条件

$$B \subset Y \text{ 是开集} \Leftrightarrow F^{-1}B \text{ 是开集}, \tag{1.4.12}$$

则 G 是一个同胚;

(iii) 若 X 与 Y 是 $\mathbb{K}$ 上的向量空间,F 为线性同态,则 $N(F) = F^{-1}(0)$ 是 X 的子空间,$\tilde{X} = X/N(F)$,G 是一个线性同构;

(iv) 若 X 与 Y 是 $\mathbb{K}$ 上的赋范空间,F 是连续线性算子且为开映射,则 $N(F)$ 是 X 的闭子空间且 G 是拓扑同构.

在以上 4 种情况下,$\tilde{X}$ 分别作为商集、商拓扑空间、商向量空间与商赋范空间均可用 Y 来代替,这就在形式上使商空间正常化了. 同态定理的意义恰在于此.

证 仅以证结论(ii)为例说明. 任给 $A \subset \tilde{X}$,结合式(1.4.8)与条件(1.4.12)及 $G \circ P = F$ 得出 GA 是开集 $\Leftrightarrow F^{-1}GA$ 是开集 $\Leftrightarrow P^{-1}A$ 是开集 $\Leftrightarrow A$ 是开集,这正表明 G 是同胚. □

定理 1.4.2(i),(iii),(iv)的应用是自明的,不必再作解释(若 X 与 Y 是 Ba-

nach 空间,由将在下节建立的开映射定理,不必验证 F 为开映射). 但应用结论(ii)时验证 F 为商映射可能成为障碍. 在这一点上,下面的命题或许有所帮助.

命题 1.4.4　设 X 与 Y 为拓扑空间,$F: X \to Y$ 是一个连续满射, 则当以下条件之一满足时 F 是商映射:

(i) F 是开映射;

(ii) F 是闭映射;

(iii) X 是紧空间, Y 是 Hausdorff 空间.

若 F 是连续双射,则当以上条件之一满足时 F 是同胚.

证　只要验证条件(1.4.12). 若 $B \subset Y$ 是开集,则由 F 连续推出 $F^{-1}B$ 是开集(由定理 1.1.3). 反之,若 $F^{-1}B$ 是开集,则当 F 是开映射时 $B = FF^{-1}B$ 是开集,当 F 是闭映射时 $B^c = F(F^{-1}B)^c$ 是闭集 (由式(1.1.1)),因而 B 亦为开集. 可见条件(i)与(ii)都推出条件(1.4.12)满足. 若条件(iii)满足,则易见 F 是闭映射. 命题的最后一个结论是明显的. □

由命题 1.4.4 的最后一个结论推出:

推论 1.4.1　设 τ_1 与 τ_2 是 X 上的两个拓扑, (X,τ_1) 是紧空间, (X,τ_2) 是 Hausdorff 空间, $\tau_1 \supset \tau_2$, 则必 $\tau_1 = \tau_2$.

设 $X = \prod X_i$ 是积拓扑空间,前面已提到投影 $P_i(i \in I)$ 均为连续开映射(命题 1.4.1(i)),于是由命题 1.4.4 推出 P_i 是商映射. 这就得出如下有趣的结论:因子空间 X_i 是积空间 $X = \prod X_i$ 的商空间. 特别地,若 $X = A \times B$,则 A 是 X 的商空间,它似乎是由"X 除以 B 所得的商". 这样,积与商在字面上的关联就得到了某种自然诠释. 这一事实是颇具启发性的.

对于商空间亦可提出类似于积空间的问题:若 X 具有某个性质 P, X 的商空间 $\tilde{X}$ 是否亦有性质 P?如果答案总是肯定的,就说 P 是一个"可除" 性质. 下面就是一个关于可除性质的结果.

命题 1.4.5　设 X 是紧(或连通) 拓扑空间,则 X 的任何商空间都是紧(或连通) 空间. 换言之,紧性与连通性是可除的拓扑性质.

形式上,以上结论可与定理 1.4.1 对照. 命题 1.4.5 的证明是平凡的.

以下结论可与命题 1.4.2 对照,但它似乎更深刻些.

命题 1.4.6　设 X 是一赋范空间, A 是 X 的闭子空间. 若 X 是完备(或可分) 的,则商空间 $\tilde{X} = X/A$ 亦是完备(或可分) 的.

证　只考虑完备性(可分性是明显的),设 $\{\tilde{x}_n\} \subset \tilde{X}$ 是一 Cauchy 序列,不妨设 $\|\tilde{x}_{n+1} - \tilde{x}_n\| < 2^{-n}(n \in \mathbb{N})$. 任取 $y_1 \in \tilde{x}_1$, 由式(1.4.10),有 $y_2 \in \tilde{x}_2$,使 $\|y_2 - y_1\| < 1$;类似地有 $y_3 \in \tilde{x}_3$,使 $\|y_3 - y_2\| < 1/2, \cdots$,一般地,有 $y_n \in \tilde{x}_n$,使 $\|y_n - y_{n-1}\| < 2^{2-n}(n \geqslant 2)$. 这就得到 X 中的 Cauchy 序列 $\{y_n\}$. 设 $y_n \to y \in X$,则 $\tilde{x}_n \to$

$\tilde{y} \in \tilde{X}$. 可见 $\tilde{X}$ 完备. □

至此,我们已考虑了抽象空间的"积运算"与"商运算". 下面考虑赋范空间的"和运算". 不过,本质上它只是"积运算"的一种特殊应用. 首先,回顾一下线性代数中的直和概念. 设 $X_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是向量空间 X 的子空间. 若每个 $x \in X$ 有唯一分解 $x = \sum x_i, x_i \in X_i(1 \leqslant i \leqslant n)$,则说 X 是 X_i 的直和,写作

$$X = \bigoplus_i X_i = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n.$$

直接看出

$$\prod_i X_i \to \bigoplus_i X_i, \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \to \sum_i x_i \tag{1.4.13}$$

是线性同构. 若 X 是赋范空间, 而映射(1.4.13)为拓扑同构,则说 $\bigoplus_i X_i$ 是**拓扑直和**. 在什么情况下直和成为拓扑直和,是经常遇到且未必容易判定的问题. 下面的结果可能有助于解决此问题.

定理 1.4.3 设 X 是一赋范空间, A, B 是 X 的子空间, $X = A \oplus B$, $P: a + b \to a$, $Q: a + b \to b(a \in A, b \in B)$.

(i) 充要条件: $A \oplus B$ 是拓扑直和 $\Leftrightarrow P$ 与 Q 均连续;

(ii) 必要条件:若 $A \oplus B$ 是拓扑直和,则 A 与 B 均为 X 的闭子空间且 $X/A \cong B$(拓扑同构);

(iii) 充分条件:若 A 是闭子空间, $\dim B < \infty$,则 $A \oplus B$ 是拓扑直和;

(iv) 充分条件:若 X 完备, A, B 是闭子空间,则 $A \oplus B$ 是拓扑直和.

证 (i)是明显的. (iv)可由逆算子定理推出(见定理 1.5.1),此处不作考虑.

(ii) 不妨就写 $X = A \times B$,因而 A, B 为 X 的闭子空间(命题1.4.2(ii)). 因 $Q: X \to B$ 是连续线性开映射且为满射, $N(Q) = A$, 故由定理1.4.2(iv)推出 $X/A \cong B$(拓扑同构).

(iii) 设 $\pi: X \to X/A$ 为投影. 因 $Q: X \to B$ 是线性满射, 故由定理1.4.2(iii)推出 $G: X/A \to B$ 为线性同构, G 决定于 $G \circ \pi = Q$. 因 $\dim B < \infty$, 故 G 必连续,因而 Q 与 $P = I - Q$ 均连续,于是 $A \oplus B$ 是拓扑直和. □

定理中的映射 P, Q 也称为投影,因 $P + Q = I$,故 P 与 Q 相互唯一确定.

定义 1.4.3 设 X 是一向量空间, A 是 X 的真子空间. 若除 A 与 X 之外 X 中不再有包含 A 的子空间,则称 A 为**极大子空间**, 极大子空间的平移象称为**超平面**.

定理 1.4.4 设 X 是 $\mathbb{K}$ 上的赋范空间, A 是 X 的闭子空间, 则以下条件互相等价:

(i) A 是极大子空间;

(ii) $X/A \cong \mathbb{K}$(拓扑同构);

(iii) 存在非零(即不恒为零)连续线性泛函 $f: X \to \mathbb{K}$, 使得 $A = N(f)$.

证 (i)⇒(ii) 设 A 是极大子空间. 取 $x_0 \in A^c$, 则 $\mathbb{K}x_0$ 是 x_0 生成的一维子空

间，$A\cap\mathbb{K}x_0=\{0\}$. 令$B=A\oplus\mathbb{K}x_0$，则$A\subset B\neq A$，故必$B=X$. 由定理1.4.3(iii)，$X=A\oplus\mathbb{K}x_0$是拓扑直和，于是$X/A\cong\mathbb{K}x_0\cong\mathbb{K}$（拓扑同构，由定理1.4.3(ii)）.

(ii)⇒(iii)　设$\varphi: X/A\cong\mathbb{K}$(拓扑同构)，$P: X\to X/A$是投影，则$F=\varphi\circ P: X\to\mathbb{K}$是连续线性泛函，$N(f)=A$.

(iii)⇒(i)　设f如条件(iii)，取$x_0\in A^c$，则$f(x_0)\neq 0$，从分解

$$x=\left[x-\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0\right]+\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0,\quad x\in X$$

看出$X=A\oplus\mathbb{K}x_0$，这表明A是极大子空间. □

推论1.4.2　设X是赋范空间，$A\subset X$为闭集. 则A是超平面⇔存在X上的非零连续线性泛函f与常数c，使得$A=f^{-1}(c)$.

上述的A也写作$\{f=c\}$，$f(x)=c$可看成超平面的方程. 当$X=\mathbb{R}^3$时就是通常的平面方程.

1.5　线 性 算 子

向量空间之间的线性算子，与线性映射、线性同态、线性变换等都被看成同义语. 线性算子一词本身并不涉及空间的拓扑结构，它完全属于线性代数. 线性算子对于分析学的重要性首先在于，许多分析运算（如微分、积分、Fourier 变换等）自然地以线性算子的形式出现. 其次，即使经典分析也已显示出，考虑非线性问题的线性近似，是一个有普遍价值的有效方法，而处理线性近似问题自然离不开线性算子. 此外，即使对于抽象空间自身的研究，线性算子也是不可缺少的工具. 你必定已注意到，在前两节中，实际上已不经意地使用过线性算子，只是未加系统地考虑罢了.

本节中设X,Y,Z等是给定的赋范空间或LCS. 此处及今后都遵循如下总约定：同时提到多个向量空间时，总假定它们有同一基域$\mathbb{K}$，未直接提到$\mathbb{K}$时意味着所作的讨论与$\mathbb{K}$的选择并无关系. 给定线性算子$T: X\to Y$，称$N(T)=T^{-1}(0)$为T的零空间或核，$R(T)=TX$则是T的值域. $R(T)$与$N(T)$分别是Y与X的子空间. 任给集$A,B\subset X$，$\alpha\in\mathbb{K}$，$x_0\in X$，显然有

$$T(A+B)=TA+TB,\quad T(x_0+B)=Tx_0+TB,$$
$$T(\alpha A)=\alpha TA,\quad T(\mathbb{K}x_0)=\mathbb{K}Tx_0.$$

线性算子一旦与某种极限过程结合起来，就从线性代数跨入了分析学. 分析学并不限于使用连续线性算子，但最优先考虑的无疑正是连续线性算子. 约定以$L(X,Y)$记从X到Y的连续线性算子的全体，它依自然的线性运算构成一个向量空间，约定$L(X)=L(X,X)$. 任给$T\in L(X,Y)$，$S\in L(Y,Z)$，可定义“乘积”$ST\in L(X,Z)$，它就是S与T的复合. $L(X)$依算子乘法是封闭的，且以单位算子I为乘法

单位元. 任给线性算子 $T: X \to Y$, T 连续 $\Leftrightarrow T$ 在 $x = 0$ 连续 $\Leftrightarrow T$ 在任一点 $x_0 \in X$ 连续,这一事实可用来简化连续性的判定. T 是线性算子意味着

$$T\Big(\sum_i \alpha_i x_i\Big) = \sum_i \alpha_i T x_i,$$

其中, $\sum \alpha_i x_i$ 是 X 中任意有限个元的线性组合. 若 T 是连续的,则以上等式亦适合于 $\sum \alpha_i x_i$ 是**收敛**无穷级数的情况.

任给线性算子 $T: X \to Y$,现在给出 T 连续的条件. 首先设 X 与 Y 是赋范空间,则 $T \in L(X,Y)$ 的充要条件是

$$\| Tx \| \leqslant \text{const} \ \| x \|, \quad x \in X. \tag{1.5.1}$$

这又等价于 T 映有界集为有界集,或等价于 T 映 X 中的单位球为有界集,即

$$\| T \| \triangleq \sup_{\| x \| \leqslant 1} \| Tx \| < \infty.$$

因此也称这样的 T 为**有界线性算子**. 如上的 $\| T \|$ 称为 T 的**算子范数**,可验证它确是 $L(X,Y)$ 上的一个范数,因而使 $L(X,Y)$ 成为一个赋范空间. 当 Y 完备时 $L(X,Y)$ 是一个 Banach 空间. 算子范数 $\| T \|$ 可等价地表成

$$\begin{aligned} \| T \| &= \sup_{\| x \| \leqslant 1} \| Tx \| = \sup_{\| x \| = 1} \| Tx \| = \sup_{x \neq 0} \| Tx \| / \| x \| \\ &= \inf\{k > 0: \| Tx \| \leqslant k \| x \|, \ \forall x \in X\}. \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

从分析学的角度看, 式(1.5.2)最右端的表达式最有意义,它表明

$$\| Tx \| \leqslant \| T \| \ \| x \|, \quad \forall x \in X \tag{1.5.3}$$

或等价地

$$\| Tx - Ty \| \leqslant \| T \| \ \| x - y \|, \quad x, y \in X. \tag{1.5.4}$$

式(1.5.4)给出 $\| Tx - Ty \|$ 的一个特别简单的估计,而且这一估计是最佳的,即不能以更小的系数 k 取代 $\| T \|$ 而保持式(1.5.4)恒成立. 这样的结果正是分析学所看重的. 当然,准确地求出算子范数 $\| T \|$ 并非易事, 但即使仅得到某种估计 $\| T \| \leqslant k$,不等式(1.5.4) 也是有价值的. 对于分析学中自然地产生的一些线性算子 T,计算或估计 $\| T \|$ 常常是值得专门探讨的重要课题,本书将有机会接触到这一类问题.

其次, 设 X, Y 是 LCS, X 与 Y 中的拓扑分别由半范族 $\{ \| x \|_i : i \in I\}$ 与 $\{ \| y \|_j : j \in J\}$ 导出,则线性算子 $T: X \to Y$ 连续的充要条件是

$$\forall j \in J, \exists \{i_1, i_2, \cdots, i_n\} \subset I, \text{使} \ \| Tx \|_j \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} C \| x \|_{i_k}, \tag{1.5.5}$$

其中, 常数 C 与 x 无关. 若 $\{ \| x \|_i \}$ 是基本半范族,则条件(1.5.5)可简化为

$$\forall j \in J, \exists i \in I, C > 0: \| Tx \|_j \leqslant C \| x \|_i, \quad \forall x \in X. \tag{1.5.6}$$

若进而设 Y 是赋范空间,则条件(1.5.6)可再简化为

$$\exists i \in I, C > 0: \| Tx \| \leqslant C \| x \|_i, \quad \forall x \in X. \tag{1.5.7}$$

条件(1.5.5) ~ (1.5.7)都可看成条件(1.5.1)的推广.

下面介绍关于线性算子的几个基本定理，它们都与 Baire 纲定理有关，因而都要用到某种完备性假设.

定理 1.5.1(开映射定理) 设 X 与 Y 是 F 空间，$T \in L(X,Y)$，$R(T)$ 是 Y 中的第二纲集，则 T 是开映射且 $R(T) = Y$. 特别地，若 $T: X \to Y$ 是连续的线性同构，则它必为拓扑同构(后一断语通常称为**逆算子定理**).

证 仅就 X 与 Y 为 Banach 空间的情况证明. 约定 $B_r = B_r(0)\ (r > 0)$. 因 $X = \bigcup_n nB_r$，$R(T) = \bigcup_n nTB_r$ 是第二纲集，故 TB_r 必非疏集，因而 $\overline{TB_r}$ 含有某个球 $B_{4\rho}(a)\ (a \in Y, \rho > 0)$. 这推出

$$B_{4\rho}(0) = B_{4\rho}(a) - a \subset \overline{TB_r} - \overline{TB_r} \subset \overline{TB_{2r}}\ . \tag{1.5.8}$$

今证 $\overline{TB_r} \subset TB_{2r}$. 取定 $y \in \overline{TB_r}$. 由 $B_\rho(y) \cap TB_r \neq \varnothing$ 推出存在 $x_1 \in B_r$，使得 $Tx_1 \in B_\rho(y)$，从而 $y - Tx_1 \in \overline{TB_{r/2}}$(由式(1.5.8)). 同理，有 $x_2 \in B_{r/2}$，使得 $y - Tx_1 - Tx_2 \in \overline{TB_{r/4}}$，…. 一般地，有 $x_n \in B_{r2^{1-n}}$，使得 $y - \sum_1^n Tx_i \in \overline{TB_{r2^{-n}}}\ (n \in \mathbb{N})$. 这得出 $x \triangleq \sum_1^\infty x_n \in B_{2r}$，$y = Tx \in TB_{2r}$.

任给开集 $V \subset X$，$x \in V$，不妨设 $B_r(x) \subset V$，则

$$B_\rho(Tx) = Tx + B_\rho(0) \subset Tx + \overline{TB_{r/2}} \subset Tx + TB_r \subset TV, \tag{1.5.9}$$

其中用了式(1.5.8)与 $\overline{TB_{r/2}} \subset TB_r$. 可见 $Tx \in (TV)^\circ$，因而 TV 是开集，T 是开映射得证. 在式(1.5.9) 中取 $V = X$，$x = 0$ 得 $B_\rho(0) \subset R(T)$，因而 $Y = \bigcup_n nB_\rho(0) = R(T)$. □

推论 1.5.1 设 X 与 Y 是 F 空间，线性算子 $T: X \to Y$ 满足条件

$$x_n \to x, Tx_n \to y \Rightarrow Tx = y, \tag{1.5.10}$$

则 $T \in L(X,Y)$.

条件(1.5.10)意味着 T 的图形 $G = \{(x,Tx): x \in X\}$ 是闭集，因而通常称推论 1.5.1 为**闭图像定理**.

证 亦只考虑 X 与 Y 为 Banach 空间的情况. 定义

$$A: G \to X, \quad (x,Tx) \to x,$$

则 A 显然为连续的线性同构. 因 G 作为 Banach 空间 $X \times Y$ (由命题 1.4.2(iii))的闭子空间是 Banach 空间，故可用逆算子定理推出 A^{-1} 连续，而由此显然推出 T 连续. □

本书将有多次机会应用闭图像定理来判定线性算子的连续性，此处不妨简单分析一下此方法优势何在. 设在 X 与 Y 中有另一种较弱的收敛性，不妨用记号 $\xrightarrow{w}$，且已知 T 依 $\xrightarrow{w}$ 连续，则从 $x_n \to x$，$Tx_n \to y$ 推出 $x_n \xrightarrow{w} x$，$Tx_n \xrightarrow{w} Tx$，$Tx_n \xrightarrow{w} y$，这就得出 $Tx = y$，因而条件(1.5.10) 得验. 由此可见，应用闭图像定理的技巧，原不过是在 X 与 Y 中选择适当的弱收敛使 T 连续的技巧.

现在转向线性算子理论中的另一个基本定理:**一致有界原理**或共鸣定理.

定理 1.5.2 设 X 是 Banach 空间, Y 是赋范空间, $\{T_i: i \in I\} \subset L(X,Y)$,

$$A = \{x \in X: \sup_i \|T_i x\| < \infty\}. \tag{1.5.11}$$

(i) 若 A 是第二纲集,则 $\sup_i \|T_i\| < \infty$. 特别当 $A = X$ 时 $\sup_i \|T_i\| < \infty$;

(ii) 若 $\sup_i \|T_i\| = \infty$,则 A^c 是第二纲集且为稠密 G_δ 集.

证 显然只需证结论(i). 令 $A_n = \{X: \sup_i \|T_i x\| \leqslant n\}$,则 $A_n = \bigcap_i T_i^{-1}\bar{B}_n(0)$ 为闭集, $A = \bigcup_1^\infty A_n$. 由 A 是第二纲集推出某个 A_n 包含一个闭球 $\bar{B}_r(a)$ $(a \in X, r > 0)$. $\forall x \in X, i \in I$,若 $\|x\| = 1$,则由 $\bar{B}_r(a) \subset A_n$ 推出

$$\begin{aligned}\|T_i x\| &= r^{-1}\|T_i(a + rx) - T_i a\| \\ &\leqslant r^{-1}[\|T_i(a + rx)\| + \|T_i a\|] \leqslant 2n/r,\end{aligned}$$

这得出 $\|T_i\| \leqslant 2n/r$ $(\forall i \in I)$,因而 $\sup_i \|T_i\| < \infty$. □

一致有界原理有两类不同的用法. 其一是套用它的某些标准推论,在下节中将给出这样的推论. 对这类用法不必再解释. 其二是依据特定问题构成适当的算子族 $\{T_i\}$,使得 $\sup \|T_i\| = \infty$,然后应用定理 1.5.2(ii). 这种用法无一定规则可循,颇具技巧性. 本书后面将有这类应用的有趣例子.

定理 1.5.3 设 X 是赋范空间, D 是 X 的稠密子空间, Y 是 Banach 空间, $T \in L(D,Y)$. 则 T 有唯一扩张 $\bar{T} \in L(X,Y)$ 且 $\|T\| = \|\bar{T}\|$. 若 $\|Tx\| = \alpha\|x\|$ $(\forall x \in D)$, α 是正常数, 则 $\|\bar{T}x\| = \alpha\|x\|$ $(\forall x \in X)$; 当 X 完备且 $\overline{R(T)} = Y$ 时, $\bar{T}: X \to Y$ 为同构.

证 任给 $x \in X$,取序列 $\{x_n\} \subset D$,使得 $x_n \to x$. 因

$$\|Tx_m - Tx_n\| \leqslant \|T\|\|x_m - x_n\| \to 0, \quad m,n \to \infty,$$

故 $\{Tx_n\}$ 是 Y 中的 Cauchy 序列. 由完备性,必 $Tx_n \to y \in Y$. 若 $\{z_n\} \subset D$ 亦满足 $z_n \to x$,则由

$$\|Tx_n - Tz_n\| \leqslant \|T\|\|x_n - z_n\| \to 0, \quad n \to \infty$$

推出 $Tz_n \to y$. 可见 y 与 $\{x_n\}$ 的选择无关. 令 $\bar{T}x = y$,则 $\bar{T}: X \to Y$ 已合理定义. 直接看出 $\bar{T}$ 是线性的且 $\bar{T}|D = T$. 若 $\{x_n\} \subset D, x_n \to x$,则

$$\|\bar{T}x\| = \lim_n \|Tx_n\| \leqslant \lim_n \|T\|\|x_n\| = \|T\|\|x\|,$$

这推出 $\bar{T} \in L(X,Y)$ 且 $\|\bar{T}\| \leqslant \|T\|$. 另一方面, 显然 $\|\bar{T}\| \geqslant \|T\|$, 故 $\|\bar{T}\| = \|T\|$. 定理的后一结论是明显的. □

今后只要定理 1.5.3 的条件满足,就直接认定 $T \in L(X,Y)$.

定义 1.5.1 设 X 与 Y 是赋范空间, $T: X \to Y$ 是一线性算子. 若 T 映有界集为相对紧性,则称 T 为**紧线性算子**.

以 $CL(X,Y)$ 记从 X 到 Y 的紧线性算子之全体,约定 $CL(X) = CL(X,X)$. 因有限维空间中有界集即相对紧性,故当 X 与 Y 之一为有限维空间时,有 $CL(X,Y) = L(X,Y)$. 可见,仅当 X 与 Y 均为无限维空间时,紧线性算子概念才有实质意义. 若 $T \in CL(X,Y), A \in L(Y,Z), B \in L(Z,X)$,则 AT 与 TB 均为紧算子, $I = I_X \in CL(X) \Leftrightarrow \dim X < \infty$(由定理 1.3.9). 在许多方面,紧线性算子类似于有限维空间中的线性算子.

定理 1.5.4　设 X 是赋范空间, Y 是 Banach 空间,则 $CL(X,Y)$ 是 $L(X,Y)$ 的闭子空间,因而亦是 Banach 空间.

证　设 $T \in L(X,Y)$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists T_\varepsilon \in CL(X,Y)$,使 $\| T_\varepsilon - T \| < \varepsilon$,今证 $T \in CL(X,Y)$. 设 $B \triangleq B_1(0) \subset X$,只要证 TB 相对紧;为此又只要证 TB 全有界(由定理 1.3.2). 因 $T_\varepsilon B$ 全有界,故有有限集 $F \subset Y$,使得 $T_\varepsilon B \subset F + B_\varepsilon(0)$, $B_\varepsilon(0)$ 是 Y 中的球. 于是

$$\begin{aligned} TB &\subset (T - T_\varepsilon)(B) + T_\varepsilon B \\ &\subset B_\varepsilon(0) + F + B_\varepsilon(0) \subset F + B_{2\varepsilon}(0), \end{aligned}$$

这正表明 TB 全有界,如所要证.　□

关于线性算子的概念与结论,可部分地作某种“n 重”推广.

首先设 $X_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 与 Y 是向量空间. 若一个算子

$$T: \prod_i X_i \to Y, \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \to T(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

分别对每个变元 x_i 是线性的,则称 T 为 n 重线性算子. 二重线性算子也称为双线性算子. 为便于与连乘积类比,约定将 $T(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 写作 $Tx_1x_2\cdots x_n$;而当 $X_i \equiv X (1 \leqslant i \leqslant n)$ 时就将 $Txx\cdots x$ 写作 Tx^n. 这就在形式上凸显了 n 重线性算子与 n 次幂函数的类似性,这种类比常常具有启示意义.

若 $X_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 与 Y 均为 LCS,则以 $L(X_1, \cdots, X_n; Y)$ 记从 $\prod X_i$ 到 Y 的连续 n 重线性算子之全体,它依自然的运算成为一个向量空间. 若 $X_i = X (1 \leqslant i \leqslant n)$,则记 $L(X_1, \cdots, X_n; Y)$ 为 $L^n(X,Y)$,当 $n = 1$ 时它就是 $L(X,Y)$. 若 $Tx_1x_2\cdots x_n$ 与变元的顺序无关,就说 T 是对称的. $L^n(X,Y)$ 中的对称算子构成一个向量子空间,记作 $L_s^n(X,Y)$. 若 $X_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 与 Y 均为赋范空间, $T: \prod X_i \to Y$ 是一个 n 重线性算子,则 T 连续的条件是(对照式(1.5.1)).

$$\| Tx_1x_2\cdots x_n \| \leqslant \text{const} \| x_1 \| \| x_2 \| \cdots \| x_n \|, \quad x_i \in X_i, 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{1.5.12}$$

当以上条件满足时也称 T 为有界 n 重线性算子,并定义其算子范数为

$$\| T \| = \sup_{\| x_1 \| \leqslant 1, \cdots, \| x_n \| \leqslant 1} \| Tx_1x_2\cdots x_n \|.$$

空间 $L(X_1, \cdots, X_n; Y)$ 依如上的算子范数是一个赋范空间,当 Y 完备时它是一个 Banach 空间. 亦可写出类似于式(1.5.2)与式(1.5.3)的式子

$$\|T\| = \sup_{\|x_1\| = \cdots = \|x_n\| = 1} \|Tx_1x_2\cdots x_n\|$$
$$= \inf\{k > 0: \|Tx_1x_2\cdots x_n\| \leqslant k\|x_1\|\cdots\|x_n\|, x_i \in X_i, 1 \leqslant i \leqslant n\},\tag{1.5.13}$$

$$\|Tx_1x_2\cdots x_n\| \leqslant \|T\|\ \|x_1\|\ \|x_2\|\cdots\|x_n\|,\tag{1.5.14}$$

其中,$x_i \in X_i(1 \leqslant i \leqslant n)$. 若 $T \in L^n(X,Y)$,则由式(1.5.14)推出

$$\|Tx^n\| \leqslant \|T\|\ \|x\|^n, \quad x \in X.\tag{1.5.15}$$

设 X,Y,Z 为 LCS, $\{\|x\|_i: i \in I\}$ 与 $\{\|y\|_j: j \in J\}$ 分别为 X 与 Y 中的基本半范族, $\{\|z\|_k: k \in K\}$ 是导出 Z 中拓扑的一个半范族, $T: X\times Y \to Z$ 是一个双线性算子, 则 T 连续的充要条件是

$$\begin{cases} \forall k \in K, \exists i \in I, j \in J, \exists C > 0, \\ \forall x \in X, y \in Y, 有\ \|Txy\|_k \leqslant C\|x\|_i\|y\|_j. \end{cases}\tag{1.5.16}$$

显然,此条件正是条件(1.5.6)与式(1.5.12)(取 $n = 2$)的推广.

通常的经验是分别对各变元连续的多元函数未必是连续的. 但 n 重线性算子毕竟是一种特殊的 n 元函数,它的连续性可由较弱的条件推出.

定理1.5.5 设 X,Y,Z 是赋范空间,X 与 Y 之一完备,双线性算子 $T(x,y)$: $X\times Y \to Z$ 分别对 x 与 y 连续,则 T 连续.

证 不妨设 X 是完备的,设在 $X\times Y$ 中 $(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)$,今要证 $T(x_n,y_n)\to T(x_0,y_0)(n\to\infty)$. 令 $T_n = T(\cdot,y_n)$,则 $T_n \in L(X,Z)(n \in \mathbb{N})$. 由

$$\sup_n \|T_nx\| = \sup_n \|T(x,y_n)\| < \infty, \quad \forall x \in X,$$

推出 $\beta \triangleq \sup_n \|T_n\| < \infty$(由定理1.5.2). 于是

$$\begin{aligned} &\|T(x_n,y_n) - T(x_0,y_0)\| \\ \leqslant\ &\|T(x_n,y_n) - T(x_0,y_n)\| + \|T(x_0,y_n) - T(x_0,y_0)\| \\ \leqslant\ &\beta\|x_n - x_0\| + \|T(x_0,y_n - y_0)\| \to 0, \quad n\to\infty. \end{aligned}$$ □

更一般的结果是

定理1.5.6 设 $X_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是 Banach 空间, Y 是赋范空间, n 重线性算子 $T: \prod X_i \to Y$ 分别对各变元连续,则 T 连续.

设 $X_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 与 Y 是赋范空间. 有时需要考虑(如在微分理论中)形如

$$T \in L(X_1, L(X_2, \cdots, L(X_n, Y), \cdots))$$

的线性算子. 任取 $x_i \in X_i(1 \leqslant i \leqslant n)$,令

$$\tilde{T}x_1x_2\cdots x_n = (\cdots((Tx_1)x_2)\cdots)x_n,\tag{1.5.17}$$

则易验证 $\tilde{T} \in L(X_1,\cdots,X_n;Y)$ 且 $\|\tilde{T}\| \leqslant \|T\|$. 实际上有如下更准确的结果:

命题1.5.1 设 $X_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 与 Y 是赋范空间,则

$$L(X_1, L(X_2, \cdots, L(X_n, Y), \cdots)) \to L(X_1,\cdots,X_n;Y), \quad T \to \tilde{T}$$

是一个等距同构,其中,$\tilde{T}$ 依式(1.5.17).

命题 1.5.1 为用 $\tilde{T}$ 取代 T 提供了依据. 从形式上看,$\tilde{T}$ 显然要简单得多. 在下章中将用到这一结果,而且在记号上对 T 与 $\tilde{T}$ 也不加区别.

1.6 对偶空间

设 X 是 $\mathbb{K}$ 上的 LCS,令 $X^* = L(X,\mathbb{K})$,称它为 X 的**对偶空间**,称每个 $f \in X^*$ 为 X 上的连续线性泛函(或有界线性泛函,若 X 是赋范空间). 空间 X^* 因其与 X 的对偶关系,对于空间 X 本身及与之有关的种种问题的研究,将起特殊作用. 因此本节的主要关注点是整个空间 X^*,而不是个别的连续线性泛函.

线性泛函是线性算子的特殊情况,自然可移植上节中的一些结论. 设 X 是赋范空间,则一个线性泛函 $f: X \to \mathbb{K}$ 连续的充要条件是(由式(1.5.1))

$$|f(x)| \leqslant \text{const} \; \|x\|, \quad x \in X. \tag{1.6.1}$$

X^* 是一个 Banach 空间, 对于 $f \in X^*$,范数 $\|f\|$ 可表成(由式(1.5.2))

$$\begin{aligned}\|f\| &= \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{x \neq 0} |f(x)| / \|x\| \\ &= \inf\{k > 0 : |f(x)| \leqslant k\|x\| \; (\forall x \in X)\}.\end{aligned} \tag{1.6.2}$$

若 X 是 LCS,其拓扑由半范族 $\{\|X\|_i : i \in I\}$ 导出,f 是 X 上的一个线性泛函,则对应于式(1.5.5) 与式(1.5.7) 的连续性条件可分别写成

$$\exists \{i_1, i_2, \cdots, i_n\} \subset I, C > 0: |f(x)| \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} C\|x\|_{i_k}, \quad \forall x \in X, \tag{1.6.3}$$

$$\exists i \in I, C > 0: |f(x)| \leqslant C\|x\|_i, \quad \forall x \in X. \tag{1.6.4}$$

后者适用于 $\{\|x\|_i\}$ 为基本半范族的情况.

关于对偶空间 X^* 的首要问题是:它是否含有足够多的成员? 此问题的重要性初看起来似乎并不明显. 但随着研究的展开,逐渐显示出它关系到一系列重大问题的解决. 因此,回答上述问题的 **Hahn-Banach 定理**在本节中将处于中心地位. Hahn-Banach 定理其实包括密切联系在一起的一系列结果, 将这些结果分为两组, 分别解决一定线性泛函的扩张与存在性问题,前者处于更基本的地位.

定理 1.6.1 设 X 是 $\mathbb{K}$ 上的向量空间, A 是 X 的子空间, f 是 A 上的线性泛函.

(i) 若 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,$f(x) \leqslant p(x)$ $(x \in A)$,$p(x)$ 是 X 上的 **次线性泛函**,即满足条件对任给 $\alpha > 0, x, y \in X$ 有

$$p(\alpha x) = \alpha p(x), \quad p(x+y) \leqslant p(x) + p(y), \tag{1.6.5}$$

则 f 可扩张为 X 上的线性泛函 g,使得 $g(x) \leqslant p(x)$ $(\forall x \in X)$;

(ii) 若 X 是 LCS, $f \in A^*$,则 f 有一个扩张 $g \in X^*$;

(iii) 若 X 是赋范空间, $f \in A^*$,则 f 有一个**保范扩张** $g \in X^*$,保范意味着

$$\|g\| = \|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in A, \|x\| \leqslant 1\}.$$

证 (i) 考虑二元组 (B,g):B 是 X 的子空间,g 是 B 上的线性泛函,$g|A=f$, $g(x)\leqslant p(x)(\forall x\in B)$. 以 M 记此种二元组之全体,它依自然的包含成一半序集. 对 M 应用极大原理得出一极大元 (B,g),只要证 $B=X$. 用反证法. 设存在 $a\in B^c$. 由 $g(x)\leqslant p(x)(x\in B)$ 与条件(1.6.5) 推出:存在 $r\in\mathbb{R}$,使得

$$g(y)-p(y-a)\leqslant r\leqslant p(x+a)-g(x),\quad x,y\in B. \tag{1.6.6}$$

令 $Y=B\oplus\mathbb{R}a, h(x+\lambda a)=g(x)+\lambda r(x\in B,\lambda\in\mathbb{R})$,则 h 是 Y 上的一个线性泛函,$h|B=g$. 分别考虑 $\lambda>0$ 与 $\lambda<0$,利用不等式(1.6.6) 可验证 $h(y)\leqslant p(y)(\forall y\in Y)$. 于是 $(Y,h)\in M$,而这与 (B,g) 的极大性矛盾.

(ii) 首先设 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. 取 X 的一个基本半范族 $\{\|x\|_i\}$,取定 i,使对于 $x\in A$ 不等式(1.6.4) 满足. 令 $p(x)=C\|x\|_i$,则 $p(x)$ 是 X 上的次线性泛函. 由已证的结论(i),f 可扩张为 X 上的线性泛函 g,使得 $g(x)\leqslant p(x)(\forall x\in X)$. 因 $-g(x)=g(-x)\leqslant p(-x)=p(x)(x\in X)$,故 $|g(x)|\leqslant p(x)=C\|x\|_i(\forall x\in X)$,这表明 $g\in X^*$. 其次设 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. 关键是注意到此时有 $f(x)=u(x)-\mathrm{i}u(\mathrm{i}x)(x\in A)$,其中,$u=\mathrm{Re}f$. 利用 $f(\mathrm{i}x)=\mathrm{i}f(x)$ 易验证以上等式. 将 u 扩张为 X 上的实连续线性泛函 φ,令 $g(x)=\varphi(x)-\mathrm{i}\varphi(\mathrm{i}x)(x\in X)$,则 g 连续,$\forall x\in A$ 有 $g(x)=f(x)$; $\forall x\in X$,有 $g(\mathrm{i}x)=\mathrm{i}g(x)$,由此易验证 g 是 X 上的复线性泛函,故 $g\in X^*$.

(iii) 不妨设 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. 令 $u=\mathrm{Re}f$,将 u 扩张为 X 上的实连续线性泛函 φ,使得 $\varphi(x)\leqslant p(x)\triangleq\|f\|\,\|x\|(x\in X)$. 令 $g(x)=\varphi(x)-\mathrm{i}\varphi(\mathrm{i}x)$,则如上段之证,有 $g|A=f$,g 是 X 上的复线性泛函. $\forall x\in X$,有 $\varepsilon\in\mathbb{C}$,$|\varepsilon|=1$,使得

$$|g(x)|=\varepsilon g(x)=g(\varepsilon x)=\varphi(\varepsilon x)\leqslant\|f\|\,\|x\|,$$

这得出 $\|g\|\leqslant\|f\|$,从而 $\|g\|=\|f\|$. 故 g 是 f 的保范扩张. □

利用已证明的扩张定理,可证如下存在定理:

定理 1.6.2 设 A 是 X 的闭子空间,$x_0\in A^c$.

(i) 若 X 是 LCS,则存在 $f\in X^*$,使 $f(A)=0$,$f(x_0)\neq0$. 特别地,取 $A=\{0\}$ 得出:若 $0\neq x_0\in X$,则存在 $f\in X^*$ 使 $f(x_0)\neq0$;

(ii) 若 X 是赋范空间,$\rho=d(x_0,A)$,则存在 $f\in X^*$,使 $f(A)=0$,$f(x_0)=\rho$, $\|f\|=1$. 特别地,取 $A=\{0\}$ 得出:若 $0\neq x_0\in X$,则存在 $f\in X^*$,使 $f(x_0)=\|x_0\|$,$\|f\|=1$.

证 只要证(ii),以半范代替范数类似地可证(i). 令 $B=A\oplus\mathbb{K}x_0$,

$$f(a+\lambda x_0)=\lambda\rho,\quad a\in A,\lambda\in\mathbb{K},$$

则 f 是 B 上的线性泛函. 显然 $f(A)=0$,$f(x_0)=\rho$. 由式(1.6.2) 有

$$\|f\|=\sup_{0\neq x\in B}\frac{|f(x)|}{\|x\|}=\sup_{a\in A,0\neq\lambda\in\mathbb{K}}\frac{|\lambda|\rho}{\|a+\lambda x_0\|}$$

$$=\sup_{a\in A,0\neq\lambda\in\mathbb{K}}\frac{\rho}{\|x_0+\lambda^{-1}a\|}=\frac{\rho}{d(x_0,A)}=1,$$

其中，用到$\rho > 0$. 然后应用定理1.6.1(iii)，即得所要证. □

由定理1.6.2立得以下推论，它看似简单，实则意义重大.

推论1.6.1　设X是LCS，$x,y \in X$，则

$$x = y \Leftrightarrow f(x) = f(y)\ (\forall f \in X^*).$$

推论1.6.1的等价说法是：若$x \neq y$，则必有$f \in X^*$使得$f(x) \neq f(y)$. 通常将这说成**X^*分离X中的点**，而这正表明X^*包含了足够多的成员. 从应用上看，推论1.6.1的意义在于：若要判定**向量等式**$x = y$（这通常是一个无限维问题，未必容易），则只要判定$f(x) = f(y)\ (\forall f \in X^*)$，后者是一个**数量等式**，通常是一个初等问题，甚至可能是一个现成结论. 这样，通过推论1.6.1（实质上也就是通过应用Hahn-Banach定理），就可能完成从无限维问题到初等问题的转化，其意义是不言而喻的. 若取$X = \mathbb{R}^n$，以$x \cdot y$表示$\mathbb{R}^n$中的标准内积，以$\{e_i\}$记$\mathbb{R}^n$的标准基，令$f_i(x) = e_i \cdot x\ (x \in \mathbb{R}^n)$，则$f_i \in (\mathbb{R}^n)^*\ (1 \leqslant i \leqslant n)$. 对任给$x,y \in \mathbb{R}^n$有

$$\begin{aligned} f(x) = f(y)\ (\forall f \in (\mathbb{R}^n)^*) &\Leftrightarrow f_i(x) = f_i(y)\ (1 \leqslant i \leqslant n) \\ &\Leftrightarrow x_i = y_i\ (1 \leqslant i \leqslant n). \end{aligned}$$

在无限维LCS中，一般无适当的坐标可用，$f(x)\ (f \in X^*, x \in X)$正好扮演了$x$的某种坐标的角色. 这一理解对于充分认识推论1.6.1的作用是至关重要的.

就对空间本身的研究而言，Hahn-Banach定理的以下推论意义重大：

推论1.6.2　设X是赋范空间，任给$x \in X$，令

$$\hat{x}(f) = f(x), \quad f \in X^*. \tag{1.6.7}$$

记$X^{**} = (X^*)^*$（X的二次对偶，它也是一个Banach空间），则

$$X \to X^{**}, \quad x \to \hat{x} \tag{1.6.8}$$

是一个等距嵌入（由定义1.2.2）.

证　任给$x \in X$，直接看出由式(1.6.7)定义出一个$\hat{x} \in X^{**}$且$\|\hat{x}\| \leqslant \|x\|$. $x \to \hat{x}$是一个线性映射，只要证$\|\hat{x}\| \geqslant \|x\|\ (x \in X)$. 可设$x \neq 0$，于是依定理1.6.2(ii)有$f \in X^*$，使得$f(x) = \|x\|$且$\|f\| = 1$，这推出

$$\|x\| = \hat{x}(f) \leqslant \|\hat{x}\|\,\|f\| = \|\hat{x}\|,$$

如所要证. □

映射(1.6.8)称为**正则嵌入**. 若等同x与$\hat{x}$，则不妨干脆写$X \subset X^{**}$. 这一结论意义重大. 它首先意味着，每个$x \in X$都扮演着双重角色. 一方面是X中的向量，同时又是X^*上的有界线性泛函（即由式(1.6.7)界定的$\hat{x}$）. 这种观点凸显了空间X与X^*之间的对偶关系，特别富有启发性. 在一定意义上可以说，“向量”与“有界线性泛函”这两种对象可以“易位”，互换各自的结果. 例如，将范数公式(1.6.2)（取其中第一个等号）用于$\hat{x}$得到与之平行的向量范数公式

$$\|x\| = \sup_{f \in X^*,\ \|f\| \leqslant 1} |f(x)|, \quad x \in X. \tag{1.6.9}$$

此公式将被多次应用. 成对出现且呈某种对偶性的类似结果还有很多,下面再举出一个这样的结果,它颇具典型意义且应用很广.

命题 1.6.1 设 X 为赋范空间,$A \subset X, F \subset X^*$,则以下结论成立:

(i) A 有界 $\Leftrightarrow A$ 弱有界,即 $\forall f \in X^*$, $f(A)$ 有界;

(ii) 若 X 完备,则 F 有界(即 $\sup\limits_{f \in F} \|f\| < \infty$) $\Leftrightarrow \forall x \in X, \{f(x): f \in F\}$ 有界.

证 只证(i),(ii)是类似的. $\forall f \in X^*$, $f(A)$ 有界意味着

$$\sup\{|\hat{a}(f)|: a \in A\} < \infty, \quad \forall f \in X^*,$$

$\hat{a}$ 依式(1.6.7). 因 X^* 完备,故将一致有界原理用到 $\{\hat{a}: a \in A\}$ 得出 $\sup\limits_{a \in A} \|\hat{a}\| < \infty$,这正表明 A 有界. 逆命题是显然的. □

命题 1.6.1 中两个结论高度类似,但并不完全对等,这当然源于 X 与 X^* 的对偶并不完美. 立即能看到的一个缺陷是:X^* 总为 Banach 空间,而 X 却未必完备. 更根本的缺陷是:X 未必为 X^* 的对偶空间,因而两者的关系一般是不对等的. 上述缺陷仅当 $X = X^{**}$ 时得以消除,这就引出以下定义:

定义 1.6.1 若正则嵌入(1.6.8)为满射,则称 X 为**自反空间**.

鉴于 $\hat{x}$ 的定义式(1.6.7) 反转了 x 与 f 的地位,常采用如下记号:

$$\langle f,x \rangle = f(x), \quad f \in X^*, x \in X, \tag{1.6.10}$$

其中,f 与 x 的地位显得平等了. $\langle f,x \rangle$ 可看成定义于 $X^* \times X$ 上的一个双线性函数,称为 X 与 X^* 之间的一个配对. 所用记号使人不免联想到内积(详见下节). 配对 $\langle f,x \rangle$ 确有内积的某些性质,如 $|\langle f,x \rangle| \leqslant \|f\| \|x\|$ 就相当于 Schwarz 不等式(见式(1.7.1)). 记号(1.6.10)又引出一些新的约定:$f \perp x \Leftrightarrow \langle f,x \rangle = 0$;若 $A \subset X, F \subset X^*$,则令

$$A^{\perp} = \{f \in X^*: f(A) = 0\}, \quad {}^{\perp}F = \{x \in X: \hat{x}(F) = 0\}, \tag{1.6.11}$$

二者分别称为 A 与 F 的**零化子**. 注意 $\hat{x}$ 与式(1.6.11) 中的记号均可用于 X 是 LCS 的情况. 利用这些记号可大幅度简化一些命题的表述. 例如,推论 1.6.1 可缩写作 ${}^{\perp}X^* = \{0\}$. 再看一例.

命题 1.6.2 设 X 是 LCS,$A \subset X$,则 $\overline{\text{span}\, A} = {}^{\perp}(A^{\perp})$, A 是基本集 $\Leftrightarrow A^{\perp} = \{0\}$.

证 直接看出 $A \subset {}^{\perp}(A^{\perp})$ 且 ${}^{\perp}(A^{\perp})$ 是 X 的闭子空间,故有 $\overline{\text{span}\, A} \subset {}^{\perp}(A^{\perp})$. 任给 $x_0 \in X \setminus \overline{\text{span}\, A}$, 由定理 1.6.2(i)有 $f \in X^*$,使得 $f(\overline{\text{span}\, A}) = 0$,而 $f(x_0) \neq 0$. 这表明 $f \in A^{\perp}$, $x_0 \notin {}^{\perp}(A^{\perp})$. 因此必 $\overline{\text{span}\, A} = {}^{\perp}(A^{\perp})$.

若 A 是基本集,则 ${}^{\perp}(A^{\perp}) = \overline{\text{span}\, A} = X$,这推出 $A^{\perp} = \{0\}$. 反之,若 $A^{\perp} = \{0\}$,则 $\overline{\text{span}\, A} = {}^{\perp}\{0\} = X$,故 A 是基本集. □

再回到 Hahn-Banach 定理,它有一个极富几何色彩的推论,可称之为几何形式的 Hahn-Banach 定理.

定理 1.6.3 设 X 是实 LCS, $A,B \subset X$ 是非空凸集.

(i) 若 $A^\circ \neq \emptyset, A^\circ \cap B = \emptyset$,则存在 $f \in X^*, r \in \mathbb{R}$,使得

$$f(A^\circ) < r \leqslant f(B); \tag{1.6.12}$$

(ii) 若 A 为紧凸集, B 为闭凸集, $A \cap B = \emptyset$,则存在 $f \in X^*, r \in \mathbb{R}$,使得

$$f(A) < r < f(B). \tag{1.6.13}$$

以上结论亦可用于复 LCS,只要以 $\mathrm{Re}f$ 代替 f. 注意不等式(1.6.12)推出

$$f(A) \leqslant r \leqslant f(B). \tag{1.6.14}$$

当不等式(1.6.14)成立时说超平面 $\{f = r\}$ (见推论 1.4.2)分离 A 与 B,当不等式(1.6.13)成立时说超平面 $\{f = r\}$ 严格分离 A 与 B. 因此,定理 1.6.3 以**分离定理**著称. 分离定理的证明基于定理 1.6.1,可参见文献(定光桂, 2008).

本节开头已提到,对偶空间 X^* 将在空间 X 的研究中发挥特殊作用. 但有一个明显的障碍:除了 X 为赋范空间这种特殊情况之外,在 X^* 中尚未赋予任何拓扑结构,因而难以将 X^* 与 X 相提并论. 现在就来弥补这一缺陷. 在 X^* 中引入拓扑的方式是多种多样的,但最简单而又不失为有效的方式是采用点态收敛拓扑. 对应地,在 X 中除原拓扑之外同样可以考虑点态收敛拓扑,二者可平行地描述如下:

定义 1.6.2 设 X 为 LCS. 任给 $x \in X, u \in X^*$,令

$$\|x\|_u = |u(x)| = \|u\|_x, \tag{1.6.15}$$

则 $\{\|x\|_u : u \in X^*\}$ 与 $\{\|u\|_x : x \in X\}$ 分别为 X 与 X^* 中的分离半范族(由定义 1.2.4),它们分别导出 X 上的**弱拓扑**与 X^* 上的**弱*拓扑**.

当 X 上采用弱拓扑时记作 X_w,当 X^* 采用弱*拓扑时记作 X_w^*,二者都是 LCS. 由弱拓扑与弱*拓扑决定的概念分别称为弱概念与弱*概念. 例如, X_w 中的闭集称为弱闭集, X_w^* 中的收敛称为弱*收敛. 分别以 $\rightharpoonup$ 与 $\overset{*}{\rightharpoonup}$ 记弱收敛与弱*收敛. 设 $\{x_t\} \subset X$ 是一个网,则

$$\begin{aligned} x_t \rightharpoonup 0 &\Leftrightarrow \|x_t\|_u \to 0,\ \forall u \in X^* \Leftrightarrow u(x_t) \to 0,\ \forall u \in X^* \\ &\Leftrightarrow \{\hat{x}_t\} \text{ 在 } X^* \text{ 上点态收敛于零}. \end{aligned}$$

这就表明, X 中的弱拓扑正是将 X 看成 $\mathbb{K}^{X^*}$ 的子空间的拓扑. 类似地,若 $\{u_t\} \subset X^*$ 是一个网,则 $u_t \overset{*}{\rightharpoonup} 0 \Leftrightarrow \{u_t\}$ 在 X 上点态收敛于零,因而 X^* 中的弱*拓扑是将 X^* 看成 $\mathbb{K}^X$ 的子空间的拓扑. 这就表明,弱拓扑与弱*拓扑都源于某种积拓扑,因而可以沿用积拓扑的有关结论,这无疑是弱拓扑与弱*拓扑的主要优点之一. 若 X 是赋范空间,则 X 与 X^* 中的范数拓扑显然分别强于弱拓扑与弱*拓扑,因而也称范数拓扑为强拓扑,范数收敛为强收敛. 若 X 是一般的 LCS, X 中的原拓扑也强于弱拓扑. 若 X 是有限维空间,则其中的强拓扑与弱拓扑一致. 若 X 是自反空间,则 X^* 中的弱*拓扑与弱拓扑一致.

顺便指出,类比于弱拓扑,衍生出多种多样的弱概念,它们未必都直接关联弱

拓扑. 一种典型模式是:设$f: \Omega \to X$,若 $\forall \varphi \in X^*$,$\varphi \circ f$有某性质P,就说f有性质"弱P". 在近代分析中,阐明P与"弱P"之间的关系,常常是引人关注的重要课题,本书将有多次机会涉及此类问题.

下面给出 X_w 与 X_w^* 的某些最常用的结论.

定理 1.6.4 设X是LCS,以X_w^{**}记X_w^*的对偶空间,其中,采用弱*拓扑,$\hat{x}$依式(1.6.7)(注意$\hat{x}$的定义用不到X为赋范空间),则有拓扑同构

$$X_w \to X_w^{**}, \quad x \to \hat{x}. \tag{1.6.16}$$

证 易见式(1.6.16)为线性单射(由推论1.6.1). 任给网$\{x_t\} \subset X$,有

$$x_t \rightharpoonup 0 \Leftrightarrow u(x_t) \to 0, \ \forall u \in X^* \Leftrightarrow \hat{x}_t(u) \to 0, \ \forall u \in X^*$$

$$\Leftrightarrow \text{在 } X_w^{**} \text{ 中 } \hat{x}_t \to 0.$$

可见映射(1.6.16)是拓扑嵌入,余下只要证明它是满射. 取定$\varphi \in X_w^{**}$. 将条件(1.6.3)用到φ得出:存在常数$C > 0$与有限集$B = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset X$,使得

$$|\varphi(u)| \leqslant C \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|u\|_{x_i} = C\|u\|_B, \quad \forall u \in X^*, \tag{1.6.17}$$

其中,$\|u\|_B = \max\limits_i |u(x_i)|$. 定义

$$\psi: (u(x_1), u(x_2), \cdots, u(x_n)) \to \varphi(u), \quad u \in X^*.$$

若$u, v \in X^*$,$u(x_i) = v(x_i)(1 \leqslant i \leqslant n)$,则$\|u - v\|_B = 0$,从而由式(1.6.17)推出$\varphi(u) = \varphi(v)$,可见$\psi$的定义合理. ψ是定义于$\mathbb{K}^n$的某子空间上的线性泛函,由定理1.6.1,不妨设$\psi \in (\mathbb{K}^n)^*$. 于是有$(\alpha_i) \in \mathbb{K}^n$,使得

$$\varphi(u) = \sum_i \alpha_i u(x_i) = \hat{x}(u), \quad u \in X^*,$$

其中,$x = \sum \alpha_i x_i \in X$. 因此$\varphi = \hat{x}$,如所要证. □

定理1.6.4表明,若在X与X^*中分别采用弱拓扑与弱*拓扑,则X与X^*互为对偶空间. 这就从一个角度体现出弱拓扑与弱*拓扑的好处. 如前面已提到的,当X为赋范空间并在X与X^*中使用范数拓扑时,X与X^*未必互为对偶空间.

对于自反空间引述以下基本结果而略去其证明:

定理 1.6.5 设X是Banach空间,则X是自反空间$\Leftrightarrow X$中任何有界序列有弱收敛子列.

定理 1.6.6(Mazur) 设X为LCS,$A \subset X$是凸集,则$\bar{A} = \bar{A}_w$,$\bar{A}_w$记A的弱闭包. 因此,凸集为闭集当且仅当它为弱闭集.

证 因X中的原拓扑强于弱拓扑,故$\bar{A} \subset \bar{A}_w$. 若$x_0 \in X \backslash \bar{A}$,则对紧凸集$\{x_0\}$与闭凸集$\bar{A}$应用定理1.6.3(ii)得出$f \in X^*$与$r \in \mathbb{R}$,使得

$$\operatorname{Re} f(x_0) < r < (\operatorname{Re} f)(\bar{A}).$$

任给网$\{x_t\} \subset A$,以上不等式排除了$f(x_t) \to f(x_0)$,从而排除了$x_t \rightharpoonup x_0$. 这就表明$x_0 \notin \bar{A}_w$. 因此$\bar{A} = \bar{A}_w$. □

定理 1.6.7(Banach-Alaoglu) 设 X 是赋范空间, B^* 是 X^* 中的闭单位球, 则 B^* 是弱* 紧集.

证 记 $\overline{D}(0,r) = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leqslant r\}$. 定义映射

$$J: B^* \to M = \prod_{x \in X} \overline{D}(0, \|x\|), \quad u \to (u(x))_{x \in X},$$

则 J 是一单射. 因 B^* 中的弱* 收敛正好对应 M 中依积拓扑的收敛, 故当 B^* 中用弱* 拓扑时 J 是一拓扑嵌入. 由 Tychonoff 定理 M 是紧的, 易验证 JB^* 在 M 中是弱* 闭的, 因此 B^* 是弱* 紧的. □

定理 1.6.7 确立的结论是说明弱* 拓扑重要性的最主要的理由之一.

定理 1.6.8 设 X 是赋范空间.

(i) 设 X 可分, 则 X^* 中的闭单位球 B^* 依弱* 拓扑可度量化; X^* 弱* 可分; X^* 中任何有界序列有弱* 收敛子列; 存在可数集 $\{f_n\} \subset \partial B^*$, 使得

$$\|x\| = \sup_n |f_n(x)|, \quad x \in X; \tag{1.6.18}$$

(ii) 若 X^* 可分, 则 X 可分.

证 (i) 以 B 记 X 中的闭单位球. 取 ∂B 的可数稠集 $\{a_n\}$, 令

$$d(f,g) = \sum_n 2^{-n} |f(a_n) - g(a_n)|, \quad f,g \in B^*,$$

则易验证 d 是 B^* 上的一个度量. 任给网 $\{f_t\} \subset B^*$, $f \in B^*$, 有

$$\begin{aligned} d(f_t,f) \to 0 &\Leftrightarrow f_t(a_n) \to f(a_n) (\forall n \in \mathbb{N}) \\ &\Leftrightarrow f_t(x) \to f(x) (\forall x \in \partial B) \\ &\Leftrightarrow f_t(x) \to f(x) (\forall x \in X) \\ &\Leftrightarrow f_t \xrightarrow{*} f, \end{aligned}$$

可见 d 恰导出 B^* 中的弱* 拓扑. 这结合定理 1.6.7 得出, B^* 可看成一个紧度量空间, 因而 B^* 依弱* 拓扑可分, 这就推出 $X^* = \cup nB^*$ 弱* 可分. 若 $\{f_n\} \subset X^*$ 是一有界序列, 则不妨设 $\{f_n\} \subset B^*$, 于是由定理 1.3.2 知它含弱* 收敛子列.

为证式(1.6.18), 不妨设 $x \in \partial B$. 取 $f_n \in \partial B^*$ 使 $f_n(a_n) = \|a_n\|$ (由定理 1.6.2(ii), 不妨设 $a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$), 则

$$\begin{aligned} \|x\| &\geqslant \sup_n |f_n(x)| \\ &\geqslant \sup_n [\|a_n\| - |f_n(x - a_n)|] \\ &\geqslant \sup_n (\|a_n\| - (\|x - a_n\|)) \\ &= \|x\| - \inf_n \|x - a_n\| = \|x\|, \end{aligned}$$

这表明式(1.6.18)成立.

(ii) 取 ∂B^* 的可数稠集 $\{f_n\}$, 取 $x_n \in \partial B$, 使 $|f_n(x_n)| \geqslant 1/2 (n \in \mathbb{N})$. 今证

$\{x_n\}$ 是 X 的基本集(从而 X 可分),为此只要证 $\{x_n\}^{\perp} = \{0\}$(由题1.6.2). 若有 $0 \neq f \in \{x_n : n \in \mathbb{N}\}^{\perp}$,则不妨设 $\|f\| = 1$,于是

$$\|f - f_n\| \geq |\langle f - f_n, x_n\rangle| = |f_n(x_n)| \geq 1/2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

这与 $\{f_n\}$ 在 ∂B^* 中稠密相矛盾. □

对偶空间 X^* 不仅有助于研究空间 X(定理 1.6.8 就是一个例子),也有助于研究 X 上的线性算子. 对于后者需要对偶算子这一概念.

定义 1.6.3 设 X 与 Y 是 LCS, $T \in L(X,Y)$,则

$$T^* : Y^* \to X^*, \quad g \to g \circ T \tag{1.6.19}$$

是一个线性算子,称它为 T 的**对偶算子**.

从式(1.6.19)直接看出, T^* 完全决定于恒等式

$$\langle g, Tx\rangle = \langle T^*g, x\rangle, \quad x \in X, g \in Y^*. \tag{1.6.20}$$

式(1.6.20)使得算子 T 与 T^* 形式上更显对等. 利用式(1.6.20)易直接验证

$$(\alpha T + \beta S)^* = \alpha T^* + \beta S^*, \quad (AT)^* = T^*A^*, \tag{1.6.21}$$

其中, $T,S \in L(X,Y)$, $A \in L(Y,Z)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$.

定义 1.6.3 并未涉及 T^* 的连续性. 对于连续性的界定与判别与 X^*, Y^* 中所用的拓扑有关. 若在 X^* 与 Y^* 中均用弱* 拓扑,则 T^* 必连续,这可写作 $T^* \in L(Y_w^*, X_w^*)$. 若 X 与 Y 是赋范空间,则可验证

$$\|T^*\| = \|T\|, \tag{1.6.22}$$

此时当然也有 $T^* \in L(Y^*, X^*)$. 以上两种情况对于对偶算子的应用都是重要的.

下面设 X 与 Y 是赋范空间, $T \in L(X,Y)$. 关于算子 T 的一些基本问题通常关联着如下 4 个集: $N(T)$, $R(T)$, $N(T^*)$ 与 $R(T^*)$. 关于它们有一系列深刻的结果,通常称为核定理与值域定理. 借助于零化子记号,这些定理可表述得非常简洁,且充分表现出 T 与 T^* 之间的对偶性. 首先给出一个较简单的结果.

命题 1.6.3 设 X 与 Y 是赋范空间, $T \in L(X,Y)$,则成立

$$N(T^*) = R(T)^{\perp}, \quad {}^{\perp}N(T^*) = \overline{R(T)}, \tag{1.6.23}$$

$$N(T) = {}^{\perp}R(T^*), \quad N(T)^{\perp} = \overline{R(T^*)}_w. \tag{1.6.24}$$

最后一个等式的右端表示弱* 闭包. 因此, T^* 是单射 $\Leftrightarrow \overline{R(T)} = Y$, T 是单射 $\Leftrightarrow \overline{R(T^*)}_w = X^*$.

证 利用式(1.6.20)易直接验证 $N(T^*) = R(T)^{\perp}$. 然后用命题 1.6.2 得

$$^{\perp}N(T^*) = {}^{\perp}(R(T)^{\perp}) = \overline{\mathrm{span}\, R(T)} = \overline{R(T)},$$

式(1.6.23)得证. 其次,由 $T^* \in L(Y_w^*, X_w^*)$ 及定理 1.6.4 看出, $T^* \in L(Y_w^*, X_w^*)$ 的对偶算子正是 $T \in L(X_w, Y_w)$. 分别以 T 与 T^* 取代 T^* 与 T, 从式(1.6.23)的前一式得 $N(T) = {}^{\perp}R(T^*)$, 从后一式得(此处注意由定理 1.6.6 有 $\overline{R(T)} = \overline{R(T)}_w$) $N(T)^{\perp} = \overline{R(T^*)}_w$. 于是式(1.6.24) 得证. □

下面是更深刻的所谓**闭值域定理**与**满射定理**(Rudin, 1991).

定理 1.6.9 设 X 与 Y 均为 Banach 空间, $T \in L(X,Y)$,则以下结论成立:

$$R(T) \text{ 是闭集} \Leftrightarrow R(T) = {}^{\perp}N(T^*)$$
$$\Leftrightarrow R(T^*) = N(T)^{\perp}$$
$$\Leftrightarrow R(T^*) \text{ 是闭集}.$$

定理 1.6.10 设 X 与 Y 均为 Banach 空间, $T \in L(X,Y)$,则以下结论成立:

(i) $R(T) = Y \Leftrightarrow T^*: Y^* \cong R(T^*)$(拓扑同构);

(ii) $R(T^*) = X^* \Leftrightarrow T: X \cong R(T)$(拓扑同构).

最后,陈述一个关于紧线性算子的结果以备用.

定理 1.6.11 设 X 与 Y 是赋范空间, $T \in CL(X,Y)$, 则 T 映弱收敛序列为收敛序列,$T^* \in CL(Y^*,X^*)$.

1.7 Hilbert 空间

前几节所循的思路,实质上无非是将 Euclid 空间中的某些概念与结论移植到抽象空间(主要是赋范空间,也包括 LCS,拓扑空间等). 通过自然的类比并借用平常的几何语言,抽象空间理论呈现出某种可作直观想象的面貌. 这样做的效果如此引人入胜,人们不禁想再往前走一步,将更多的几何概念,如角度、垂直性等,都引进到抽象空间中来. 这就导向考虑内积空间与 Hilbert 空间.

定义 1.7.1 设 H 是 $\mathbb{K}$ 上的向量空间. 若 $H \times H$ 上定义了一个 $\mathbb{K}$ 值函数 $\langle x,y\rangle$,它满足如下**内积公理**:

(I_1) $\langle x,y\rangle$ 对 x 是线性的;

(I_2) 共轭对称性: $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$;

(I_3) 正定性: $\langle x,x\rangle \geqslant 0, \langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

$x,y \in H$, 则称 $\langle x,y\rangle$ 为 H 上的一个内积,而称 $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 或 H 为内积空间. 在内积空间 H 中依 $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ 引进范数, 当 H 依此范数完备时称它为 **Hilbert 空间**①.

以下设 H 是给定的内积空间. H 中范数定义的合理性并不自明,需要验证. 首先,任给 $x,y \in H,\alpha \in \mathbb{K}$, 由内积公理($I_1$)~($I_3$)得出

$$0 \leqslant \langle x-\alpha y, x-\alpha y\rangle = \|x\|^2 - \alpha\langle y,x\rangle - \bar{\alpha}\langle x,y\rangle + |\alpha|^2\|y\|^2.$$

取 $\alpha = \langle x,y\rangle / \|y\|^2$(不妨设 $y \neq 0$) 代入, 得到所谓 **Schwarz 不等式**

$$|\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\| \, \|y\|, \quad x,y \in H. \tag{1.7.1}$$

---

① Hilbert 本人主要研究了空间 l^2 ,抽象 Hilbert 空间是由 von Neumann 于 1932 年引入的.

利用以上不等式不难验证范数公理(N_2)(由定义 1.2.1)，而(N_1)与(N_3)满足是明显的. 可见,内积空间是赋范空间的特例.

以下结果准确地指出了赋范空间成为内积空间的条件:

定理 1.7.1 设 X 是 $\mathbb{K}$ 上的赋范空间，则 X 中的范数能由某个内积定义的充要条件是,如下**平行四边形公式**满足:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2),\quad x,y\in X. \tag{1.7.2}$$

证 对于内积空间验证式(1.7.2)是平凡的. 反之,若式(1.7.2)成立,当 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{C}$ 时，分别令

$$4\langle x,y\rangle=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2 \tag{1.7.3}$$

与

$$4\langle x,y\rangle=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+\mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2-\mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2, \tag{1.7.4}$$

则可验证 $\langle x,y\rangle$ 满足内积公理(I_1) ~ (I_3)且 $\langle x,x\rangle=\|x\|^2$. 验证的细节是技术性的,可参见文献(定光桂, 2008). □

式(1.7.3)与式(1.7.4)称为**极化恒等式**,它与公式 $\|x\|^2=\langle x,x\rangle$ 一起用来实现内积与范数的互相转化，在 Hilbert 空间理论中是基本而常用的.

平行四边形公式(1.7.2)表达了熟知的几何定理:平行四边形各边平方和等于两对角线平方和. 在内积空间中推广平常的几何定理,其实并无任何可惊之处,因为内积空间与 Euclid 空间具有某种共同的公理结构. 只要你愿意,不难将更多的 Euclid 几何定理搬到内积空间中来. 但这未必是一件值得去做的事. 我们只关注那些在分析学中有应用价值的结果,平行四边形公式就是一个这样的结果. 下面即将建立的勾股定理,或许是一个更有价值的结果,它要用到正交概念,下面就来定义.

定义 1.7.2 (i) 设 $x,y\in H$,$\langle x,y\rangle=0$,则说 x 与 y 正交,记作 $x\perp y$;

(ii) 设 $\varnothing\neq A,B\subset H$. 若 $\forall a\in A,\forall b\in B$,有 $a\perp b$,则说 A 与 B 正交,记作 $A\perp B$, 约定 $x\perp A\Leftrightarrow\{x\}\perp A$. 令 $A^{\perp}=\{x\in H: x\perp A\}$,称 $A^{\perp}$ 为 A 的**正交补**;

(iii) 设$\{x_i: i\in I\}\subset H$. 若当 $i\neq j$ 时 $x_i\perp x_j$,则称$\{x_i\}$为一个正交系或正交集;若$\langle x_i,x_j\rangle=\delta_{ij}$($\delta_{ij}$ 是熟知的 Kronecker 记号),则称 $\{x_i\}$ 为**标准正交系**.

首先指出一些容易直接从定义 1.7.2 看出的事实:0 与任何 $x\in H$ 正交;若 $A\perp B$,则 $\overline{\operatorname{span}A}\perp\overline{\operatorname{span}B}$, $A\subset B^{\perp}$;任给非空集 $A\subset H$,$A^{\perp}$ 总是 H 的闭子空间.

若 $\{x_i: 1\leqslant i\leqslant n\}\subset H$ 是一有限正交系,则由直接计算得出

$$\Big\|\sum_i x_i\Big\|^2=\sum_i\|x_i\|^2. \tag{1.7.5}$$

特别地,当 $x_1\perp x_2$ 时有

$$\|x_1\pm x_2\|^2=\|x_1\|^2+\|x_2\|^2,$$

这正是熟知的勾股定理. 不妨说,式(1.7.5)表达了广义的勾股定理. 注意,当 $\{x_i\}$

是正交系而$\{\alpha_i\} \subset \mathbb{K}$时$\{\alpha_i x_i\}$亦为正交系,因此,式(1.7.5)可推广为更一般的

$$\left\| \sum_i \alpha_i x_i \right\|^2 = \sum_i |\alpha_i|^2 \|x_i\|^2. \tag{1.7.6}$$

若$x_i \neq 0(1 \leqslant i \leqslant n)$,则从式(1.7.6)看出$\sum \alpha_i x_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0(1 \leqslant i \leqslant n)$. 这表明不含零元的正交系必线性无关.

Euclid 空间的一个基本事实是:可用某个标准正交系作为空间的基而导入 Descartes 直角坐标系. 今在 Hilbert 空间中考虑同一问题,此问题已有完全的解答. 不过,下面仅对无限维可分 Hilbert 空间 H 表述有关结果,这种情况在应用上是最重要的. 至于更一般的情况,除了增加记号与表述的复杂性之外,并不包含实质上新的思想. 设$\{e_i : i \in \mathbb{N}\} \subset H$是一标准正交系. 若每个$x \in H$可表为

$$x = \sum_i \alpha_i e_i, \tag{1.7.7}$$

则称$\{e_i\}$为H的标准正交基,称式(1.7.7)为x关于基$\{e_i\}$的 Fourier 展开式. 因由式(1.7.7)推出$\alpha_i = \langle x, e_i \rangle$,故 Fourier 展开式是唯一的,因而标准正交基必为 Schauder 基. 为清晰起见,下面记$\hat{x}_i = \langle x, e_i \rangle$,并称它为$x$关于基$\{e_i\}$的 Fourier 系数或正交坐标,也称$x \to \hat{x} = (\hat{x}_i)$为 Fourier 变换. 基本的问题是:Hilbert 空间是否存在标准正交基? 此问题的解决又依赖于另一个问题:一个标准正交系应具备什么条件才成为标准正交基? 后者的解答如下:

定理 1.7.2 设H是 Hilbert 空间,$\{e_i : i \in \mathbb{N}\} \subset H$是一标准正交系,则以下条件互相等价:

(i) $\{e_i\}$是H的标准正交基;

(ii) $\{e_i\}$是H的基本集(由定义 1.2.3);

(iii) $\{e_i\}$是极大的,即$\{e_i : i \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\}$;

(iv) 成立如下 **Parseval 等式**:

$$\|x\|^2 = \sum_i |\hat{x}_i|^2, \quad x \in H, \hat{x}_i = \langle x, e_i \rangle; \tag{1.7.8}$$

(v) 成立如下内积公式(亦称一般 Parseval 等式):

$$\langle x, y \rangle = \sum_i \hat{x}_i \overline{\hat{y}_i}, \quad x, y \in H. \tag{1.7.9}$$

证 (i) $\Rightarrow$ (ii)与(i) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (iv)是自明的.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 若$\overline{\operatorname{span}\{e_i\}} = H$,则$\{e_i\}^\perp = (\overline{\operatorname{span}\{e_i\}})^\perp = H^\perp = \{0\}$.

(iii)$\Rightarrow$(i) 取定$x \in H$,令$s_n = \sum_1^n \hat{x}_i e_i$,要证$s_n \to x (n \to \infty)$. 由直接计算可验证$s_n \perp (s_n - x)$,于是由式(1.7.5),式(1.7.6)有

$$\|x\|^2 = \|s_n\|^2 + \|x - s_n\|^2, \tag{1.7.10}$$

$$\|s_n\|^2 = \sum_{i=1}^n |\hat{x}_i|^2, \tag{1.7.11}$$

$$\| s_m - s_n \|^2 = \sum_{n<i\leq m} | \hat{x}_i |^2, \quad m > n. \tag{1.7.12}$$

由式(1.7.10)，式(1.7.11)推出

$$\sum_1^\infty | \hat{x}_i |^2 \leq \| x \|^2,$$

这结合式(1.7.12)推出 $\{s_n\}$ 为 Cauchy 序列. 设 $s_n \to y \in H(n\to\infty)$，只需证 $x = y$. 利用条件(iii)，又只要证 $\hat{x}_i = \hat{y}_i(\forall i \in \mathbb{N})$，这由以下演算得出：·

$$\hat{y}_i = \langle y, e_i \rangle = \lim_n \left\langle \sum_{j=1}^n \hat{x}_j e_j, e_i \right\rangle = \hat{x}_i, \quad i \in \mathbb{N}.$$

式(1.7.10)直接表明(i)$\Leftrightarrow$(iv)，于是定理得证. □

推论 1.7.1 设 H 是一个可分无限维 Hilbert 空间，则以下结论成立：

(i) H 必有标准正交基；

(ii) H 等距同构于 l^2（由例 1.2.1(iii)）.

证 (i) 在 H 中取一可数稠集 $\{x_i\}$，可设 $\{x_i\}$ 线性无关，即 $\forall n \in \mathbb{N}, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性无关(否则依次除去多余的元素). 然后用线性代数中描述的 Schmidt 正交化方法，将 $\{x_i\}$ 标准正交化为 $\{e_i\}$，则 $\{e_i\}$ 是 H 的基本集. 由定理 1.7.2，$\{e_i\}$ 是 H 的标准正交基.

(ii) 设 $\{e_i\}$ 是 H 的标准正交基，则 Fourier 变换(依定理 1.7.2 中的记号)

$$H \to l^2, \quad x \to \hat{x} = (\hat{x}_i) \tag{1.7.13}$$

是一等距的线性映射，等距性依式(1.7.8). 若 $c = (c_i) \in l^2$，则 $x = \sum c_i e_i$ 必收敛，因而 $x \in H$. 由唯一性有 $c = \hat{x}$，故式(1.7.13) 是一等距同构. □

对于定理 1.7.2 中的 Parseval 等式，值得特别加以说明，它无疑是式(1.7.6)的无限和推广，因而亦可视为某种广义的勾股定理. 在抽象空间理论中，准确的数量等式殊为少见，一旦出现，必被视为重要结果. 像 Parseval 等式这样既形式优美又直观意义明确的等式，更加备受珍视. 在近代分析中，Parseval 等式有多种多样的应用，且经常导致出人意料的深刻结果. 而且，对于 Parseval 等式还可作多种拓广，如用适当的积分替代和式. 在本书中将多次遇到类似的结果.

Fourier 展开式(1.7.7)是一种正交分解，x 沿互相正交的"坐标轴"方向分解. 在 Hilbert 空间中还可以考虑另外一种正交分解，这由如下的**正交分解定理**描述：

定理 1.7.3 设 H 是 Hilbert 空间，$A \subset H$ 是一闭子空间，则有拓扑直和分解 $H = A \oplus A^\perp$（称为正交分解). 设 P 是 H 到 A 投影，则对任给 $x \in H$，Px 是 x 在 A 中的**最佳逼近**，即 $\| x - Px \| = d(x, A)$.

证 取定 $x \in H$. 取序列 $\{x_n\} \subset A$，使 $\| x_n - x \| \to \rho \triangleq d(x,A)(n\to\infty)$. 由平行四边形公式有

$$\| x_m - x_n \|^2 = \| (x_m - x) - (x_n - x) \|^2$$

$$= 2\|x_m - x\|^2 + 2\|x_n - x\|^2 - \|x_m + x_n - 2x\|^2$$
$$\leqslant 2\|x_m - x\|^2 + 2\|x_n - x\|^2 - 4\rho^2 \to 0, \quad m,n \to \infty.$$

可见 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列,故 $x_n \to a \in A$. 令 $b = x - a$,则 $x = a + b$, $\|b\| = \rho$. 今证 $b \in A^{\perp}$,即 $\forall y \in A$,证$\langle b,y\rangle = 0$. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,有

$$\rho^2 \leqslant \|x - (a + \lambda y)\|^2 = \|b - \lambda y\|^2$$
$$= \rho^2 - \lambda(y,b) - \bar{\lambda}\langle b,y\rangle + |\lambda|^2\|y\|^2.$$

可设 $y \neq 0$,以 $\lambda = \langle b,y\rangle / \|y\|^2$ 代入以上不等式得出$\langle b,y\rangle = 0$. 所证结论与 $A \cap A^{\perp} = \{0\}$ 一起推出 $H = A \oplus A^{\perp}$. 因 A 与 $A^{\perp}$ 均为闭子空间,故 $A \oplus A^{\perp}$ 是拓扑直和(由定理1.4.3(iv)). 设 P 是 H 到 A 的投影(由定理1.4.3),则 $Px = a$,于是 $\|x - Px\| = \|b\| = \rho = d(x,A)$,这表明 Px 是 x 在 A 中的最佳逼近. □

当 $H = A \oplus A^{\perp}$ 时,H 到 A 的投影 P 称为正交投影算子,简称为**正投影**,也记作 P_A. 显然 $P_A \in L(H)$,$R(P_A) = A$,$N(P_A) = A^{\perp}$,$P_A^2 = P_A$.

正交分解定理是 Hilbert 空间理论中简单而又广泛应用的结果之一. 下面用它来推出有界线性泛函的 **Riesz 表示定理**①.

定理 1.7.4 设 H 是实 Hilbert 空间. 任给 $a \in H$,令 $\tilde{a}(x) = \langle x,a\rangle$,则

$$H \to H^*, \quad a \to \tilde{a} \tag{1.7.14}$$

是一等距同构. 若 H 是复 Hilbert 空间,则映射(1.7.14)是等距的共轭线性同构.

证 只考虑实空间的情况. 任给 $a \in H$,直接看出 $\tilde{a} \in H^*$ 且 $\|\tilde{a}\| \leqslant \|a\|$. 由

$$\|a\|^2 = \langle a,a\rangle = \tilde{a}(a) \leqslant \|\tilde{a}\|\,\|a\|$$

得出 $\|a\| \leqslant \|\tilde{a}\|$,因此 $\|\tilde{a}\| = \|a\|$. 余下只要证式(1.7.14)是满射,即对任给 $f \in H^*$,必有 $a \in H$ 使 $f = \tilde{a}$. 当 $f = 0$ 时取 $a = 0$ 好了. 下面设 $f \neq 0$. 令 $A = N(f)$,则 A 是 H 的闭子空间,于是 $H = A \oplus A^{\perp}$(由定理1.7.3). 因 $f \neq 0$,必有 $0 \neq x_0 \in A^{\perp}$. 必定 $f(x_0) \neq 0$,不妨设 $f(x_0) = 1$. 令 $a = \|x_0\|^{-2}x_0$,则 $a \in A^{\perp}$,$\langle x_0,a\rangle = 1$. 任给 $x \in H$,有 $f(x)x_0 - x \in A$. 于是

$$f(x) = f(x)\langle x_0,a\rangle = \langle x,a\rangle + \langle f(x)x_0 - x,a\rangle = \langle x,a\rangle,$$

这正表明 $f = \tilde{a}$,如所要证. □

若视 a 与 $\tilde{a}$ 为等同,则不妨直接写 $H = H^*$. 因此说 Hilbert 空间是自对偶的,当然更是自反的. 以上结果表明,每个 $x \in H$ 有双重身份:既是 H 中的向量,同时又可看成 H 上的有界线性泛函(即定理1.7.4中的 $\tilde{x}$). 在 Hilbert 空间的应用中,以上观点不仅不会造成混乱,实际上能带来很大方便. 由于有 Riesz 表示定理可用,在 Hilbert 空间中运用有界线性泛函成为一件很简单的事情,这种优势是其他 Banach 空

---

① 实际上,Riesz 在 1907 年只是对空间 L^2 建立了这一结果.

间无法比拟的.

下面转向考虑 Hilbert 空间中的线性算子. 首先建立一个预备性结果. 若一个函数 $f(x,y): H\times H\to\mathbb{K}$ 对 x 与 y 分别为线性的与共轭线性的,则称 f 为 **Hermite 双线性泛函**. H 中的内积显然就是一个 Hermite 双线性泛函. 下面的定理表明,在一定条件下 Hermite 双线性泛函总可通过内积来表示.

定理 1.7.5(Lax-Milgram) 设 f 是 Hilbert 空间 H 上的 Hermite 双线性泛函, $M\triangleq\sup\{|f(x,y)|: \|x\|=\|y\|=1\}<\infty$, 则存在唯一的 $T\in L(H)$,使得 $f(x,y)=\langle Tx,y\rangle$, $\|T\|=M$. 若 f 还满足条件

$$\delta\triangleq\inf\{|f(x,y)|: \|x\|=\|y\|=1\}>0, \tag{1.7.15}$$

则 T 是一个同构.

证 由常数 M 的定义推出

$$|f(x,y)|\leqslant M\|x\|\,\|y\|,\quad x,y\in H.$$

任给 $x\in H$,令 $x^*(y)=\overline{f(x,y)}$. 直接看出 $x^*\in H^*$. 由定理 1.7.4,有唯一的元 $Tx\in H$,使得 $x^*(y)=\langle y,Tx\rangle$,即 $f(x,y)=\langle Tx,y\rangle(y\in H)$. 直接看出 Tx 对 x 是线性的且

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup_{\|x\|=1}\|Tx\| = \sup_{\|x\|=1}\|x^*\| \\ &= \sup_{\|x\|=\|y\|=1}|x^*(y)| = M.\end{aligned}$$

若条件(1.7.15)满足,则对任给 $x\in H$ 有

$$\delta\|x\|^2\leqslant|f(x,x)|=|\langle Tx,x\rangle|\leqslant\|Tx\|\,\|x\|,$$

这推出 $\|Tx\|\geqslant\delta\|x\|$. 由此又推出 $T: H\to R(T)$ 是拓扑同构,因而 $R(T)$ 是 H 的闭子空间. 若 $x\in R(T)^\perp$, 则

$$0=\langle Tx,x\rangle=f(x,x)\geqslant\delta\|x\|^2,$$

这推出 $x=0$. 因此 $H=R(T)$, $T: H\to H$ 为同构. □

定理 1.7.5 有广泛的应用. 不过此处仅用来导出相伴算子概念. 给定 $T\in L(H)$,令 $f(x,y)=\langle x,Ty\rangle(x,y\in H)$,则 f 显然是一个 Hermite 双线性泛函且

$$\sup_{\|x\|=\|y\|=1}|f(x,y)|=\sup_{\|y\|=1}\|Ty\|=\|T\|.$$

由定理 1.7.5,存在唯一的 $T^*\in L(H)$,使得 $f(x,y)=\langle T^*x,y\rangle$,即

$$\langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle,\quad x,y\in H \tag{1.7.16}$$

且 $\|T^*\|=\|T\|$. 这样的 T^* 称为 T 的**相伴算子**,它由恒等式(1.7.16) 唯一决定. 利用式(1.7.16) 可直接推出如下简单结论:

命题 1.7.1 设 $T,S\in L(H)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$,则以下结论成立:

(i) $(\alpha T+\beta S)^*=\bar{\alpha}T^*+\bar{\beta}S^*$, $(ST)^*=T^*S^*$, $T^{**}=T$;

(ii) $\|T^*\|=\|T\|$, $\|T^*T\|=\|T\|^2=\|TT^*\|$.

以证 $\|T^*T\|=\|T\|^2$ 为例说明如下:

$$
\begin{aligned}
\|T^*T\| &= \sup_{\|x\|=1} \|T^*Tx\| \\
&= \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle T^*Tx, y\rangle| \\
&= \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle Tx, Ty\rangle| \\
&\geqslant \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|^2 \\
&= \|T\|^2 = \|T^*\|\,\|T\| \geqslant \|T^*T\|.
\end{aligned}
$$

若取 $H = \mathbb{C}^n, A \in \mathbb{C}^{n\times n}$,则 $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$,有

$$\langle Ax, y\rangle = x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\bar{y} = \langle x, \bar{A}^{\mathrm{T}}y\rangle = \langle x, A^* y\rangle,$$

这得出 $A^* = \bar{A}^{\mathrm{T}}$($A$ 的共轭转置). 这一事实对于展开相伴算子理论有重要启示意义.

对照命题 1.7.1 与式(1.6.21), 式(1.6.22)看出,相伴算子与对偶算子有某种类似. 实际上,不难建立二者之间的准确联系. 但此处不去作这种讨论.

若将 T^* 看成对偶算子,则可将命题 1.6.3 改进为

命题 1.7.2 设 $T \in L(H)$,则成立

$$N(T^*) = R(T)^{\perp}, \quad N(T^*)^{\perp} = \overline{R(T)}, \tag{1.7.17}$$

$$N(T) = R(T^*)^{\perp}, \quad N(T)^{\perp} = \overline{R(T^*)}. \tag{1.7.18}$$

证 因 $T = T^{**}$,故式(1.7.17) 与式(1.7.18) 等价,只要证前者. 直接看出 $N(T^*) = R(T)^{\perp}, \overline{R(T)} \subset N(T^*)^{\perp}$. 若 $x \in H\setminus \overline{R(T)}$,则由定理 1.7.3 有 $x = y + z, y \in \overline{R(T)}, 0 \neq z \in \overline{R(T)}^{\perp} \subset N(T^*)$. 因$\langle x, z\rangle = \|z\|^2 \neq 0$,故 $x \notin N(T^*)^{\perp}$,这得出 $N(T^*)^{\perp} = \overline{R(T)}$. □

定义 1.7.3 设 $T \in L(H)$. 若 $TT^* = T^*T$,则称 T 为**正规算子**;若 $T = T^*$,则称 T 为 **自伴算子**;若 $T^* = T^{-1}$,则称 T 为 **U 算子**. 当 T 是自伴算子时称$\langle Tx, x\rangle$ ($x \in H$) 为由 T 定义的**二次泛函**.

若取 $H = \mathbb{C}^n$ 且等同 $L(\mathbb{C}^n)$ 与$\mathbb{C}^{n\times n}$,则$\mathbb{C}^n$ 上的正规算子、自伴算子与 U 算子分别相当于线性代数中的正规矩阵、Hermite 对称矩阵与 U 矩阵;实的 Hermite 对称矩阵与 U 矩阵分别为对称矩阵与正交矩阵. 若 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是 Hermite 对称矩阵,则 $\langle Ax, x\rangle = \bar{x}^{\mathrm{T}}Ax$ ($x \in \mathbb{C}^n$) 为 Hermite 二次型,当 $A = A^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 且 $x \in \mathbb{R}^n$ 时它就是通常的二次型. 正规算子、自伴算子与 U 算子的以上线性代数原型将成为引导思路的重要样本.

现在给出正规算子等的等价刻画.

命题 1.7.3 设 $T \in L(H)$,则以下结论成立:

(i) T 是正规算子 $\Leftrightarrow \|Tx\| \equiv \|T^*x\| \Rightarrow N(T) = N(T^*) = R(T)^{\perp}$;

(ii) T 是自伴算子 $\Leftrightarrow \langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ ($\forall x \in H$);

(iii) T 是 U 算子 $\Leftrightarrow T: H \to H$ 是等距同构.

证 关键在于建立恒等式(不难用直接计算验证)

$$4\langle Tx,y\rangle =\langle T(x+y),x+y\rangle -\langle T(x-y),x-y\rangle$$
$$+\mathrm{i}\langle T(x+\mathrm{i}y),x+\mathrm{i}y\rangle -\mathrm{i}\langle T(x-\mathrm{i}y),x-\mathrm{i}y\rangle . \quad (1.7.19)$$

由此推出若 $\langle Tx,x\rangle \equiv 0$,则必 $T=0$,因而$\langle (T-S)x,x\rangle \equiv 0 \Rightarrow T=S$. 于是

$$TT^* = T^*T \Leftrightarrow \langle TT^*x,x\rangle \equiv \langle T^*Tx,x\rangle \Leftrightarrow \| T^*x\| \equiv \| Tx\| ,$$
$$T=T^* \Leftrightarrow \langle Tx,x\rangle \equiv \langle x,Tx\rangle \Leftrightarrow \langle Tx,x\rangle \equiv \overline{\langle Tx,x\rangle},$$
$$T^* = T^{-1} \Leftrightarrow \| T^*x\| \equiv \| Tx\| \equiv \| x\| .$$

从上述等价关系依次得出(i) ~ (iii). □

定理 1.7.6 设 $T=T^2\in L(H)$,则以下条件互相等价:

(i) T 是正投影;

(ii) T 是自伴算子;

(iii) T 是正规算子;

(iv) $R(T)=N(T)^{\perp}$;

(v) $\langle Tx,x\rangle \equiv \| Tx\|^2, \quad x\in H.$

证 (i)⇒(ii) 若 T 是正投影,则 $\forall x,y\in H$,有

$$\langle Tx,y\rangle = \langle Tx,Ty\rangle + \langle Tx,y-Ty\rangle$$
$$= \langle Tx,Ty\rangle = \langle x,Ty\rangle = \langle T^*x,y\rangle ,$$

这得出 $T=T^*$.

(ii)⇒(iii)是平凡的. 利用命题 1.7.2 与命题 1.7.3(i)看出(iii)⇒(iv).

(iv)⇒(v) $\forall x\in H$,有 $x-Tx\in N(T)$, 于是由条件(iv)推出

$$\langle Tx,x\rangle = \| Tx\|^2 + \langle Tx,x-Tx\rangle = \| Tx\|^2.$$

(v) ⇒ (i) 设条件(v)满足,则 $T=T^*$ (由命题 1.7.3(ii)). $\forall x,y\in H$,有

$$\langle Ty,x-Tx\rangle = \langle Ty,x\rangle - \langle Ty,Tx\rangle = 0.$$

这表明 $x=Tx+(x-Tx)\in R(T)\oplus R(T)^{\perp}$,$T$ 是 H 到 $R(T)$ 的正投影. □

第2章　微　分　学

如所熟知，经典微分学基于如下简单思想：在局部用线性函数近似地代替非线性函数；或更一般地，用多项式函数局部地近似代替非多项式函数. 同样的思想也适用于一定抽象空间中的函数，而这就导向近代微分学. 近代微分理论的萌芽可追溯到古典变分法，后者的历史几乎与古典微分学一样久远. 但近代形式下的微分理论的诞生乃是抽象空间理论充分发展的结果，其主要推动者 Fréchet 等就是抽象空间理论的奠基人. 至 20 世纪 20 年代，Fréchet 等表述的微分学大体上已接近于今天所熟知的现代形式.

本章将遵循经典微分学中的熟知思路，且尽可能沿用熟悉的记号与术语，展开近代微分理论. 这样，将顺次建立微分规则、中值定理、Taylor 公式、隐函数定理等，就如同一本老的微分学教科书一样. 然而，在无限维空间中去完成这一切，必定会遇到一些让你惊讶的东西. 这些差别固然值得适当强调，以免在不经意中陷入谬误，但主要关注点始终是同时支配了古典微分学与近代微分学的那些统一思想，而且处处强调：抽象空间方法不是将问题引向复杂，而是引向高度的统一与出人意料的简化.

对本章所用记号作一些总的交代. X,Y,Z 等总表示$\mathbb{K}$上的赋范空间，大部分内容与$\mathbb{K}$ 的选择无关. 凡需用到完备性的地方总直接注明. E 总记$\mathbb{K}$ 上的 Banach 空间，除非另有规定. Ω 与 D 分别记某个赋范空间的非空开子集与非空子集，所属的空间由上下文判明. 通常以 F,G 等记向量值函数，而以f,g 等记$\mathbb{K}$ 值函数. 任给 F：$D\to Y$，约定 $\Delta F(x,h)=F(x+h)-Fx(x,x+h\in D)$.

2.1　F 微分与 G 微分

给定映射 $F:\Omega\subset X\to Y,x_0\in\Omega$，我们常常希望在点 x_0 邻近有近似公式

$$Fx\approx Fx_0+T(x-x_0),$$

其中，T 是某个线性算子. 这直接导向以下定义：

定义 2.1.1　设 $F:\Omega\subset X\to Y,x_0\in\Omega$. 若存在 $T\in L(X,Y)$ ①，使得

$$\Delta F(x_0,h)=Th+o(h),\quad h\to 0. \tag{2.1.1}$$

这意味着

---

① 若已知 F 在 x_0 连续，则只要设 $T:X\to Y$ 是线性算子就够了.

$$\|\Delta F(x_0,h)-Th\| = o(\|h\|), \quad \|h\|\to 0,$$

则说映射 F 在点 x_0 处 Fréchet 可微,简称为 **F 可微**,而称 T 为 F 在 x_0 的 **Fréchet 导数**,简称为 **F 导数**,记作 $F'(x_0)$.

本书中说到可微与导数而未加说明时,概指 F 可微与 F 导数.

以 $T = F'(x_0)$ 代入式(2.1.1) 得到

$$\Delta F(x_0,h) - F'(x_0)h = o(h). \tag{2.1.2}$$

准确地说,这意味着

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h \in B_\delta(0), \text{有 } \|\Delta F(x_0,h) - F'(x_0)h\| \leqslant \varepsilon\|h\|.$$

由式(2.1.2)直接推出,当 $F'(x_0)$ 存在时必是唯一的且 F 在 x_0 连续.

除了 $F'(x_0)$ 是一个算子而非一个数之外,以上所述与经典微分学是高度类似的. 如果改写 h 为 $\mathrm{d}x$,令 $\mathrm{d}F(x_0) = F'(x_0)\mathrm{d}x$,并称 $\mathrm{d}F(x_0)$ 为 F 在 x_0 的微分,就更接近传统微分学了. 但我们并不打算这样做. 当说到"微分"$F'(x_0)h$ 时,所指的无非就是线性映射 $h \to F'(x_0)h$,因而实际上也就是导数 $F'(x_0)$. 因此不妨说**微分就是导数**! 说到 F 微分时,指的就是 F 导数. 不过,这并不意味着我们主张废弃微分一词. 在很多方面,微分仍然发挥着独立作用.

若 F 在 Ω 内处处可微,则得到一个"导函数"

$$F' : \Omega \subset X \to L(X,Y), \quad x \to F'(x).$$

当导函数 $F'(x)$ 的导数存在时记作 $F''(x)$,称它为 F 的二阶导数. 依此类推,完全如同经典微分学中一样, 可定义 r 次可微与 r 阶导数 $F^{(r)}(x)$,$r \geqslant 1$. 若 F 的 r 阶导数 $F^{(r)}(x)$ 在 Ω 内处处存在且对 x 连续,则说 F 在 Ω 内 r 次连续可微,或称 F 为 C^r 映射或 **C^r 函数**. 以 $C^r(\Omega,Y)$ 记从 Ω 到 Y 的 C^r 映射之全体, 约定 $C^0(\Omega,Y) = C(\Omega,Y)$, $C^\infty(\Omega,Y) = \bigcap_1^\infty C^r(\Omega,Y)$, $C^r(\Omega) = C^r(\Omega,\mathbb{K})$ $(0 \leqslant r \leqslant \infty)$. $C^r(\Omega,Y)$ 或 $C^r(\Omega)$ 也简写作 C^r. 上述概念与记号与经典微分学似乎毫无区别. 但应注意, 现在"导数"$F'(x)$ 是一个算子, 而且函数 $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$, $\cdots$ 一般取值于互不相同的空间 Y, $L(X,Y)$, $L(X,L(X,Y))$, $\cdots$, 以至不再能使用 $F(x) - F'(x)$ 这一类的式子. 初次面对这些新情况,你可能有所困惑且颇感不便.

如果说,在理论上引入 F 导数并无任何困难,那么举出计算 F 导数的非平凡例子却不很容易. 眼前只能看几个很简单的例子.

例 2.1.1 (i) 设 $F : \Omega \subset \mathbb{K} \to Y$, $x_0 \in \Omega$, 则显然

$$\Delta F(x_0,h) = ah + o(h), \quad h \to 0$$

等价于

$$\lim_{h\to 0} h^{-1}\Delta F(x_0,h) = a \in Y.$$

若令 $Th = ah\,(h \in \mathbb{K})$,则直接看出 $T \in L(\mathbb{K},Y)$, $\|T\| = \|a\|$, $T(1) = a$. 可见,

$$L(\mathbb{K},Y) \to Y, \quad T \to T(1)$$

是一等距同构. 因此,若等同 $L(\mathbb{K},Y)$ 与 Y,亦即等同 T 与 $T(1)$,则不妨认为

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0} h^{-1}\Delta F(x_0,h), \tag{2.1.3}$$

只要右端极限存在. 在这种情况下,导数的定义就与经典微分学中的定义形式上完全一致了. 而且 $F'(x)$ 如同 $F(x)$ 一样,也是空间 Y 中的向量,因而在运用导数 $F'(x)$ 时并无前面提到的那种不便. 但应记住,式(2.1.3) 仅适用于 x 是实或复变量的情况. 一个实变量函数 $\varphi: [a,b] \subset \mathbb{R} \to Y$ 可解释为空间 Y 中的一条曲线. 若 $t_0 \in [a,b]$,$\varphi'(t_0)$ 存在,则称 $\varphi'(t_0)$ 为曲线 $y = \varphi(t)$ 在 t_0 处的切向量,当 $t_0 = a$ 或 b 时 $\varphi'(t_0)$ 理解为单侧导数. 上述几何用语的设置,并非仅有形式的意义,而是展开某些富有价值的理论的开端.

(ii) 设 H 是一个**实** Hilbert 空间,$f(x) = \|x\|$,$0 \neq x \in H$, 则

$$\begin{aligned}\Delta f(x,h) &= \frac{\|x+h\|^2 - \|x\|^2}{\|x+h\| + \|x\|} = \frac{2\langle x,h\rangle + \|h\|^2}{\|x+h\| + \|x\|}\\ &= \langle \|x\|^{-1}x, h\rangle + o(\|h\|), \quad \|h\| \to 0.\end{aligned}$$

由定理 1.7.4,可等同 $a \in H$ 与泛函 $h \to \langle a,h\rangle$. 于是将上式与式(2.1.2) 对照得出 $f'(x) = \|x\|^{-1}x$.

一般地,若 $f: \Omega \subset X \to \mathbb{R}$ 在 $x \in \Omega$ 可微,则 $f'(x) \in X^*$,称 $f'(x)$ 为 f 在 x 的**梯度**,通常写作 $\nabla f(x)$. 因此,对于实 Hilbert 空间 H 有

$$\nabla \|x\| = \|x\|^{-1}x, \quad 0 \neq x \in H. \tag{2.1.4}$$

注意此结果并不适用于复 Hilbert 空间! 若取 $H = \mathbb{R}^n$,则有

$$\nabla |x| = |x|^{-1}x^{\mathrm{T}}, \quad 0 \neq x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.1.5}$$

其中,$|x|$ 是 Euclid 范数. 此处要取转置的理由将在后面说明. 式(2.1.5)应当已在初等微积分学中见过了.

(iii) 设 $F: \Omega \subset X \to Y$ 是常值映射,即 $Fx \equiv y_0 \in Y(x \in \Omega)$,则显然 $F'(x) \equiv 0 \in L(X,Y)$. 常值函数导数为零,这一点与经典微分学并无区别.

(iv) 设 $F \in L(X,Y)$,则 $\Delta F(x,h) = Fh$,这与式(2.1.2) 对照得出 $F'(x)h = Fh$,从而 $F'(x) = F$. 此处得强调一下,切不可将 $F'(x) = F$ 误读为 $F'(x) = F(x)$! 后者不仅不正确,而且毫无意义. 当 $n \geqslant 2$ 时显然有 $F^{(n)}(x) = 0(x \in X)$,因此 $F \in C^\infty$.

(v) Urysohn 算子 U 定义为

$$(Ux)(t) = \int_a^b F(t,s,x(s))\,\mathrm{d}s, \quad x \in X,$$

其中,$X = C(J)$,$J = [a,b]$,假定 $F(t,s,x)$ 与 $F_x(t,s,x)$ 是 $J \times J \times \mathbb{R}$ 上的连续实函数. 任给 $x,h \in X$,首先施行如下形式演算:

$$U'(x)h = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}U(x+\lambda h)\Big|_{\lambda=0}$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} F(t,s,x(s) + \lambda h(s)) \mid_{\lambda=0} \right] \mathrm{d}s$$

$$= \int_a^b F_x(t,s,x(s)) h(s) \mathrm{d}s \triangleq Th. \tag{2.1.6}$$

固定 $x \in X$,令 $K = [-\|x\|_0 - 1, \|x\|_0 + 1]$,$M = \sup_{t,s \in J, y \in K} |F_x(t,s,y)|$,则

$$\|Th\|_0 \leqslant M(b-a)\|h\|_0,$$

可见 $T \in L(X)$. 其次,设 $\|h\|_0 < 1$,则

$$\begin{aligned}
&\|\Delta U(x,h) - Th\|_0 \\
&\leqslant \sup_{t \in J} \int_a^b |F(t,s,x(s) + h(s)) - F(t,s,x(s)) - F_x(t,x,s(s))| \mathrm{d}s \\
&\leqslant \sup_{t \in J} \int_a^b |F_x(t,s,x(s) + \theta h(s)) - F_x(t,s,x(s))| \ \|h\|_0 \mathrm{d}s \\
&= o(\|h\|_0), \quad \|h\|_0 \to 0,
\end{aligned}$$

其中用了微分中值定理与 $F_x(t,s,y)$ 在 $J \times J \times K$ 上的一致连续性,$\theta = \theta(s) \in (0,1)$. 由以上估计得出 $U'(x)h = Th$. 这就表明,最初由形式演算获得的结果(2.1.6)实际上是正确的,但这并不意味着后面所作的严格检验是多余的.

下面依照习惯的顺序推广经典微分学中的各种结果. 这件事做起来竟如此顺利且结论完美,初看起来似乎令人惊讶. 首先,通常的微分规则都有自然的推广.

命题2.1.1 假定函数 F 与 G 均可微.

(i) 线性规则:若 $F,G: \Omega \subset X \to Y, \alpha,\beta \in \mathbb{K}, x \in \Omega$,则

$$(\alpha F + \beta G)'(x) = \alpha F'(x) + \beta G'(x);$$

(ii) 积规则:设 $F: \Omega \subset X \to U, G: \Omega \subset X \to V, Hx = \varphi(Fx, Gx) (x \in \Omega)$, $\varphi \in L(U,V;Y)$,则

$$H'(x)h = \varphi(F'(x)h, Gx) + \varphi(Fx, G'(x)h). \tag{2.1.7}$$

当 $X = \mathbb{K}$ 时, 式(2.1.7)相当于(由例2.1.1(i)中的约定)

$$H'(x) = \varphi(F'(x), Gx) + \varphi(Fx, G'(x)); \tag{2.1.8}$$

(iii) **链规则**:设 $F: \Omega \subset X \to Y, G: \Omega' \subset Y \to Z, F\Omega \subset \Omega', x \in \Omega$,则

$$(G \circ F)'(x) = G'(Fx)F'(x). \tag{2.1.9}$$

证 取定 $x \in \Omega$, 只需证式(2.1.7)与式(2.1.9). 所用证明循同一模式:首先确认公式右端是 X 上的有界线性算子,然后导出一个形如式(2.1.1)的估计.

证式(2.1.7). 以 $Th (h \in X)$ 记式(2.1.7)右端,则直接看出 $T \in L(X,Y)$. 然后估计

$$\begin{aligned}
\|\Delta H(x,h) - Th\| &= \|\Delta H(x,h) - \varphi(F'(x)h, Gx) - \varphi(Fx, G'(x)h)\| \\
&\leqslant \|\varphi(\Delta F(x,h) - F'(x)h, G(x+h))\| \\
&\quad + \|\varphi(Fx, \Delta G(x,h) - G'(x)h)\| \\
&\quad + \|\varphi(F'(x)h, \Delta G(x,h))\|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \|\varphi\| o(\|h\|)\|G(x+h)\| + \|\varphi\| \|Fx\| o(\|h\|) \\
&\quad + \|\varphi\| \|F'(x)h\| \|\Delta G(x,h)\| \\
&= o(\|h\|), \quad \|h\| \to 0.
\end{aligned}
$$

这表明 $H'(x) = T$，即式(2.1.7)成立.

证式(2.1.9). 下面只写出一个"粗推理"，更严格的论证可如证式(2.1.7)一样作出，并无实质困难，设 $y = Fx, k = \Delta F(x,h), \Phi = G \circ F$，则当 $\|h\| \to 0$ 时有

$$
\begin{aligned}
\Delta\Phi(x,h) = \Delta G(y,k) &= G'(y)k + o(k) \\
&= G'(y)\Delta F(x,h) + o(\Delta F(x,h)) \\
&= G'(y)[F'(x)h + o(h)] + o(h) \\
&= G'(y)F'(x)h + o(h),
\end{aligned}
$$

这得出 $\Phi'(x) = G'(y)F'(x)$，即式(2.1.9) 成立. □

今指出式(2.1.7) ~ (2.1.9)的几种常用的特殊情况. 设 $f,g: \Omega \subset X \to \mathbb{R}$ 可微，则取 $\varphi(u,v) = uv(u,v \in \mathbb{R})$，从式(2.1.7) 得

$$\nabla[f(x)g(x)] = g(x)\nabla f(x) + f(x)\nabla g(x). \tag{2.1.10}$$

若 $f: \Omega \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ 与 $g: \Omega \subset \mathbb{K} \to Y$ 可微，则取 $\varphi(\alpha,y) = \alpha y(\alpha \in \mathbb{K}, y \in Y)$ 从式(2.1.7)得

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \tag{2.1.11}$$

取 $G = T \in L(Y,Z)$，从式(2.1.9) 得

$$(TF)'(x) = TF'(x). \tag{2.1.12}$$

形式上，这意味着**微分运算与有界线性算子可交换**. 若 $f: \Omega \subset X \to \mathbb{R}$ 与 $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 均为可微函数，则由式(2.1.9) 有

$$\nabla g(f(x)) = g'(f(x))\nabla f(x). \tag{2.1.13}$$

若 $F: \Omega \subset X \to Y$ 与 $x(t): \mathbb{K} \to \Omega$ 是可微函数，则由式(2.1.9) 有

$$F(x(t))' = F'(x(t))x'(t). \tag{2.1.14}$$

特别取 $x(t) = x + th$ 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(x+th) = F'(x+th)h. \tag{2.1.15}$$

现在看几个应用上述微分公式的例子.

例 2.1.2 (i) 设 $F: \Omega \subset X \to Y$ 与 $G: \Omega' \subset Y \to Z$ 均二次可微，$F\Omega \subset \Omega'$，$H = G \circ F$，求 $H''(x)hk(=(H''(x)h)k)$. 首先，由式(2.1.9) 有

$$H'(x)k = G'(Fx)F'(x)k.$$

固定 $k \in X$，注意 $L(X,Z) \to Z, T \to Tk$ 是一有界线性算子，因而由式(2.1.12) 在求导时可"越过" 它. 于是

$$
\begin{aligned}
H''(x)hk &= ([G'(Fx)F'(x)]'h)k \\
&= [(F''(Fx)F'(x)h)F'(x) + G'(Fx)F''(x)h]k
\end{aligned}
$$

$$= (G''(Fx)F'(x)h)F'(x)k + G'(Fx)(F''(x)hk),$$

其中，$[G'(Fx)F'(x)]'h$ 的计算用了式(2.1.7)，注意

$$\varphi: L(Y,Z) \times L(X,Y) \to L(X,Z), \quad (A,B) \to AB$$

是一有界双线性算子. 这个例子显示出复合函数二阶导数的复杂性，更不必说高于二阶的导数.

(ii) 设 $F: \Omega \subset X \to X$ 二次可微，$Gx = x - [F'(x)]^{-1}Fx(x \in \Omega)$ 有定义. 等式 $F'(x)(x - Gx) = Fx$ 两边求导得

$$(F''(x)h)(x - Gx) + F'(x)[h - G'(x)h] = F'(x)h,$$

其中用了式(2.1.7). 由以上等式解出

$$G'(x)h = [F'(x)]^{-1}(F''(x)h)(x - Gx), \quad x \in \Omega, h \in X.$$

由此可见，当 $Fx = 0 (\Leftrightarrow x = Gx)$ 时 $G'(x) = 0$. 利用 Gx 构造方程 $Fx = 0$ 近似解的 Newton 迭代公式，正是基于这一事实.

(iii) 设 $f(x) = |x|^p (0 \neq x \in \mathbb{R}^n)$，求 $\nabla f(x)$ 与 $\nabla^2 f(x)$，约定

$$\nabla^2 f(x) = (\nabla f)^{\mathrm{T}\prime}(x). \tag{2.1.16}$$

首先结合式(2.1.13)与式(2.1.5)得出

$$\nabla |x|^p = p|x|^{p-1}\nabla |x| = p|x|^{p-2}x^{\mathrm{T}}.$$

然后用式(2.1.16)与式(2.1.7)，

$$\begin{aligned}(\nabla^2 |x|^p)h &= p(|x|^{p-2}x)'h \\ &= p(p-2)|x|^{p-4}(x^{\mathrm{T}}h)x + p|x|^{p-2}h \\ &= [p(p-2)|x|^{p-4}xx^{\mathrm{T}} + p|x|^{p-2}I]h,\end{aligned}$$

故得

$$\nabla^2 |x|^p = p(p-2)|x|^{p-4}xx^{\mathrm{T}} + p|x|^{p-2}I.$$

以上结果在初等分析中也是很有用的，不妨利用

$$\nabla^2 f(x) = \left[\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{n\times n} \tag{2.1.16$'$}$$

依坐标方式完成同一计算. $\nabla^2 f(x)$ 称为函数 $f(x)$ 的 **Hesse 矩阵**.

现在回到式(2.1.2). 当 $\|h\|$ 充分小时它提供了近似公式

$$\Delta F(x,h) \approx F'(x)h. \tag{2.1.17}$$

限制 $\|h\|$ 充分小，正是微分概念的局部性质所致. 如果微分学的结果总限制在某个充分小的局部使用，那么其价值就十分有限了. 幸而有方法克服这种局部性，本质的跨越是能从式(2.1.17) 过渡到关于 $\|\Delta F(x,h)\|$ 的一个估计式，不必限制 $\|h\|$ 充分小. 这就是**中值定理**，它是将微分学用于研究函数的主要依据，因而在微分学中处于中心地位.

定理 2.1.1 设 $F: \Omega \subset X \to Y$，线段 $[x,y] \subset \Omega$，F 在 $[x,y]$ 上每点可微，则成立

$$\|Fx - Fy\| \leq \sup_{z \in [x,y]} \|F'(z)\| \|x - y\|. \tag{2.1.18}$$

若 $T \in L(X,Y)$,以 $F - T$ 取代 F,令 $z = x + t(y - x)$,则从式(2.1.18)得

$$\| Fx - Fy - T(x - y) \| \leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \| F'(x + t(y - x)) - T \| \| x - y \|. \tag{2.1.19}$$

证　令 $\beta = \sup\limits_{z \in [x,y]} \| F'(z) \|$,可设 $\beta < \infty$. 由式(1.6.9),只要证

$$| f(Fx - Fy) | \leqslant \beta \| f \| \| h \|, \quad f \in Y^*, h = x - y.$$

取定 $f \in Y^*$,令 $g = \operatorname{Re} f$,则

$$| f(Fx - Fy) | = \varepsilon f(Fx - Fy) = g(\varepsilon Fx - \varepsilon Fy),$$

其中,$|\varepsilon| = 1$. 令 $\varphi(t) = g(\varepsilon F(x + th))$,则 φ 是$[0,1]$上的可微实函数. 于是

$$\begin{aligned} | f(Fx - Fy) | &= | \varphi(1) - \varphi(0) | = | \varphi'(\theta) | \quad (0 < \theta < 1) \\ &= | g(\varepsilon F'(x + \theta h) h) | \\ &\leqslant | f(\varepsilon F'(x + \theta h) h) | \leqslant \beta \| f \| \| h \|. \end{aligned}$$
□

从已习惯于 Lagrange 中值定理的眼光看来,定理 2.1.1 似乎不能令人满意. 对此,可指明以下几点. 首先,对于可微函数 $f: \Omega \subset X \to \mathbb{R}$,$[x,y] \subset \Omega$, 确可建立如下"Lagrange 中值定理":

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y), \quad \xi \in [x,y]. \tag{2.1.20}$$

为此,只要对函数 $\varphi(t) = f(x + t(y - x))$ 用老的 Lagrange 中值定理就行了. 但对于 $F: \Omega \subset X \to Y$,只要 $Y \neq \mathbb{R}$,就不可能建立如上形式的结果. 用反例 $F(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 足以说明问题:$\forall \theta \in (0,2\pi)$,有

$$F(2\pi) - F(0) = 0 \neq \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = F'(\theta).$$

更重要的是,对于中值定理的大多数应用来说,一个形如式(2.1.20)的等式未必强于形如式(2.1.18)的不等式.

如同在经典微分学中一样,继中值定理之后的下一个目标是 Taylor 公式. 但为此需作点准备. 首先要解释将出现于 Taylor 公式中的 $F^{(n)}(x)h^n$. 设 $F: \Omega \subset X \to Y$ 在 x 处 n 次可微,则

$$F^{(n)}(x) \in L(\overbrace{X, L(X, \cdots, L(X}^{n\text{重}}, Y), \cdots)).$$

所涉算子空间显然不是我们乐于使用的,幸而可利用命题 1.5.1 以 $L^n(X,Y)$ 取而代之. 认定 $F^{(n)}(x) \in L^n(X,Y)$,对任给 $h_i \in X(1 \leqslant i \leqslant n)$, 如 1.5 节中的约定记

$$F^{(n)}(x)h_1h_2\cdots h_n = (\cdots((F^{(n)}(x)h_1)h_2)\cdots)h_n,$$

则 $F^{(n)}(x)h^n(h \in X)$ 获得确定意义. 其次指出,$F^{(n)}(x)$ 还是对称的.

命题 2.1.2　设 $F: \Omega \subset X \to Y, x \in \Omega, F^{(n)}(x)$ 存在,$n \geqslant 1$,则 $F^{(n)}(x) \in L_s^n(X,Y)$.

证　因可对 n 用归纳法,只考虑 $n = 2$ 的情况,这归于证

$$F''(x)hk = F''(x)kh, \quad h,k \in X. \tag{2.1.21}$$

$\forall \varepsilon > 0$,取 $\delta > 0$,使当 $\| z \| \leqslant 2\delta$ 时有 $\| \Delta F'(x,z) - F''(x)z \| \leqslant \varepsilon \| z \|$. 取定 $h,k \in \bar{B}_\delta(0)$,令

$$I = F(x+h+k) - F(x+h) - F(x+k) + Fx,$$

则 I 关于 (h,k) 对称. 利用不等式(2.1.19) 估计

$$\begin{aligned} & \| I - F''(x)hk \| \\ \leqslant & \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \| \Delta F'(x+tk,h) - F''(x)h \| \, \| k \| \\ \leqslant & \sup_{\| z \| \leqslant \delta} \delta[\, \| \Delta F'(x,h+z) - F''(x)(h+z) \| + \| \Delta F'(x,z) - F''(x)z \| \,] \\ \leqslant & \delta(2\varepsilon\delta + \varepsilon\delta) = 3\varepsilon\delta^2. \end{aligned}$$

同理, 可证 $\| I - F''(x)kh \| \leqslant 3\varepsilon\delta^2$, 因而

$$\| F''(x)hk - F''(x)kh \| \leqslant 6\varepsilon\delta^2, \quad h,k \in \bar{B}_\delta(0).$$

利用 $F''(x)$ 的齐次性及 ε 的任意性,即得出式(2.1.21)成立. □

另一项准备工作是界定向量值函数的 Riemann 积分. 对积分的系统考察将在下章中进行. 此处所需的积分只是实函数 Riemann 积分的平凡推广,只需不多的几句话就可交代清楚. 设 Y 是 Banach 空间, $J = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $\varphi \in C(J,Y)$,则必存在

$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^n \varphi(\tau_i)\Delta t_i, \tag{2.1.22}$$

其中, 和式 $\sum \varphi(\tau_i)\Delta t_i$ 是对区间 J 的任一分划

$$a = t_0 \leqslant \tau_1 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant \tau_n \leqslant t_n = b$$

作的, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. 如此定义的积分具有通常积分的那些熟知性质, 如成立 Newton-Leibniz 公式与分部积分公式,后者可表为

$$\int_a^b g(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = g(t)\varphi(t)\Big|_a^b - \int_a^b g'(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t, \tag{2.1.23}$$

其中, $g \in C^1(J,\mathbb{K})$, $\varphi \in C^1(J,Y)$. 这些都易验证,不必细述.

作了以上准备之后,现在已可建立如下的 **Taylor 公式:**

定理 2.1.2 设 $F: \Omega \subset X \to Y$,线段 $[x,x+h] \subset \Omega$, $1 \leqslant r < \infty$.

(i) 若 F 在 $[x,x+h]$ 上 $r-1$ 次可微, $F^{(r)}(x)$ 存在,则成立 Taylor 公式

$$F(x+h) = \sum_{k=0}^r \frac{1}{k!}F^{(k)}(x)h^k + R_r, \quad \| R_r \| = o(\| h \|^r), \tag{2.1.24}$$

其中, $F^{(0)}(x)h^0 = Fx$;

(ii) 若 $F \in C^r$, Y 完备,则成立带积分余项的 Taylor 公式

$$\begin{cases} F(x+h) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!}F^{(k)}(x)h^k + R_r, \\ R_r = \dfrac{1}{(r-1)!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{r-1}F^{(r)}(x+th)h^r\,\mathrm{d}t. \end{cases} \tag{2.1.25}$$

证 (i) 用归纳法. 若 $r=1$,则式(2.1.24)就是式(2.1.2). 设 $r>1$,令 $Gh=R_r$,则

$$\|R_r\| = \|Gh - G(0)\| \leqslant \sup_{z\in[0,h]} \|G'(z)\| \, \|h\|$$

$$= \sup_{z\in[0,h]} \left\| F'(x+z) - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!} F^{(k+1)}(x) z^k \right\| \|h\|$$

$$= o(\|h\|^{r-1})\|h\| = o(\|h\|^r),$$

其中,对 F' 用了归纳假设且用到 $(F^{(k)}(x)h^k)_h{}' = kF^{(k)}(x)h^{k-1}$ (这可从积规则(命题2.1.1(ii))的一个多重推广得出),$F^{(k)}(x)h^{k-1}$ 表示算子

$$F^{(k)}(x)h^{k-1}: X\to Y, z\to F^{(k)}(x)h\cdots hz, \quad k\geqslant 1.$$

(ii) 当 $r=1$ 时,式(2.1.25)即等式

$$\Delta F(x,h) = \int_0^1 F'(x+th)h\mathrm{d}t,$$

它直接由 Newton-Leibniz 公式得出. 今设 $r>1$ 并作归纳假设,则

$$F(x+h) - \sum_{k=0}^{r-2} \frac{1}{k!} F^{(k)}(x)h^k$$

$$= \frac{1}{(r-2)!}\int_0^1 (1-t)^{r-2} F^{(r-1)}(x+th)h^{r-1}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{(r-1)!}F^{(r-1)}(x)h^{r-1} + \frac{1}{(r-1)!}\int_0^1 (1-t)^{r-1}F^{(r)}(x+th)h^r\mathrm{d}t,$$

最后一步用了分部积分. 以上等式正表明式(2.1.25)成立. □

设 $M=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\|F^{(r)}(x+th)\|$,则对式(2.1.25)中的余项 R_r 有估计

$$\|R_r\| \leqslant \frac{1}{(r-1)!}\int_0^1 (1-t)^{r-1} M\|h\|^r\mathrm{d}t = \frac{M\|h\|^r}{r!}. \tag{2.1.26}$$

特别地,取 $r=1$ 得到

$$\|\Delta F(x,h)\| \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\|F'(x+th)\| \, \|h\|,$$

这与式(2.1.18)一致(取 $y=x+h$). 因此,式(2.1.26)可看成中值定理的某种高阶拓广. 上述结果无疑是令人满意的.

鉴于已知 Lagrange 中值公式已不适用于向量值函数,自然不能指望对向量值函数建立带 Lagrange 余项的 Taylor 公式. 不过作为中值公式(2.1.20)的高阶推广,对于实值函数仍可建立以下结果:

命题 2.1.3 设 $f:\Omega\subset X\to\mathbb{R}$, $[x,x+h]\subset\Omega$, f 在线段 $[x,x+h]$ 上每点 r 次可微, $1\leqslant r<\infty$, 则存在 $\xi\in[x,x+h]$, 使得如下 Taylor 公式成立:

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{r-1}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)h^k + \frac{1}{r!}f^{(r)}(\xi)h^r. \tag{2.1.27}$$

证 令 $\varphi(t)=f(x+th)$,则 $\varphi(t)$ 是 $[0,1]$ 上 r 次可微的实值函数. 对 $\varphi(t)$ 应

用带 Lagrange 余项的 Taylor 公式,恰好得出式(2.1.27).　□

顺着通常微分学的思路,现在似乎该转入“多元函数微分学”了. 但是,在抽象空间的框架内,这一思路颇成问题,因为并无“一元函数”与“多元函数”的严格划分. 例如,“二元函数” $F(x,y)\,(x\in X, y\in Y)$ 不妨看成空间 $Z=X\times Y$ 上的“一元函数”$F(z)\,(z\in Z)$. 不过,仍可提出如下问题:$F(z)$ 的可微性与 $F(x,y)$ 分别对变元 x,y 的可微性有何关系?这就使偏导数概念成为必要. 逻辑上,完全如同经典微分学一样,偏导数就是对各别变元的导数,甚至不必写出一个正式定义.

完全沿用熟知的偏导数记号,如对 $F(x,y):\Omega\subset X\times Y\to E$ 使用记号

$$F_x(x,y),\ \frac{\partial F(x,y)}{\partial x},\quad F_{xy}(x,y),\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$$

等,只要这些偏导数存在. 但此处又该提醒你,某些常识可能不适用了. 因为

$$F_x(x,y)\in L(X,E),\quad F_y(x,y)\in L(Y,E),$$

切不可使用 F_x+F_y 这类式子,除非 $X=Y$. 还有,因为

$$F_{xy}(x,y)\in L(Y,L(X,E)),\quad F_{yx}(x,y)\in L(X,L(Y,E)),$$

即使以上两个混合偏导数均存在且连续,也未必能写 $F_{xy}=F_{yx}$!这些似乎反常的情况是需谨慎对待的.

对于上述的函数 $F(z)$, $z=(x,y)$,我们的兴趣在于 3 个导数 $F'(z)$, $F_x(x,y)$ 与 $F_y(x,y)$ 之间的关系. 下面在一个远为一般的形式下解答此问题:

定理2.1.3　设 $X_j, Y_i\,(1\leqslant j\leqslant n, 1\leqslant i\leqslant m)$ 均为$\mathbb{K}$上的赋范空间,$X=\prod X_j$, $Y=\prod Y_i$, $F:\Omega\subset X\to Y$ 表为

$$F(x)=(y_1,y_2,\cdots,y_m),\quad y_i=F_i(x),\ 1\leqslant i\leqslant m,$$

其中, $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Omega$, 则以下结论成立:

(i) 若 $F'(x)$ 存在,则 $\partial F_i(x)/\partial x_j\,(1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n)$ 均存在且

$$F'(x)h=J(x)h,\tag{2.1.28}$$

其中, $J(x)=\left[\dfrac{\partial F_i(x)}{\partial x_j}\right]$ 是一个 $m\times n$ 阶算子矩阵, $h=(h_1,h_2,\cdots,h_n)\in X$,在“乘积”$J(x)h$ 中 h 看成列,矩阵 $J(x)$ 与 h 的“乘法” 形式上依据通常的矩阵乘法规则施行;

(ii) 设 $1\leqslant r\leqslant\infty$,则 $F\in C^r\Leftrightarrow$ 每个 $F_i\,(1\leqslant i\leqslant m)$ 的所有 $<r+1$ ①阶的偏导数均存在且连续.

证　(i) 设 $P_j: X\to X_j$ 与 $Q_i: Y\to Y_i$ 是投影, $K_j: X_j\to X$ 与 $L_i: Y_i\to Y$ 是嵌入 $(1\leqslant j\leqslant n, 1\leqslant i\leqslant m)$,它们都是连续线性算子(见命题1.4.2). 直接看出

---

① 注意不可将条件 $k<r+1$ 改写成 $k\leqslant r$. 实际上, $k<r+1\Leftrightarrow k\leqslant r$ 且 $k<\infty$. 因不排除 $r=\infty$,故用 $k<r+1$ 这一表达较好.

$$\begin{cases} \sum_i L_i Q_i = 1_Y, \quad \sum_j K_j P_j = 1_X, \\ F = \sum_i L_i F_i, \quad F_i = Q_i F,\ 1 \leqslant i \leqslant m. \end{cases} \tag{2.1.29}$$

因映射 $x_j \to F_i(x)$ 可分解为

$$x_j \xrightarrow{K_j} (0,\cdots,x_j,\cdots,0) \xrightarrow{\text{平移}} x \xrightarrow{F} F(x) \xrightarrow{Q_i} F_i(x),$$

故由链规则与式(2.1.12)有

$$\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} = Q_i F'(x) K_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{2.1.30}$$

任给 $h \in X$,结合式(2.1.29) 与式(2.1.30) 得

$$F'(x)h = \sum_{i,j} L_i Q_i F'(x) K_j P_j h = \sum_i L_i \sum_j \frac{\partial F_i(x)}{\partial F_j} h_j,$$

这正表明式(2.1.28)成立.

(ii) 显然只要考虑 $r < \infty$. 因可对 r 用归纳法,又只需考虑 $r = 1$ 的情况. 若 $F \in C^1$,则由已证的(i),$\partial F_i(x)/\partial x_j$ 均存在且对 x 连续(由式(2.1.30)). 反之,设偏导数 $\partial F_i(x)/\partial x_j(1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n)$ 均存在且对 x 连续,今证 $F \in C^1$. 由 $F = \sum L_i F_i$ 只要证 $F_i \in C^1(1 \leqslant i \leqslant m)$,这就不妨设 $m = 1, F = F_1$. 若能证

$$F'(x) = \sum_j \frac{\partial F(x)}{\partial x_j} P_j, \quad x \in \Omega, \tag{2.1.31}$$

则显然有 $F \in C^1$. 为证式(2.1.31),不妨设 $n = 2$(一般情况并无原则困难,只是记号更繁些). 取定 $x = (x_1, x_2) \in \Omega$,以 T 记式(2.1.31) 之右端,则 $T \in L(X,Y)$. 设 $x + h \in \Omega, h = (h_1, h_2) \in X$,则

$$\begin{aligned} \| \Delta F(x,h) - Th \| &\leqslant \left\| F(x+h) - F(x_1, x_2 + h_2) - \frac{\partial F(x)}{\partial x_1} h_1 \right\| \\ &\quad + \left\| F(x_1, x_2 + h_2) - F(x) - \frac{\partial F(x)}{\partial x_2} h_2 \right\| \\ &\leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \left\| \frac{\partial F(x_1 + th_1, x_2 + h_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial F(x)}{\partial x_1} \right\| \| h_1 \| \\ &\quad + \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \left\| \frac{\partial F(x_1, x_2 + th_2)}{\partial x_2} - \frac{\partial F(x)}{\partial x_2} \right\| \| h_2 \| \\ &= o(\| h_1 \| + \| h_2 \|), \quad \| h \| \to 0, \end{aligned}$$

其中用了式(2.1.19)与偏导数的连续性. 于是 $F'(x) = T$,如所要证. □

式(2.1.28)中的算子矩阵 $J(x)$ 称为 F 在 x 的 **Jacobi 矩阵**. 从式(2.1.28)看来,理所当然地应将 $J(x)$ 与 $F'(x)$ 视为等同,今后将直接写 $F'(x) = J(x)$. 相对于偏导数 $\partial F_i(x)/\partial x_j$,也称 $F'(x)$ 为**全导数**. 常用的几种特殊情况是

(i) $m = 1$,令 $F = F_1$,则

$$\begin{cases} F'(x) = \left(\dfrac{\partial F(x)}{\partial x_1}, \dfrac{\partial F(x)}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial F(x)}{\partial x_n}\right), \\ F'(x)h = \sum\limits_j \dfrac{\partial F(x)}{\partial x_j} h_j, \quad h = (h_1, h_2, \cdots, h_n) \in X. \end{cases} \tag{2.1.32}$$

式(2.1.32)正是通常全微分公式的推广. 特别地,若取 $X_j = Y = \mathbb{R}(1 \leqslant j \leqslant n)$,则式(2.1.32)给出 $\nabla F(x) = F'(x)$ 的表达式. 这就解释了,$\mathbb{R}^n$ 上的可微实函数的梯度为什么应写成行向量.

(ii) $n = 1$,令 $X = X_1$,则 $F'(x)$ 是一个列矩阵,不妨写作

$$F'(x) = (F_1'(x), F_2'(x), \cdots, F_m'(x))^{\mathrm{T}}. \tag{2.1.33}$$

(iii) 若 $X_j = Y_i = \mathbb{R}(1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant i \leqslant m)$,则 $F: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,此时 $F'(x)$ 就是通常的 Jacobi 矩阵,它是一个 $m \times n$ 阶实矩阵.

关于 F 微分,当然不至再无事可做,但基本的理论框架已大体构建完毕. 你大概已看到,F 微分理论以相当完美的形式推广了经典微分学. 从前面的内容来看,很难察觉到空间的无限维性带来什么严重影响,似乎可以得出结论:对于 F 微分理论来说,空间的维数并不是一个重要因素. 如果仅从微分公式及微分学定理的形式方面考虑,可以说事情大抵如此. 但若谈及可微性,那么有限维与无限维两种情况就完全不可相提并论了. 你只要想想:无限维空间上的线性函数尚且不必是连续的! 要害问题是:对于无限维空间中的函数,"F 可微"是一个难以验证的极强的条件. 如果分析学中用到的函数很少是 F 可微的,那么 F 微分理论势必成为一个形式优美的空洞理论,以至不免被人们摒弃. 当然,F 微分的情况还不至于如此严重,但它不能充分满足应用之需要则是肯定的.

为弥补 F 微分的上述缺陷,人们提出了各式各样的弱微分概念,其中,有些已衍生成规模可观的数学分支,非此处所能深入讨论. 但所谓方向导数与 G 微分,则不失为既简单又颇常用,值得在此作一介绍.

定义 2.1.2 设 $F: D \subset X \to Y, x \in D, h \in X$. 令

$$F_+'(x,h) = \lim_{t \to 0^+} t^{-1} \Delta F(x, th), \tag{2.1.34}$$

$$F_-'(x,h) = \lim_{t \to 0^-} t^{-1} \Delta F(x, th), \tag{2.1.35}$$

$$F'(x,h) = \lim_{t \to 0} t^{-1} \Delta F(x, th) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(x + th) \Big|_{t=0}, \tag{2.1.36}$$

只要这些极限存在①,三者分别称为 F 在点 x 沿 h 的右侧方向导数、左侧方向导数与**方向导数**. 若 $\forall h \in X, F'(x,h)$ 存在,则说 F 在 x 处 **G 可微**,并称 $F'(x,h)$ 为 F

---

① $F_+'(x,h)$ 存在隐含条件:当 $t > 0$ 充分小时 $x + th \in D$;对于 $F_-'(x,h)$ 与 $F'(x,h)$ 亦有类似要求. 当 $x \in D^\circ$ 时上述条件显然满足,但并未要求 $x \in D^\circ$,也不必 $D^\circ \neq \varnothing$.

在 x 的 G 微分,也记作 $\mathrm{D}F(x,h)$. 若 $\mathrm{D}F(x) \triangleq \mathrm{D}F(x,\cdot) \in L(X,Y)$,则说 F 在 x 为 **G 可导**,并称 $\mathrm{D}F(x)$ 为 F 在 x 的 **G 导数**①.

由式(2.1.36)直接看出恒有 $F'(x,0)=0$,故仅需考虑 $h\neq 0$ 的情况. 其次易见 $F'_{\pm}(x,h)$ 对 h 是正齐次的,因此原则上只要考虑 $\|h\|=1$ 的情况就够了,微积分学中所用的方向导数就限于这种情况. 不过从运用方便着眼,还是以不限制 $\|h\|=1$ 为好. 此外易验证

$$F'_{-}(x,h) = -F'_{+}(x,-h), \tag{2.1.37}$$

因此原则上只需用右侧方向导数. 对于 $f: D\subset X\to\mathbb{K}$, 通常记 $\delta f(x,h)=f'(x,h)$(假定其存在),且称它为 f 关于增量 h 的一阶变分. 变分概念源于变分学,即研究泛函极值的一个数学分支,其历史可追溯到微积分学的开创时期. 变分学被公认为是近代微分理论的渊源之一.

G 可微通常是一个较弱的条件,根本无法与 F 可微性相比. 实际上,方向导数的定义根本不涉及 X 中的拓扑结构,因而只要假定 X 是向量空间就够了. 对于空间 Y 的要求也很低,只要它是一个拓扑向量空间就行. 至于 G 可微与 F 可微的关系,则可建立如下简单结果(其证明是容易的,从略):

命题 2.1.4　设 $F: \Omega\subset X\to Y, x\in\Omega$.

(i) 若 $F'(x)$ 存在,则 $F'(x,h)=\mathrm{D}F(x)h=F'(x)h(\forall h\in X)$;

(ii) F 在 x 处 F 可微的充要条件是 F 在 x 处 G 可导且式(2.1.36)关于 $h\in X$, $\|h\|=1$ 一致地成立.

最后看几个简单的解释性例子.

例 2.1.3　(i) 设 $f(x)=\|x\|, 0\neq h\in X$, 直接看出

$$f'_{\pm}(0,h)=\pm\|h\|.$$

可见 $f'_{+}(0,h)\neq f'_{-}(0,h)$,因而 $f'(0,h)$ 不存在. 以上结论特别可用于

$$f(x)=\int_0^1 |x(t)|\,\mathrm{d}t,\quad x\in C[0,1];$$

(ii) 设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 定义为 $f(0)=0$,

$$f(x)=|x|^{-2}x_1^2x_2,\quad 0\neq x\in\mathbb{R}^2.$$

由 $f(tx)=tf(x)$ 得出 $f'(0,h)=f(h)(h\in\mathbb{R}^2)$. 此例表明,即使 f 在 $x=0$ 处 G 可微, $f'(0,\cdot)$ 也未必是线性的;

(iii) 设 $F: X\to Y$ 是一个无界线性算子(当 $\dim X=\infty$ 时这种算子必存在), $\forall x,h\in X$,有 $\mathrm{D}F(x,h)=Fh$ 且 $\mathrm{D}F(x,\cdot)$ 是无界线性算子,因而 F 处处不是 G 可导的.

---

① G 微分是由 Gâteaux 于 1922 年首先引入的. 关于 G 微分的定义与记号,文献中互有差异的说法颇多,引用相关结论时需注意仔细辨别.

2.2 空　间　$\mathscr{E}^r$

近代分析学中已成为标准模式的做法是:在引进某种分析运算(如微分运算)的同时,形成相应的函数类,然后在其中定义适当的拓扑结构,得到满足某些预定要求的函数空间,并将其作为展开相关分析课题的框架.

微分学所提供的函数类主要就是 C^r 函数类. 本节的任务就是要在 C^r 函数类中定义适当的拓扑,将其构建为所需要的空间 $\mathscr{E}^r$. 拓扑的选择实际上就是收敛性的选择. 过强的收敛性难以满足,以至缺少利用机会. 过弱的收敛性推理功能薄弱,无法用于导向深刻结论的分析论证. 从通常的经验看来,为使连续性得以保持,某种程度上的一致收敛似乎不可缺少. 就 C^r 函数类而言,所谓"C^r 局部一致收敛"是一种较适当的选择.

定义 2.2.1 设 X 与 Y 是赋范空间,$\Omega\subset X$,$F,F_n\in C^r(\Omega,Y)$ $(n\in\mathbb{N})$,$0\leqslant r\leqslant\infty$. 若对任给 $x\in\Omega$,存在 x 的邻域 V,使得在 V 内 $F_n\rightrightarrows F$,则说 $\{F_n\}$ 在 Ω 内**局部一致收敛**于 F. 若对每个紧集 $K\subset\Omega$,在 K 上 $F_n\rightrightarrows F$,则说 $\{F_n\}$ 在 Ω 内**紧一致收敛**于 F. 若当 $0\leqslant k<r+1$ 时 $\{F_n^{(k)}\}$ 在 Ω 内局部一致收敛(或紧一致收敛)于 $F^{(k)}$,则说 $\{F_n\}$ 在 Ω 内 C^r 局部一致收敛(或 C^r 紧一致收敛)于 F.

C^r 局部一致收敛与 C^r 紧一致收敛这两个术语并不通用,但的确能带来极大方便,不妨权且用之. 显然局部一致收敛蕴含紧一致收敛. 若 $\dim X<\infty$,$\Omega\subset X$,则 Ω 是 LCH,于是在 Ω 内的局部一致收敛就是紧一致收敛.

关于 C^r 局部一致收敛有以下基本结果:

定理 2.2.1 设 X,Y 是赋范空间,Y 完备,$\Omega\subset X$,$\{F_n\}\subset C^r(\Omega,Y)$,$1\leqslant r\leqslant\infty$,$\{F_n\}$ 在 Ω 内点态收敛于 F,当 $1\leqslant k<r+1$,$m,n\to\infty$ 时 $\{F_m^{(k)}-F_n^{(k)}\}$ 在 Ω 内局部一致收敛于零,则 $F\in C^r(\Omega,Y)$ 且 $\{F_n\}$ 在 Ω 内 C^r 局部一致收敛于 F.

证 因可设 $r<\infty$ 且可对 r 用归纳法,故只需考虑 $r=1$ 的情况. 由定理条件,当 $m,n\to\infty$ 时 $\{F'_m-F'_n\}$ 在 Ω 内局部一致收敛于零. 因 $L(X,Y)$ 完备,故 $\{F'_n\}$ 必在 Ω 内局部一致收敛于某个映射 $G:\Omega\to L(X,Y)$,且用一个标准的论证知 G 在 Ω 内连续. 任取 $B=B_r(a)\subset\Omega$,设 $r>0$ 充分小. $\forall x\in B$,由式(2.1.19)可得

$$\begin{aligned}\|F_mx-F_nx\|&\leqslant\|F_ma-F_na\|+\|(F_m-F_n)x-(F_m-F_n)a\|\\&\leqslant\|F_ma-F_na\|+\sup_{y\in B}r\|F'_m(y)-F'_n(y)\|,\end{aligned}$$

这推出在 B 内 $F_n\rightrightarrows F$. 因 $B_r(a)$ 是任取的,故 $\{F_n\}$ 在 Ω 内局部一致收敛于 F.

余下只要证 $F'(a)=G(a)$. $\forall\varepsilon>0$,取 $n_0\in\mathbb{N}$,使得

$$\|F'_m(x)-F'_n(x)\|<\varepsilon,\quad x\in B_r(a),m,n\geqslant n_0.\tag{2.2.1}$$

以下设 $h \in B_r(0)$，$m,n \geqslant n_0$. 由中值定理与式(2.2.1)有

$$\begin{aligned}&\| \Delta F_m(a,h) - \Delta F_n(a,h) \| \\ \leqslant & \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \| F'_m(a+th) - F'_n(a+th) \| \, \| h \| \leqslant \varepsilon \| h \|.\end{aligned}$$

然后令 $m \to \infty$ 得

$$\| \Delta F(a,h) - \Delta F_n(a,h) \| \leqslant \varepsilon \| h \|, \quad n \geqslant n_0.$$

固定一个 $n \geqslant n_0$，取 $\delta \in (0,r)$，使当 $h \in B_\delta(0)$ 时，

$$\| \Delta F_n(a,h) - F_n{}'(a)h \| \leqslant \varepsilon \| h \|.$$

由式(2.2.1)直接推出 $\| G(a) - F_n{}'(a) \| \leqslant \varepsilon$. 综上得到 $\forall h \in B_\delta(0)$，有

$$\| \Delta F(a,h) - G(a)h \| \leqslant 3\varepsilon \| h \|,$$

这正表明 $F'(a) = G(a)$，如所要证. □

定理2.2.1表明，在 C^r 函数类中采用 C^r 局部一致收敛是合理的.

下面限于对 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 这种情况考虑空间 $C^r(\Omega,E)$，本书中 E 总用来表示给定的 Banach 空间. 之所以选择 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，本质的理由是 Ω 是一个第二可数的 LCH，因而便于在 $C^r(\Omega,E)$ 中导入自然的 F 空间结构. 另一个技术性的理由是对于 $u \in C^r(\Omega,E)$，可用 u 的偏导数来表示其全导数(由定理2.1.3)，而偏导数是 E 值函数. 设 $1 \leqslant m < r+1$，则 u 有 m 阶连续偏导数

$$\frac{\partial^m u(x)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_m}}, \quad 1 \leqslant i_k \leqslant n, 1 \leqslant k \leqslant m, x \in \Omega. \tag{2.2.2}$$

反复应用式(2.1.12)得出

$$f\left(\frac{\partial^m u(x)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_m}}\right) = \frac{\partial^m f(u(x))}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_m}}, \quad f \in E^*.$$

而上式右端与微分顺序无关，于是由推论1.6.1得出偏导数(2.2.2)亦与微分顺序无关. 这就可将它写成更规范的形式

$$\frac{\partial^m u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_m}},$$

其中，$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$，它满足 $|\alpha| \triangleq \sum \alpha_i = m$；若某个 $\alpha_i = 0$，则实际上并未对变元 x_i 求导. 然后采取的一个进一步的措施看似纯属记号约定，但其作用至大影响深远. 约定

$$\partial^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}, \tag{2.2.3}$$

其中，$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$，$|\alpha| < r+1$；当 $\alpha = 0$ 时约定 $\partial^\alpha u(x) = u(x)$. 与式(2.2.3)相配合，还约定以下记号：

$$\begin{cases} \partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdots \partial_n^{\alpha_n}, & x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}, \\ \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!, & \dbinom{\alpha}{\beta} = \dfrac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}, \end{cases} \tag{2.2.4}$$

其中，$\alpha,\beta \in \mathbb{Z}_+^n$，$\beta \leqslant \alpha$（即 $\beta_i \leqslant \alpha_i$，$1 \leqslant i \leqslant n$），$\partial = (\partial_1,\partial_2,\cdots,\partial_n)$，$\partial_j = \partial/\partial x_j (1 \leqslant j \leqslant n)$，$x = (x_1,x_2,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. 这些缩写记号的好处在下面建立的一组微分公式中得到充分体现.

命题2.2.1 设 $u \in C^m(\Omega,E)$，$\varphi \in C^m(\Omega)$，$1 \leqslant m < \infty$，则成立以下公式：

$$u^{(m)}(x)h^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!}\partial^\alpha u(x)h^\alpha, \tag{2.2.5}$$

$$u(x+h) = \sum_{|\alpha|<m} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha u(x)h^\alpha + \sum_{|\alpha|=m}\frac{m}{\alpha!}\int_0^1 (1-t)^{m-1}\partial^\alpha u(x+th)h^\alpha \mathrm{d}t, \tag{2.2.6}$$

$$\partial^\alpha[\varphi(x)u(x)] = \sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\partial^{\alpha-\beta}\varphi(x)\partial^\beta u(x). \tag{2.2.7}$$

式(2.2.5)中 $h \in \mathbb{R}^n$；式(2.2.6)中 $[x,x+h] \subset \Omega$；式(2.2.7)中 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$，$|\alpha| \leqslant m$.(2.2.7)称为**Leibniz 公式**.

证 结合式(2.2.5)与式(2.1.24)得出 Taylor 公式(2.2.6)；式(2.2.5)与式(2.2.7)可用归纳法证明. 今以证式(2.2.7)为例说明如下：设式(2.2.7)已获证，$|\alpha|+1=|\alpha'|\leqslant m$，今证当以 $\alpha' \in \mathbb{Z}_+^n$ 取代 α 时式(2.2.7)仍成立. 不妨设 $\alpha' = \alpha + e_1$，$e_1 = (1,0,\cdots,0)$（以 e_j 取代 e_1 并无本质不同）. 为书写简便，略去变量 x，则

$$\begin{aligned}
\partial^{\alpha'}(\varphi u) &= \sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}[\partial^{\alpha-\beta}\partial_1\varphi\partial^\beta u + \partial^{\alpha-\beta}\varphi\partial^\beta\partial_1 u] \\
&= \sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\partial^{\alpha'-\beta}\varphi\partial^\beta u + \sum_{e_1\leqslant\beta\leqslant\alpha'}\binom{\alpha}{\beta-e_1}\partial^{\alpha'-\beta}\varphi\partial^\beta u \\
&= \sum_{e_1\leqslant\beta\leqslant\alpha}\left[\binom{\alpha}{\beta}+\binom{\alpha}{\beta-e_1}\right]\partial^{\alpha'-\beta}\varphi\partial^\beta u + \partial^{\alpha'}\varphi + \partial^{\alpha'}u \\
&= \sum_{\beta\leqslant\alpha'}\binom{\alpha'}{\beta}\partial^{\alpha'-\beta}\varphi\partial^\beta u,
\end{aligned}$$

如所要证. □

式(2.2.5)～(2.2.7)都极有用，但目前主要关注式(2.2.5). 式(2.2.5)的右端可缩写为 $(h\cdot\partial)^m u(x)$，这意味着利用 Newton 公式形式地展开

$$(h\cdot\partial)^m = \Big(\sum_j h_j\partial_j\Big)^m = \sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}h^\alpha\partial^\alpha,$$

然后将其“左乘” $u(x)$，恰得出式(2.2.5)右端. 注意式(2.2.5)中的 h^m 与 h^α 是完全不同的，h^m 只是一个形式记号，并无独立意义，而 $h^\alpha = h_1^{\alpha_1}h_2^{\alpha_2}\cdots h_n^{\alpha_n}$ 则是一个真正的幂函数. 由式(2.2.5)可推出

$$A_m\|u^{(m)}(x)\| \leqslant \max_{|\alpha|=m}\|\partial^\alpha u(x)\| \leqslant B_m\|u^{(m)}(x)\|, \tag{2.2.8}$$

其中，A_m 与 B_m 是与 x 无关的正常数. 因此，对于任一序列 $\{u_k\} \subset C^r(\Omega, E)$，$1 \leqslant m < r+1$，$\{u_k^{(m)}\}$ 在 Ω 内紧一致收敛 $\Leftrightarrow$ 当 $|\alpha| = m$ 时 $\{\partial^\alpha u_k\}$ 在 Ω 内紧一致收敛. 这又推出，$\{u_k\}$ 在 Ω 内 C^r 紧一致收敛 $\Leftrightarrow$ 当 $|\alpha| < r+1$ 时 $\{\partial^\alpha u_k\}$ 在 Ω 内紧一致收敛. 这就将定义 2.2.1 中对收敛性的全导数刻画换成了偏导数刻画. 而这正是下面构成函数空间 $\mathscr{E}^r$ 所需要的.

作了以上准备之后，现在来构成感兴趣的函数空间 $\mathscr{E}^r (0 \leqslant r \leqslant \infty)$. 取 Ω 中紧集的穷竭序列 $\{K_i\}$ (由定理 1.3.7). 任给 $u \in C^r(\Omega, E)$，令

$$\| u \|_{i,k} = \max_{|\alpha| \leqslant k} \| \partial^\alpha u \|_{K_i}, \quad i \in \mathbb{N}, 0 \leqslant k < r+1. \tag{2.2.9}$$

注意本书中总约定 $\| v \|_K = \| v | K \|_0$.

命题 2.2.2　设 $\| u \|_{i,k}$ 由式(2.2.9) 给定，则 $C^r(\Omega, E) (0 \leqslant r \leqslant \infty)$ 依半范族 $\{ \| u \|_{i,k} : i \in \mathbb{N}, 0 \leqslant k < r+1 \}$ 是一个 F 空间，其中，序列收敛就是 Ω 内的 C^r 紧一致收敛(由定义 2.2.1).

证　所给半范族显然是 $C^r(\Omega, E)$ 上的一个分离半范族(由定义 1.2.4). 设 $\{u_m\} \subset C^r(\Omega, E)$ 是一序列，$K \subset \Omega$ 是一紧集，则 i 充分大时 $K \subset K_i$. 由式(1.2.8)，当 $m \to \infty$ 时，

$$\begin{aligned} u_m \to 0 &\Leftrightarrow \| u_m \|_{i,k} \to 0, \ i \in \mathbb{N}, 0 \leqslant k < r+1 \\ &\Leftrightarrow \text{在 } K_i \text{ 上 } \partial^\alpha u_m \rightrightarrows 0, \ i \in \mathbb{N}, |\alpha| < r+1 \\ &\Leftrightarrow \text{在 } K \text{ 上 } \partial^\alpha u_m \rightrightarrows 0, \ K \subset \Omega \text{ 是任给紧集}, |\alpha| < r+1. \end{aligned}$$

这正表明 $u_m \to 0 \Leftrightarrow \{u_m\}$ 在 Ω 内 C^r 紧一致收敛于零.

下证完备性. 设 $\{u_m\} \subset C^r(\Omega, E)$ 是一 Cauchy 序列，则当 $|\alpha| < r+1, m, p \to \infty$ 时，$\{\partial^\alpha (u_m - u_p)\}$ 在 Ω 内紧一致收敛于零，于是由式(2.2.8) 推出 $\{u_m^{(k)} - u_p^{(k)}\} (0 \leqslant k < r+1)$ 在 Ω 内紧一致收敛于零. 由定理 2.2.1，$\{u_m\}$ 必 C^r 紧一致收敛于某个 $u \in C^r(\Omega, E)$，因而 $C^r(\Omega, E)$ 是完备的. □

为了强调在 $C^r(\Omega, E)$ 中使用由命题 2.2.2 所确立的 F 空间结构，特别给它一个标志性的新记号：$\mathscr{E}^r(\Omega, E)$ 且约定

$$\mathscr{E}(\Omega, E) = \mathscr{E}^\infty(\Omega, E), \quad \mathscr{E}^r(\Omega) = \mathscr{E}^r(\Omega, \mathbb{K}), \quad \mathscr{E}(\Omega) = \mathscr{E}^\infty(\Omega). \tag{2.2.10}$$

当不必标明 Ω 与 E 时，就简单地写作 $\mathscr{E}^r$. 如从命题 2.2.2 能看出的，空间 $\mathscr{E}^r(\Omega, E)$ 中的收敛性(因而其中的拓扑) 与紧集列 $\{K_i\}$ 的选择无关. 因此，完全可用其他可能更方便的半范族取代由式(2.2.9) 定义的半范族. 例如，令

$$\| u \|_{K,k} = \max_{|\alpha| \leqslant k} \| \partial^\alpha u \|_K, \quad u \in \mathscr{E}^r, \tag{2.2.11}$$

则 $\{ \| u \|_{K,k} : K \subset \Omega \text{ 为紧集}, 0 \leqslant k < r+1 \}$ 就是一个很可用的半范族. 若 $r < \infty$，则可用更简单的半范族 $\{ \| u \|_{K,r} : K \subset \Omega \text{ 为紧集} \}$. 所有上面提到的半范族都是基本半范族，这一点对于下面的讨论是重要的.

评判函数空间 $\mathscr{E}^r$ 构成合理性的一个重要标准是：施于 $\mathscr{E}^r$ 的一些常见运算（如微分、以 $\varphi \in E^*$ 作用、变量代换等），应构成 $\mathscr{E}^r$ 上的连续线性算子. 这一标准亦适用于今后将陆续引入的其他函数空间，因此现在就应给以足够的注意. 对于定义于 $\mathscr{E}^r$ 上的线性算子 T，与条件(1.5.6)相当的连续性条件可表为

$$\| Tu \|_{K,k} \leqslant \text{const} \ \| u \|_{L,l}, \tag{2.2.12}$$

其中，紧集 K 与 $0 \leqslant k < r+1$ 是给定的，紧集 $L \subset \Omega$ 与 $0 \leqslant l < r+1$ 则通常依赖于 K 与 k. 以下结果表明，空间 $\mathscr{E}^r$ 的构成是符合上述的合理性标准的.

定理 2.2.2 (i) 设 $P(x,\partial)$ 是有 C^∞ 系数的 m 阶微分算子，

$$P(x,\partial) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) \partial^\alpha,$$

其中，$a_\alpha(x) \in C^\infty(\Omega)(|\alpha| \leqslant m)$，则 $P(x,\partial) \in L(\mathscr{E}(\Omega,E))$；

(ii) 设 $\varphi \in E^*$，$T_\varphi u = \varphi \circ u$，则 $T_\varphi \in L(\mathscr{E}^r(\Omega,E), \mathscr{E}^r(\Omega))(0 \leqslant r \leqslant \infty)$；

(iii) 设 $h \in C^r(\Omega',\Omega)(0 \leqslant r \leqslant \infty)$，$\Omega' \subset \mathbb{R}^{n'}$，$T_h u = u \circ h$，则 $T_h \in L(\mathscr{E}^r(\Omega, E), \mathscr{E}^r(\Omega',E))$.

证 (i) 设 $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$，$\varphi \in C^\infty(\Omega)$，$K \subset \Omega$ 为紧集，$k \in \mathbb{Z}_+$. 任给 $u \in \mathscr{E}(\Omega,E)$，显然有 $\partial^\alpha u, \varphi u \in \mathscr{E}(\Omega,E)$ 且

$$\| \partial^\alpha u \|_{K,k} = \max_{|\beta| \leqslant k} \| \partial^{\beta+\alpha} u \|_K \leqslant \| u \|_{K,k+|\alpha|},$$

$$\begin{aligned}
\| \varphi u \|_{K,k} &= \max_{|\alpha| \leqslant k} \| \partial^\alpha (\varphi u) \|_K \\
&= \max_{|\alpha| \leqslant k} \left\| \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} \varphi \partial^\beta u \right\|_K \\
&\leqslant \text{const} \ \| u \|_{K,k},
\end{aligned}$$

其中用了式(2.2.11)与式(2.2.7). 对照以上不等式与式(2.2.12)看出，$u \to \partial^\alpha u$ 与 $u \to \varphi u$ 都是 $\mathscr{E}(\Omega,E)$ 上的连续线性算子，而这显然推出 $P(x,\partial)$ 亦是如此.

(ii) 任给紧集 $K \subset \Omega$，$0 \leqslant k < r+1$，$u \in \mathscr{E}^r(\Omega,E)$，有

$$\| \varphi \circ u \|_{K,k} = \max_{|\alpha| \leqslant k} \| \partial^\alpha (\varphi \circ u) \|_K \leqslant \| \varphi \| \ \| u \|_{K,k},$$

这得出所要结论.

(iii) 任给紧集 $K \subset \Omega'$，$0 \leqslant k < r+1$，$u \in \mathscr{E}^r(\Omega,E)$，必定 $u \circ h \in \mathscr{E}^r(\Omega',E)$ 且 $L = h(K) \subset \Omega$ 为紧集. 反复应用链规则计算 $\partial^\alpha(u \circ h)$ 并不简单，难以写出其表达式，但可肯定最终表达式只用到 u 与 h 的不超过 $|\alpha|$ 阶的偏导数，因此可验证

$$\| u \circ h \|_{K,k} \leqslant \text{const} \ \| u \|_{L,k},$$

因此得出所要结论. □

值得指出的一个重要事实是，微分算子 $P(x,\partial)$ 的连续性有赖于 $\mathscr{E}(\Omega,E)$ 中采用 LCS 结构. 可以说明，在 $C^\infty(\Omega,E)$ 上不能定义某个范数，使得微分算子是连续的. 这一事实说明了 LCS 空间对于分析学的必要性.

现在考虑空间 $\mathscr{E}^r(\Omega,E)$ 的两种推广或变形.

第一种推广是以有界闭区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 取代开集 Ω,令

$$C^r(D,E)=\{u:\text{存在 } v\in C^r(V,E),u=v\mid D,V\text{是 }D\text{ 的开邻域}\}.$$

与 $C^r(\Omega,E)$ 不同,对于 $C^r(D,E)$,$r<\infty$ 与 $r=\infty$ 这两种情况有本质区别. 若 $r<\infty$,则 $C^r(D,E)$ 依范数

$$\|u\|_{(r)}=\max_{|\alpha|\leqslant r}\|\partial^\alpha u\|_0 \tag{2.2.13}$$

是一个 Banach 空间,在其中序列 $\{u_m\}$ 范数收敛于零 $\Leftrightarrow$ 在 D 上 $\partial^\alpha u_m\rightrightarrows 0(m\to\infty,|\alpha|\leqslant r)$. 而 $C^\infty(D,E)$ 却不能构成 Banach 空间,它依半范族 $\{\|u\|_{(r)}:r\in\mathbb{Z}_+\}$ 是一个 F 空间,其中,$\|u\|_{(r)}$ 依式(2.2.13);在 $C^\infty(D,E)$ 中序列$\{u_m\}$ 收敛于零 $\Leftrightarrow\forall\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$,在 D 上 $\partial^\alpha u_m\rightrightarrows 0(m\to\infty)$. 在以上两种情况下都将空间 $C^r(D,E)$ 写作 $\mathscr{E}^r(D,E)(0\leqslant r\leqslant\infty)$,且亦用对应于(2.2.10)的记号约定. 非正式地,不妨将空间 $\mathscr{E}^r(D,E)$ 中的收敛称为"C^r 一致收敛".

值得特别提到空间 $\mathscr{E}^r(D,E)$ 的以下特殊情况:

令

$$X=\{u\in C^r(\mathbb{R}^n,E):u\text{ 对每变元以 }2\pi\text{ 为周期}\}. \tag{2.2.14}$$

因 $u\in X$ 完全由它在 n 维方体 $D=[-\pi,\pi]^n$ 上的限制所确定,故不妨以 $X_0=\{u\mid D:u\in X\}$ 代替 X,而 X_0 作为 $\mathscr{E}^r(D,E)$ 的闭子空间是一个 Banach 空间(若 $r<\infty$)或F空间(若 $r=\infty$). 另一方面,每个 $u\in X$ 亦可看成关于$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1},\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2},\cdots,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n})\in\mathbb{T}^n$ 的函数,此处$\mathbb{T}^n=\mathbb{T}^1\times\mathbb{T}^1\times\cdots\times\mathbb{T}^1$ 是所谓 n 重环面,$\mathbb{T}^1=\mathbb{S}^1=\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}:\theta\in\mathbb{R}\}$ 就是单位圆周. 因此,就将 X(已指明其等同于 X_0)记作 $\mathscr{E}^r(\mathbb{T}^n,E)$. 相应地,$\mathscr{E}^r(\mathbb{T}^n)$,$\mathscr{E}(\mathbb{T}^n)$ 等记号的意义自明. 不过注意,从实际运用方便考虑,还是将 $u\in\mathscr{E}^r(\mathbb{T}^n,E)$ 看成$[-\pi,\pi]^n$ 上的函数,甚至就将$[-\pi,\pi]^n$ 当作 $\mathbb{T}^n$.

对应于定理 2.2.2,对于空间 $\mathscr{E}^r(\mathbb{T}^n,E)$ 有以下结果:

定理 2.2.3　(i) 设 $P(x,\partial)$ 依定理 2.2.2(i),其中,$a_\alpha(x)\in C^\infty(\mathbb{T}^n)(|\alpha|\leqslant m)$,则 $P(x,\partial)\in L(\mathscr{E}(\mathbb{T}^n,E))$;

(ii) 设 $\varphi\in E^*$,$T_\varphi u=\varphi\circ u$,则 $T_\varphi\in L(\mathscr{E}^r(\mathbb{T}^n,E),\mathscr{E}^r(\mathbb{T}^n))(0\leqslant r\leqslant\infty)$;

(iii) 设 $h\in C^r(\mathbb{T}^n,\mathbb{T}^n)(0\leqslant r\leqslant\infty)$,$T_hu=u\circ h$,则 $T_h\in L(\mathscr{E}(\mathbb{T}^n,E))$.

$h\in C^r(\mathbb{T}^n,\mathbb{T}^n)$ 意味着 $h\in C^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ 且当 $x,y\in\mathbb{R}^n$,$x-y\in 2\pi\mathbb{Z}^n$ 时,$h(x)-h(y)\in 2\pi\mathbb{Z}^n$. 最常用的两种特殊情况是平移 $h(x)=x+a$(a 固定)与反射 $h(x)=-x$.

第二种推广是改设 E 为 LCS,这一变动将造成较大的差别. 首先,原则上需要重新定义 C^r 函数 $u:\Omega\to E$ 及其偏导数 $\partial^\alpha u(|\alpha|<r+1)$,并确立式(2.2.3)这类记号的合理性. 这件事倒没什么困难. 实际上,偏导数基于极限式(2.1.3),而这只要 E 是 LCS 就够了. 式(2.2.5)已不再有意义. 但 Leibniz 式(2.2.7)仍然成立.

接下来的事情是定义类似于式(2.2.9)或式(2.2.11)的半范族. 为此,应以 E 中的某个半范族 $\{\|\cdot\|_s: s\in S\}$ 取代原来用的范数. 对 $u\in C^r(\Omega,E)$,令

$$\|u\|_{K,k,s} = \max_{x\in K,|\alpha|\leqslant k}\|\partial^\alpha u(x)\|_s, \tag{2.2.15}$$

则 $\{\|u\|_{K,k,s}: K\subset\Omega$ 为紧集,$0\leqslant k<r+1, s\in S\}$ 是 $C^r(\Omega,E)$ 上的一个分离半范族,它将 $C^r(\Omega,E)$ 定义为一个 LCS,亦记作 $\mathscr{E}^r(\Omega,E)$, 记号(2.2.10) 亦平行地使用. 若 E 是 F 空间,则可验证 $\mathscr{E}^r(\Omega,E)$ 亦为 F 空间. 对如此定义的 $\mathscr{E}^r(\Omega,E)$,定理 2.2.2 的结论仍保持有效,当然其证法需适当改变且更显烦琐,这些都不细述.

以下结果显示出容许 E 为 LCS 的必要. 设 $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2\subset\mathbb{R}^{n_1\times n_2}=\mathbb{R}^n$. 任给 $\varphi\in C^\infty(\Omega)$,令 $\varphi^y=\varphi(\cdot,y)$.

定理 2.2.4 令 $T_\varphi(y)=\varphi^y$,则有拓扑同构

$$\mathscr{E}(\Omega)\cong\mathscr{E}(\Omega_2,\mathscr{E}(\Omega_1)),\quad \varphi\to T_\varphi. \tag{2.2.16}$$

证 证明的基本思路并不复杂,但完全的描述包含可观的细节,因此下面仅给出一个梗概.

(i) 给定 $\varphi\in\mathscr{E}(\Omega)$,证 $T_\varphi\in\mathscr{E}(\Omega_1)$. $\forall y\in\Omega_2$,显然有 $\varphi^y\in\mathscr{E}(\Omega_1)$,因此 T_φ: $\Omega_2\to\mathscr{E}(\Omega_1)$,只要说明 $\partial_y^\beta T_\varphi=T_{\partial_y^\beta\varphi}$. 因这可归纳地证明,不妨只考虑 $n_2=1,\beta=1$,这相当于证依 $\mathscr{E}(\Omega_1)$ 中的拓扑有

$$\lim_{h\to0}h^{-1}[\varphi(\cdot,y+h)-\varphi(\cdot,y)]=\varphi_y(\cdot,y).$$

这可由 φ 各阶偏导数连续及中值定理得出.

(ii) 证式(2.2.16)为线性同构. $\varphi\to T_\varphi$ 显然是线性的;$T_\varphi=0\Rightarrow\varphi=0$;若 $T\in\mathscr{E}(\Omega_2,\mathscr{E}(\Omega_1))$,令 $\varphi(x,y)=(Ty)(x)$,则可验证 $\varphi\in\mathscr{E}(\Omega)$,$T=T_\varphi$.

(iii) 证式(2.2.16)连续. 设在 $\mathscr{E}(\Omega)$ 中 $\varphi_k\to0$,则对任给紧集 $K\subset\Omega_1$,$L\subset\Omega_2$,$\alpha\in\mathbb{Z}_+^{n_1}$,$\beta\in\mathbb{Z}_+^{n_2}$,在 $K\times L$ 上 $\partial_x^\alpha\partial_y^\beta\varphi_k\rightrightarrows0\,(k\to\infty)$,这推出 $\partial_y^\beta T_{\varphi_k}$ 依 $\mathscr{E}(\Omega_1)$ 中的半范 $\|\cdot\|_{K,|\alpha|}$(由式(2.2.11))在 L 上一致收敛于零. 由此看出 $\varphi\to T_\varphi$ 连续,然后用逆算子定理得出式(2.2.16) 为拓扑同构. □

2.3 隐函数定理

本章以下 4 节考虑微分学的一些应用. 讨论微分学的范围广泛的应用,当然不是本书的任务. 但有若干典型应用与微分学本身如此密切地联系在一起,以至不能不看成微分学的一部分, 其中, 首先要考虑的就是隐函数定理. 隐函数问题,本质上是一个方程问题. 微分学方法被有效地用于研究各种类型的方程,既包括隐函数方程,也包括微分方程、积分方程等. 具高度一般性的隐函数定理的建立,既是微分学方法有效性的有力证明,也是微分学本身的主要成就之一.

本节中设 X,Y,Z 等是$\mathbb{K}$上的 Banach 空间.

在进入主题之前,首先给出某些预备性的概念与结果. 设 $F: D \subset X \to Y$,令

$$\operatorname{Lip} F = \sup_{x,y \in D, x \neq y} \frac{\| Fx - Fy \|}{\| x - y \|}. \tag{2.3.1}$$

若 $D = X, F \in L(X,Y)$,则显然有 $\operatorname{Lip} F = \| F \|$(由式(1.5.2)). 因此,不妨认为 $\operatorname{Lip} F$ 是线性算子范数的一个非线性推广,称它为 F 的 **Lipschitz 模数**,它是量度 F 的压缩性(或扩张性)的一个数量指标. 不等式

$$\| Fx - Fy \| \leqslant (\operatorname{Lip} F) \| x - y \|, \quad x,y \in D \tag{2.3.2}$$

恰与式(1.5.4)相对应. 若 $\operatorname{Lip} F < \infty$,则说 F 是 **Lipschitz 连续**的,或称 F 为 Lipschitz 映射,显然 Lipschitz 连续推出连续. 若 F 在其定义域内每点的某个邻域内 Lipschitz 连续,则说 F **局部 Lipschitz 连续**,或称它为局部 Lipschitz 映射. 若 $\operatorname{Lip} F < 1$,则称 F 为压缩映射. 若 D 为凸集,F 在 D 上可微,则由中值定理直接推出

$$\operatorname{Lip} F \leqslant \sup_{x \in D} \| F'(x) \|. \tag{2.3.3}$$

式(2.3.3)常用来判定 F 为 Lipschitz 映射或压缩映射. 这些内容固然有趣,但已属于另外的专题. 目前只需要以下结果:

定理 2.3.1　设 $D \subset X$ 是一非空闭集,$F: D \to D$ 是一压缩映射, 则 F 在 D 上有唯一不动点 x^*,即 $Fx^* = x^*$. 任给 $x_0 \in D$,有 $F^n x_0 \to x^* \ (n \to \infty)$.

证　取定 $x_0 \in D$,令 $x_n = F^n x_0$. 若对某个 n 有 $x_{n+1} = x_n$,则 $x^* = x_n$ 已是 F 的不动点且 $x_k = x^* \ (\forall k \geqslant n)$. 下面设 $x_{n+1} \neq x_n \ (\forall n \geqslant 0)$. 由

$$\frac{\| x_{n+1} - x_n \|}{\| x_n - x_{n-1} \|} = \frac{\| Fx_n - Fx_{n-1} \|}{\| x_n - x_{n-1} \|} \leqslant \operatorname{Lip} F < 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

推出级数 $\sum (x_{n+1} - x_n)$ 绝对收敛,从而序列 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $x_n \to x^* \in D$,则由 $x_{n+1} = Fx_n$ 得出 $x^* = Fx^*$. 若此外还有一点 $\bar{x} = F\bar{x} \in D$,则从

$$\| x^* - \bar{x} \| = \| Fx^* - F\bar{x} \| \leqslant (\operatorname{Lip} F) \| x^* - \bar{x} \|$$

推出 $\| x^* - \bar{x} \| = 0$,因而 $x^* = \bar{x}$. 可见 x^* 是 F 的唯一不动点. □

定理 2.3.1 属于 Banach,通常称为**压缩映射原理**,亦称为 Banach 不动点定理,是近代分析中有广泛应用的基本定理之一. 此定理有多种推广形式,因本书并不用到,故不拟深入讨论.

本节的主题是确立方程

$$F(x,y) = 0 \tag{2.3.4}$$

的可解性,这就是隐函数问题. 为解此问题. 拟取如下策略:首先建立反函数定理,它在形式上要简单些,而实质上则与隐函数定理等价.

说到反函数定理,不能不回顾一下微积分学中已知的反函数存在条件. 设 f:

$(a,b)\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是 C^1 函数,$x_0\in(a,b)$,$f'(x_0)\neq 0$,则 $f'(x)$ 在某个含 x_0 的区间 J 上不变号,因而 $f(x)$ 在 J 上为严格单调函数,这就推出 $f(x)$ 作为 J 上的函数有反函数 $f^{-1}(y)$,且成立 $f^{-1\prime}(y)=1/f'(f^{-1}(y))$. 类比于此,自然提出以下问题:若 $F:\Omega\subset X\to Y$ 是 C^1 函数,$x_0\in\Omega$,$F'(x_0)$ 可逆(注意不是仅仅 $F'(x_0)\neq 0$!),能否断定 F 在 x_0 邻近有反函数 F^{-1},且

$$F^{-1\prime}(y)=(F'(F^{-1}y))^{-1}. \tag{2.3.5}$$

以下的**反函数定理**对此作了肯定回答,而且包含了更多的结论:

定理 2.3.2 设 $F:\Omega\subset X\to Y$ 是一 C^r 映射,$1\leqslant r\leqslant\infty$,$x_0\in\Omega$,$F'(x_0):X\cong Y$(同构),则存在 x_0 的开邻域 U 与 $y_0=Fx_0$ 的开邻域 V,使得 $F:U\to V$ 为双射,$F^{-1}\in C^r(V,U)$ 且式(2.3.5)对任给 $y\in V$ 成立.

利用近代分析中一些通行的术语,可将反函数定理表述得更简洁些. 若 $F:U\to V$ 为双射且 F 与 F^{-1} 均为 $C^r(1\leqslant r\leqslant\infty)$ 映射,则称 $F:U\to V$ 为 C^r 微分同胚,或简称为**微分同胚**. 反函数定理无非是说,$C^r(r\geqslant 1)$ 映射在某点的线性近似为同构推出它局部地为 C^r 微分同胚. 由某个"点性质"推出一个相近的"局部性质",正是微分学的典型用法. 在这一点上,古典微分学与近代微分学并无实质区别,只是近代结果更具一般性罢了. 还可注意,对于 $C^r(1\leqslant r\leqslant\infty)$ 映射 F,只要 F 在 x_0 局部地为 C^1 微分同胚,就可用链规则(见式(2.1.9))推出 $F'(x_0)$ 为同构,因而可用反函数定理推出 F 在 x_0 局部地为 C^r 微分同胚. 简言之,对 $C^r(1\leqslant r\leqslant\infty)$ 映射而言,局部 C^r 微分同胚等价于局部 C^1 微分同胚.

证 证明分为以下 5 步进行:

(i) 简化问题. 令 $T=F'(x_0)$,$\Omega'=\Omega-x_0$. 定义

$$Gx=T^{-1}(F(x_0+x)-Fx_0),\quad x\in\Omega',$$

则 $G\in C^r(\Omega',X)$,$G(0)=0$,$G'(0)=I$. 若 G 在 $x=0$ 邻近有 C^r 的逆映射 G^{-1},则可直接验证 $F^{-1}y\triangleq x_0+G^{-1}T^{-1}(y-y_0)$ 就是 F 在 x_0 邻近的 C^r 的逆映射. 因此,不失一般性,不妨一开始就设 $X=Y$,$x_0=y_0=0\in\Omega$,$F'(0)=I$.

(ii) 证所求双射 $F:U\to V$ 存在,这是证明的核心步骤,它基于压缩映射原理. 由 $F'(x)$ 连续,有 $\delta>0$,使得

$$\|F'(x)-I\|<\frac{1}{2},\quad x\in\bar{B}_\delta(0). \tag{2.3.6}$$

令 $V=B_{\delta/2}(0)$,$U=B_\delta(0)\cap F^{-1}V$,则 U 与 V 均为 $x=0$ 的开邻域且 $FU\subset V$. 今证 $F:U\to V$ 是双射,这相当于对给定 $y\in V$ 证方程 $Fx=y$ 在 U 内有唯一解 x. 关键在于将方程 $Fx=y$ 转化为与之等价的"不动点方程":

$$x=x-Fx+y\triangleq\Phi x,$$

其中,$y\in V$ 固定. 今试对 Φ 应用定理 2.3.1. 为此验证:$\forall x,z\in\bar{B}_\delta(0)$,有

$$\|\Phi x\|\leqslant\|x-Fx\|+\|y\|<\frac{\|x\|}{2}+\frac{\delta}{2}\leqslant\delta,$$

$$\|\Phi x - \Phi z\| = \|Fx - Fz - (x - z)\| \leqslant 2^{-1}\|x - z\|,$$

其中用了式(2.3.6)与式(2.1.19). 可见 $\Phi\bar{B}_\delta(0) \subset B_\delta(0)$ 且 Φ 为压缩映射. 于是有唯一的 $x \in \bar{B}_\delta(0)$,使得 $x = \Phi x$,即 $Fx = y$, 必定 $x \in U$. 故 $F: U \to V$ 为双射.

(iii) 证 $F^{-1}: V \to U$ 连续. 设 $x_i \in U, y_i = Fx_i \in V(i = 1,2)$, 则

$$\begin{aligned} 2\|y_1 - y_2\| &= 2\|x_1 - x_2 + Fx_1 - Fx_2 - (x_1 - x_2)\| \\ &\geqslant 2\|x_1 - x_2\| - 2\|Fx_1 - Fx_2 - (x_1 - x_2)\| \\ &\geqslant \|x_1 - x_2\| = \|F^{-1}y_1 - F^{-1}y_2\|. \end{aligned}$$

这得出 F^{-1} 连续,实际上得到 $\mathrm{Lip}F^{-1} \leqslant 2$.

(iv) 证式(2.3.5). 设 $x, x + h \in U, y = Fx, y + k = F(x + h)$,令 $T = F'(x)$, 则

$$\begin{aligned} \|\Delta F^{-1}(y,k) - T^{-1}k\| &= \|h - T^{-1}k\| \leqslant \|T^{-1}\| \|k - Th\| \\ &= \|T^{-1}\| \|\Delta F(x,h) - Th\| \\ &= o(\|h\|) = o(\|k\|), \end{aligned}$$

最后一步用了 $\|h\| \leqslant 2\|k\|$. 因此 $F^{-1'}(y) = T^{-1}$,即式(2.3.5)成立.

(v) 证 $F^{-1} \in C^r$. 可设 $r < \infty$. $r = 1$ 不成问题,当 $r > 1$ 时,由分解

$$y \xrightarrow{F^{-1}} x \xrightarrow{F'} F'(x) \longrightarrow (F'(x))^{-1} = F^{-1'}(y)$$

及归纳假设得出 $(F^{-1})' \in C^{r-1}$,因而 $F^{-1} \in C^r$. □

仔细检查上述证明会发现,证明中隐蔽地用了以下结论:

(A) 若 $T \in L(X)$, $\|T - I\| < 1$,则 T 可逆;

(B) C^r 映射的复合映射是 C^r 映射;

(C) $T \to T^{-1}(T \in \mathrm{GL}(X))$ 是 C^∞ 映射.

这些结论并非不证自明,因而均需补证,这由以下 3 个引理解决. 这些引理都有其独立价值,而且其证法颇能显示近代微分学方法的特点,值得细加体会. 不过,急于想看到隐函数定理的读者亦不妨跳过引理 2.3.1 ~ 引理 2.3.3,直接转入定理 2.3.3.

引理 2.3.1 设 $A \in L(X)$, $\|A\| < 1$,则

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n, \quad A^0 = I.$$

证 由 $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n$ 及 $\|A\| < 1$ 推出级数 $\sum A^n$ 绝对收敛,因此 $B \triangleq \sum_0^\infty A^n \in L(X)$. 直接计算可验证 $B(I - A) = (I - A)B = I$,因此 $B = (I - A)^{-1}$,如所要证. □

引理 2.3.2 设 $F: \Omega \subset X \to Y$ 与 $G: \Omega' \subset Y \to Z$ 均为 C^r 映射, $0 \leqslant r \leqslant \infty$, $F\Omega \subset \Omega'$,则 $H \triangleq G \circ F \in C^r$. 简言之, C^r 映射的复合映射是 C^r 映射.

证 显然只需要考虑 $r < \infty$ 的情况. 今对 r 用归纳法,当 $r = 0$ 时引理结论显

然成立. 下面设 $r \geqslant 1$ 并设引理结论已对 C^{r-1} 映射成立. 映射 $H'(x) = G'(Fx)F'(x)$ 可作如下分解:

$$x \xrightarrow{\theta} (G'(Fx), F'(x)) \xrightarrow{\sigma} G'(Fx)F'(x).$$

由归纳假设与定理 2.1.3 推出 $\theta \in C^{r-1}$. 其次,

$$\sigma: L(Y,Z) \times L(X,Y), \quad (A,B) \to AB$$

是有界双线性算子(已在例 2.1.2(i)中提及它),必为 C^{∞} 映射(实际上,其三阶导数恒为零!). 于是用归纳假设得 $H' = \sigma \circ \theta \in C^{r-1}$,因而 $H \in C^{r}$. □

记住 GL (X) 记 X 上的拓扑自同构之全体(见定义 1.2.2).

引理 2.3.3 GL (X) 是 $L(X)$ 的开子集且

$$J: \mathrm{GL}(X) \to L(X), \quad A \to A^{-1}$$

是一个 C^{∞} 映射(J 称为反演映射).

证 取定 $A \in \mathrm{GL}(X)$. 若 $B \in L(X)$, $\|B\|$ 充分小,则由引理 2.3.1 有

$$(A+B)^{-1} = A^{-1}(I + BA^{-1})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^{-1}(-BA^{-1})^{n},$$

因而 $A + B \in \mathrm{GL}(X)$. 这表明 GL(X) 是开集. 从以上展开式也得到

$$\begin{aligned} &\|J(A+B) - J(A) + A^{-1}BA^{-1}\| \\ &= \left\| \sum_{n=2}^{\infty} A^{-1}(-BA^{-1})^{n} \right\| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \|A^{-1}\|^{n+1}\|B\|^{n} = o(\|B\|), \end{aligned}$$

这与式(2.1.1)对照得出

$$J'(A)B = -A^{-1}BA^{-1} = -J(A)BJ(A) \tag{2.3.7}$$

或 $J'(A) = -L_{J(A)} \circ R_{J(A)}$,其中,$L_T: B \to TB$ 与 $R_T: B \to BT$ 都是 $L(X)$ 上的有界线性算子. 又 $T \to L_T$ 与 $T \to R_T$ 均为从 $L(X)$ 到 $L(L(X))$ 的有界线性算子,因而均为 C^{∞} 映射. 因此,只要 $J \in C^{r-1}(r \geqslant 1)$,就能推出 $J' \in C^{r-1}$,从而 $J \in C^{r}$. 于是用归纳法得出 $J \in C^{r}(\forall r \geqslant 0)$,因而 $J \in C^{\infty}$. □

若取 $X = \mathbb{R}$,则 $\mathrm{GL}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $J(x) = 1/x$, $J'(x) = -J^2(x)$. 显然 $J \in C^{\infty}$. 引理 2.3.3 证明中所得的式(2.3.7)虽可与 $J'(x) = -J^2(x)$ 类比,但在 $\dim X > 1$ 的情况下却不能从式(2.3.7)推出 $J'(A) = -J^2(A)$, 这是值得注意的.

还值得注意的一点是,在引理 2.3.2 与引理 2.3.3 的证明中,映射依复合关系进行分解起了关键作用,这与经典分析中较直观的方法是大不相同的. 一般来说,在抽象空间中依赖通常运算的推理受到较多限制,映射的复合与分解这类较少限制的“操作”自然被提升到更重要的地位.

现在回到本节的主题——隐函数定理. 如同切入反函数定理时所作的那样,此处也从一个熟知的初等结果入手. 设 $F: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 为 C^1 函数,$(x_0, y_0) \in \Omega$, $F(x_0, y_0) = 0$, $F_y(x_0, y_0) \neq 0$,则在点 (x_0, y_0) 邻近可从方程 (2.3.4) 唯一地解出 $y = y(x)$,使得 $y(x_0) = y_0$ 且

$$y'(x) = -[F_y(x, y(x))]^{-1}F_x(x, y(x)). \tag{2.3.8}$$

值得庆幸的是，形式上仅需少量改变，就可将以上结论推广为 Banach 空间中如下高度一般的**隐函数定理**：

定理 2.3.3　设 $F: \Omega \subset X \times Y \to Z$ 是一个 C^r 映射，$1 \leqslant r \leqslant \infty$，$(x_0, y_0) \in \Omega$，$F(x_0, y_0) = 0$，$F_y(x_0, y_0): Y \cong Z$（同构），则存在 x_0 的开邻域 U 及唯一的 C^r 映射 $y(x): U \to Y$，使得 $y = y(x)$ 满足方程(2.3.4)，$y(x_0) = y_0$ 且当 $x \in U$ 时式(2.3.8)成立.

证　证明基于反函数定理. 因主要困难已在证反函数定理时克服了，以下证明并无重大障碍，关键的事情是构作如下辅助函数：

$$G: \Omega \subset X \times Y \to X \times Z, \quad (x, y) \to (x, F(x, y)).$$

由定理 2.1.3 有 $G \in C^r$，$G(x_0, y_0) = (x_0, 0)$，

$$G'(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ F_x^0 & F_y^0 \end{bmatrix}, \quad I = 1_X,$$

其中，$F_x^0 = F_x(x_0, y_0)$，F_y^0 仿此. 仿照线性代数中的方法形式地求出

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ F_x^0 & F_y^0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -(F_y^0)^{-1}F_x^0 & (F_y^0)^{-1} \end{bmatrix} \triangleq Q.$$

经验算知 $G'(x_0, y_0)Q$ 与 $QG'(x_0, y_0)$ 均为单位算子，因此有 $G'(x_0, y_0): X \times Y \cong X \times Z$. 这就可应用定理 2.3.2 得出：$G$ 在点 (x_0, y_0) 邻近存在 C^r 的反函数 G^{-1}，$G^{-1}(x_0, 0) = (x_0, y_0)$. 设 $P: X \times Y \to Y$ 是投影，令 $y(x) = PG^{-1}(x, 0)$，则 $y(x)$ 是 C^r 映射，$y(x_0) = y_0$. 由

$$(x, F(x, y(x))) = G(x, y(x)) = (x, 0)$$

推出 $F(x, y(x)) = 0$，故 $y = y(x)$ 满足方程(2.3.4). 微分等式 $F(x, y(x)) = 0$ 得

$$F_x(x, y(x)) + F_y(x, y(x))y'(x) = 0,$$

这表明式(2.3.8)成立. 由反函数的唯一性得出隐函数的唯一性，于是定理证毕. □

为了显示定理 2.3.3 的效力，不妨首先看看它的有限维推论. 取 $X = \mathbb{R}^n$，$Y = Z = \mathbb{R}^m$（不必 $m = n$!）. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$，$F_i(1 \leqslant i \leqslant m)$ 是 Ω 内的 C^r 实函数，$1 \leqslant r \leqslant \infty$，$(x^0, y^0) \in \Omega$，$F_i(x^0, y^0) = 0(1 \leqslant i \leqslant m)$，

$$\det \frac{\partial(F_1, F_2, \cdots, F_m)}{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_m)}\bigg|_{(x^0, y^0)} \neq 0,$$

则由定理 2.3.3 得出在点 (x^0, y^0) 邻近可从方程组

$$F_i(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{2.3.9}$$

唯一地解出 C^r 函数 $y_i = y_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)(1 \leqslant i \leqslant m)$，它满足 $y_i^0 = y_i(x^0)$，$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$，$y^0 = (y_1^0, y_2^0, \cdots, y_m^0)$ 且

$$\frac{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_m)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)} = -\left[\frac{\partial(F_1,F_2,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_m)}\right]^{-1}\frac{\partial(F_1,F_2,\cdots,F_m)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_m)}. \qquad (2.3.10)$$

不妨设想一下,如果不用 Banach 空间微分学的概念、结论、记号与处理模式,而保持平常坐标形式并用传统的微分学方法,对于隐函数方程组(2.3.9)的讨论是否容易理出一个头绪来.这个例子大概让你信服地证明了:抽象分析的方法能大大简化复杂问题的解决.

当然,隐函数定理的应用远非限于有限维空间.实际上,隐函数定理的价值更多地体现在解决困难的无限维问题上.值得强调的是,隐函数定理不仅肯定了方程的可解性,而且给出了解的 C^r 可微性,而这两个问题是很少有其他分析定理能同时解决的.这就决定了隐函数定理的难以替代的作用.隐函数定理的应用遍及多个数学领域,其中,不少涉及深入的专门知识,无法在此介绍.下面只能举几个较简单的例子,但亦足以说明问题.

在讨论具体例子之前,让我们作点一般说明.设某一问题同时涉及量 x,y,此处所称的量可以是很复杂的对象,如映射、曲线等,并不限于数量或有限维向量.如果能根据问题条件给出 x 与 y 之间的某个约束关系 $F(x,y)=0$,那么很可能意味着应用隐函数定理的机会来临.对于某个给定的隐函数方程 $F(x,y)=0$,通过验证条件套用隐函数定理,无疑是必要的,但毕竟是一件常规的工作.更具挑战性的问题是:适当的隐函数方程尚待构成,甚至应用隐函数定理的机会尚待寻求或创设.下面的例子虽然简单,但能初步解释如何试探应用隐函数定理的机会.

例 2.3.1(特征值问题) 设 λ_0 是 $A_0\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的单重特征值.今考虑当 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 充分接近于 A_0 时 A 的单重特征值的存在性.初看起来,此问题似乎与隐函数定理毫不相关.关键的观察是:λ 是 A 的特征值,正是量 λ 与 A 之间的一个约束关系,它可以明确地表达为

$$F(A,\lambda)\triangleq\det(\lambda I-A)=0, \qquad (2.3.11)$$

这正是我们要考虑的隐函数方程.F 显然是 C^∞ 函数(它是关于 λ,a_{ij} 的多项式,$A=[a_{ij}]$);$F(A_0,\lambda_0)=0$.λ_0 是特征多项式 $P(\lambda)\triangleq F(A_0,\lambda)$ 的单重零点这一条件推出 $F_\lambda(A_0,\lambda_0)=P'(\lambda_0)\neq 0$.于是由隐函数定理得出:在 (A_0,λ_0) 邻近可从方程(2.3.11)解出 C^∞ 函数 $\lambda=\lambda_A$,λ_A 正是 A 的特征值.因当 $A\approx A_0$ 时 $F_\lambda(A,\lambda_A)\approx F_\lambda(A_0,\lambda_0)\neq 0$,故 λ_A 是 A 的单重特征值.

不妨设想一下,如果不用隐函数定理而用其他方法,如用线性代数方法,能否容易达到以上结论.想必你会认为,将 λ 看成矩阵 A 的函数,自变量 A 也太复杂了.确实,不能指望求出用 A 表出 λ_A 的公式,但这些都不构成应用隐函数定理的障碍.

下面这个无限维问题或许更能说明问题.

例 2.3.2(方程的扰动) 考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的非线性向量方程

$$u(x)=0, \tag{2.3.12}$$

其中，$u\in C^1(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$，$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一有界开区域. 函数 u 通常由实际资料确定，未必完全准确. 那么 u 的误差对于方程的解是否有显著影响？此问题的实际意义是不言而喻的. 为应用隐函数定理，将方程(2.3.12)改写成

$$F(u,x)\triangleq u(x)=0,$$

其中，$F:X\times\Omega\to\mathbb{R}^n$，$X=C^1(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ 依范数 $\|u\|=\|u\|_0+\|u'\|_0$ 是一个 Banach 空间. 直接看出 $u\to F(u,x)$ 是连续线性的，而 $F_x(u,x)=u'(x)$；然后用定理 2.1.3 得出 $F\in C^1$. 若对某个 $u_0\in X$，方程 $u_0(x)=0$ 有解 $x_0\in\Omega$ 且 $u_0{}'(x_0)\in\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$，则 $F_x(u_0,x_0):\mathbb{R}^n\cong\mathbb{R}^n$，因而可用隐函数定理得出若 $u\in X$ 使 $\|u-u_0\|$ 充分小，则方程(2.3.12)在 x_0 邻近有唯一解 x_u 且 $u\to x_u$ 是 C^1 映射. 特别地，x_u 必连续地依赖于 u，即 u 的微小变动仅导致解 x_u 的微小变动. 这一结论无疑是令人满意的. 同样，上述结果亦未必容易由隐函数定理以外的其他方法得到.

下面看一个应用反函数定理的例子.

例 2.3.3(奇点问题)　设 $F:\Omega\subset X\to X$ 是一个 C^1 映射，通常称 F 为 Ω 内的 C^1 向量场，称 F 的零点(即方程 $F(x)=0$ 的解)为向量场的奇点. 向量场在非孤立奇点邻近的行为往往是高度病态的，因而判定 F 的奇点是否为孤立奇点有其重要性. 若 $x_0\in\Omega$ 是 F 的一个奇点，$F'(x_0)\in\mathrm{GL}(X)$（这样的 x_0 称为 F 的正则奇点），则由反函数定理知 F 将 x_0 的某个邻域同胚地映为 $x=0$ 的某个邻域，因而在 x_0 邻近 F 以 x_0 为唯一奇点. 这就得出结论：C^1 向量场的正则奇点必为孤立奇点.

以上结果特别显示出反函数定理的如下本质特点：$C^r(r\geqslant 1)$ 映射 F 在一点 x_0 的微分性质($F'(x_0)$ 为同构)衍生出 F 在 x_0 邻近的一个局部性质(F 在 x_0 的某邻域内为同胚). 这正是微分学用于函数研究的典型现象.

基于上述观察，我们提出如下问题：从 $F'(x_0)$ 是满射(或单射)能否推断出 F 在 x_0 处局部地是满射(或单射)？以下定理有条件地解答了这一问题：

定理 2.3.4　设 $F:\Omega\subset X\to Y$ 是 C^1 映射，$x_0\in\Omega$，$T=F'(x_0)$.

(i) 若 $R(T)=Y$，则 $Fx_0\in(F\Omega)^\circ$. 因此，若在每点 $x\in\Omega$，$F'(x)$ 是满射，则 F 是开映射. 特别地，若 $F:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是 C^1 映射，$\forall x\in\Omega$，有 $\operatorname{rank}F'(x)=m$，则 F 是开映射.

(ii) 若 $T:X\to Y$ 是拓扑嵌入，则存在 x_0 的开邻域 U，使 $F:U\to Y$ 是拓扑嵌入.

证　(i) 可设 $x_0=0$，$F(0)=0$，分别以 B_r 与 B'_r 记 X 与 Y 中以 0 为中心以 r 为半径的球. 因 T 是开映射(由定理1.5.1)，故有 $\varepsilon>0$ 使 $\overline{B}'_\varepsilon\subset TB_1$，不妨设 $\varepsilon=1$(否则在 Y 中改赋一个等价范数). 取 $\delta>0$ 充分小，使 $B_{2\delta}\subset\Omega$ 且

$$\|F'(x)-T\|<1/2,\quad \forall x\in B_{2\delta}.$$

今证 $TB_\delta\subset FB_{2\delta}$(从而 $\overline{B}_\delta'\subset F\Omega$，$0\in(F\Omega)^\circ$). 任取 $x_1\in B_\delta$，今证 $Tx_1\in FB_{2\delta}$，可

设 $x_1 \neq 0$. 由中值定理有

$$\| Tx_1 - Fx_1 \| \leqslant (1/2) \| x_1 \|,$$

故 $Tx_1 - Fx_1 \in \bar{B}'_{\|x_1\|/2} \subset TB_{\|x_1\|/2}$, 从而 $Tx_1 - Fx_1 = Tx_2$, $\| x_2 \| < \| x_1 \|/2$, $\| x_1 + x_2 \| \leqslant (3/2) \| x_1 \| < 2\delta$. 类似地有

$$\| Tx_1 - F(x_1 + x_2) \| = \| Fx_1 - F(x_1 + x_2) + Tx_2 \| \leqslant \frac{1}{2} \| x_2 \|,$$

这得出 $Tx_1 - F(x_1 + x_2) = Tx_3$, $\| x_3 \| < \| x_1 \|/4$, $\| x_1 + x_2 + x_3 \| < 2\delta$. 一般地, $\forall n \in \mathbb{N}$, 有 $x_n \in X$: $\| x_n \| < 2^{1-n} \| x_1 \|$, $Tx_1 - F\left(\sum_1^{n-1} x_i \right) = Tx_n$. 于是 $x \triangleq \sum_1^{\infty} x_n \in B_{2\delta}$, $Tx_1 = Fx \in FB_{2\delta}$.

(ii) 设 $T^{-1}: R(T) \to X$, 则 $\| T^{-1} \| > 0$. 取 $\delta > 0$ 充分小, 令 $U = B_\delta(x_0)$, 使得

$$\| F'(x) - T \| < (2 \| T^{-1} \|)^{-1}, \quad \forall x \in U,$$

则对任给 $x, y \in U$ 有

$$\begin{aligned} \| Fx - Fy \| &\geqslant \| Tx - Ty \| - \| Fx - Fy - T(x-y) \| \\ &\geqslant \| T^{-1} \|^{-1} \| x - y \| - (2 \| T^{-1} \|)^{-1} \| x - y \| \\ &= (2 \| T^{-1} \|)^{-1} \| x - y \|. \end{aligned}$$

这表明 $F: U \cong FU$(同胚), 因而 $F: U \to Y$ 是拓扑嵌入. □

关于隐函数定理的条件及其推广, 还值得作点说明. 作为一个局部性结果而言, 定理 2.3.2 及与之等价的定理 2.3.3 似乎已经十分完美. 但实际上它并不能完全令人满意. 首先, 要求所涉函数为 $C^r(r \geqslant 1)$ 函数这一条件过强, 这严格地限制了隐函数定理的应用. 其次, 结论的局部性质常常不能满足应用的需要. 因此, 隐函数定理这一研究课题并未完结. 循各种不同途径对它进行推广的工作一直在进行, 主要目标是降低或消除上面提到的两大缺陷. 新的结果中既包括不可微函数的隐函数定理, 也包括某种程度上的全局隐函数定理. 这一类的结果甚多, 足以汇合为一部宏大的专著, 非此处所能论其详(Hamilton, 1982). 我们现在所能做的, 只是在定理 2.3.2 的基础上往前走一小步, 借以对扩大现有结果的应用所循思路作点说明. 基本的思想是: 若对每个点 $x \in D$, 可在 x 邻近应用定理 2.3.2 得到一个局部结论, 那么就可能将这些局部结论综合成一个全局性的结论. 所需综合技巧自然依赖于集 D 的性质.

定理 2.3.5 设 $F: \Omega \subset X \to Y$ 是一个 C^r 映射, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, $D \subset \Omega$ 是一非空紧集, $\forall x \in D$, 有 $F'(x): X \cong Y$ 且 $F|D$ 为单射, 则存在 D 的开邻域 U 与 FD 的开邻域 V, 使得 $F: U \to V$ 是一个 C^r 微分同胚.

若 $D = \{x_0\} \subset \Omega$, 则定理 2.3.5 与定理 2.3.2 一致.

证 对 $\delta > 0$, 令 $N_\delta = \{x \in X: d(x, D) < \delta\}$, 则 N_δ 是 D 的开邻域且当 $\delta > 0$ 适当小时 $N_\delta \subset \Omega$. 不妨设 $\delta > 0$ 如此小, 使得 $F | N_\delta$ 为单射. 这样的 δ 必存在,

否则存在 $x_n,y_n \in \Omega$,使,$x_n \neq y_n, d(x_n,D) \vee d(y_n,D) < 1/n, Fx_n = Fy_n (n \in \mathbb{N})$. 取 $a_n,b_n \in D$,使 $\|x_n - a_n\| \vee \|y_n - b_n\| < 1/n (n \in \mathbb{N})$. 因 D 为紧集,不妨设 $a_n \to a \in D, b_n \to b \in D(n \to \infty)$. 于是 $Fa = Fb$,因而 $a = b, x_n \to a, y_n \to a(n \to \infty)$. 由定理2.3.2,$F$ 在 a 点邻近为单射,但这与 $Fx_n = Fy_n(\forall n \in \mathbb{N})$ 相矛盾.

$\forall x \in D$,取 x 的开邻域 U_x,使 $U_x \subset N_\delta$ 且 $F | U_x$ 是一个 C^r 微分同胚. 取有限集 $\{x_i\} \subset D$,使 $D \subset \bigcup_i U_{x_i} \triangleq U$,则 U 是 D 的开邻域, $U \subset N_\delta$. 因 $F | U$ 是单射且 $V = FU = \cup FU_{x_i}$ 为开集,故 $F: U \to V$ 必为 C^r 微分同胚. □

下面是一个另一类型的结果,它是整体的且不用到任何微分条件.

定理2.3.6 设 $F: X \to X$ 是一双射,$G: X \to X$ 满足条件

$$\text{Lip } G < (\text{Lip } F^{-1})^{-1}, \tag{2.3.13}$$

则 $H = F + G: X \to X$ 为同胚且

$$\text{Lip } H^{-1} \leqslant [(\text{Lip } F^{-1})^{-1} - \text{Lip } G]^{-1}. \tag{2.3.14}$$

证 取定 $y \in X$,方程 $Hx = y$ 等价于

$$x = F^{-1}(y - Gx) \triangleq \Phi x. \tag{2.3.15}$$

映射 $\Phi: X \to X$ 有定义且由条件(2.3.13) 推出 $\text{Lip } \Phi \leqslant (\text{Lip } F^{-1})(\text{Lip } G) < 1$,于是由定理2.3.1 得出 Φ 有唯一不动点 $x \in X$. 这表明 $H: X \to X$ 是双射. 以 $x = H^{-1}y$ 代入式(2.3.15)得 $H^{-1} = F^{-1} \circ (I - GH^{-1})$,因此

$$\text{Lip } H^{-1} \leqslant \text{Lip } F^{-1}[1 + (\text{Lip } G)(\text{Lip } H^{-1})].$$

解此不等式即得式(2.3.14). □

粗略地说,定理2.3.6 表明:一个"Lipschitz 同胚 F"经充分小的扰动(这意味着 Lip G 充分小)之后仍为"Lipschitz 同胚".

关于隐函数定理的进一步的结果可参见文献(陈文嵘, 1982,1986).

2.4 单调映射与凸函数

经典微分学用于研究单调函数与凸函数,是人们熟知的,其作用是如此显著,会使人不免期望,在 Banach 空间中也许能收到类似的效果. 在近代分析中,单调映射与凸函数都是有重要价值的研究对象. 单调映射理论已成为成果丰富的分析学课题,但与微分学相联系的内容并不多,因此不拟过多涉及. 本节的重点是凸函数.

本节设 X,Y 等是**实**赋范空间,D 记 X 的非空凸子集,Ω 记 X 的非空凸开集. $\langle \cdot , \cdot \rangle$ 记 X^* 与 X 之间的配对(由式(1.6.10)). 记 $J = [0,1]$. 若 $F: D \to Y, x, x + h \in D$,则 $\varphi(t) \triangleq F(x + th)$ 是 J 上的实变量函数. 本节中总利用类似的方法将研究对象**实参数化**,从而可能利用微积分学中的现成结果. 凡这样做时,我们将概称之为**归化法**. 在类似形式下,归化法也将大量用于本书其他章节.

现在考虑推广单调函数. 通常的增函数由以下条件界定:

$$x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y). \tag{2.4.1}$$

直接依此条件界定 Banach 空间中的增函数,完全可行且不无意义. 但为此得预先发展某种"有序 Banach 空间"理论,这不在本书的计划之内. 另一方面,单调性条件(2.4.1)也可等价地表成 $[f(x)-f(y)](x-y)\geqslant 0$. 这一条件被推广而用于界定一般单调映射.

定义 2.4.1 设 $F: D\subset X\to X^*$. 若 F 满足条件

$$\langle Fx-Fy, x-y\rangle \geqslant 0, \quad x,y\in D, \tag{2.4.2}$$

则称 F 为**单调映射**;若当 $x\neq y$ 时式(2.4.2) 为严格不等式,则称 F 为严格单调映射;若存在正常数 λ,使得

$$\langle Fx-Fy, x-y\rangle \geqslant \lambda\|x-y\|^2, \quad x,y\in D, \tag{2.4.3}$$

则称 F 为强单调映射(称 λ 为其参数). 若线性算子 $T: X\to X^*$ 是单调(或严格单调、强单调) 的,则称 T 为**正线性算子**(或严格正线性算子、强正线性算子).

对于线性算子 T,条件(2.4.2) 与式(2.4.3) 分别简化为

$$\langle Tx, x\rangle \geqslant 0, \quad \forall x\in X, \tag{2.4.4}$$

$$\langle Tx, x\rangle \geqslant \lambda\|x\|^2, \quad \forall x\in X. \tag{2.4.5}$$

若 X 是实 Hilbert 空间,则式(2.4.2) ~ (2.4.5)的左端均为内积. 若 $X=\mathbb{R}^n$,以实对称矩阵 A 取代式(2.4.4), 式(2.4.5) 中的 T,则 A 为正线性算子与强正线性算子分别意味着 A 半正定与正定,而严格正线性算子与强正线性算子则没有区别. 若 $X=\mathbb{R}$,则条件(2.4.2) 与式(2.4.1) 一致,因而 F 单调(或严格单调) $\Leftrightarrow$ F 是增函数(或严格增函数). 以上事实,应使你对单调映射获得某种初步印象.

现在我们急于看到如何对单调映射用归化法. 令

$$\varphi(t) = \langle F(x+th), h\rangle, \quad t\in J,$$

其中, $x, x+h\in D$ 是取定的. 若 $0\leqslant s<t\leqslant 1$,则

$$(t-s)[\varphi(t)-\varphi(s)] = \langle F(x+th)-F(x+sh), th-sh\rangle,$$

$$\langle F(x+h)-Fx, h\rangle = \varphi(1)-\varphi(0).$$

由此可见, $F: D\to X^*$ 是单调映射 $\Leftrightarrow \forall x, x+h\in D$, $\langle F(x+th), h\rangle$ 对 $t\in J$ 单调增, F 严格单调 $\Leftrightarrow$ 当 $h\neq 0$ 时上述的 $\langle F(x+th), h\rangle$ 对 $t\in J$ 严格单调增.

对于可微实函数 f,熟知 f 单调增 $\Leftrightarrow f'\geqslant 0$. 这一结论可推广于单调映射.

命题 2.4.1 设 $F: \Omega\subset X\to X^*$ 是可微映射, 则 F 是单调映射 $\Leftrightarrow \forall x\in\Omega$, $F'(x)$ 是正线性算子.

证 若 F 是单调映射, $x\in\Omega$,则 $\forall h\in X$,有

$$0\leqslant \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle F(x+th), h\rangle\Big|_{t=0} = \langle F'(x)h, h\rangle,$$

可见 $F'(x)$ 是正线性算子(用条件(2.4.4)). 反之,若 $F'(x)$($x\in\Omega$) 恒为正线性

算子,$x,x+h\in\Omega,t\in J$,则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle F(x+th),h\rangle=\langle F'(x+th)h,h\rangle\geqslant 0,$$

可见 $\langle F(x+th),h\rangle$ 对 t 单调增,因而 F 是单调映射. □

如所熟知,单调实函数在有界性、连续性等方面都有较强的结论. 单调映射亦有类似特点. 不过,深入的讨论并不简单,下面仅给出一个初步的结果以作说明.

定理2.4.1　设 $F: D\subset X\to X^*$ 是单调映射,X 完备, 则 F 在 D 内部局部有界. 因此,正线性算子 $T: X\to X^*$ 必为有界线性算子.

证　设 $x_0\in D,B\triangleq\bar{B}_\rho(x_0)\subset D,\rho>0$. 今要证存在 $r>0$ 使 $FB_r(x_0)$ 有界. 不妨设 $x_0=0$. 令

$$B_n=\{y\in B:\langle Fx,y-x\rangle\leqslant n(\forall x\in B)\},\quad n\in\mathbb{N},$$

则 B_n 是闭集. $\forall x,y\in B$,由条件(2.4.2) 推出

$$\langle Fx,y-x\rangle\leqslant\langle Fy,y-x\rangle\leqslant\|Fy\|(\|y\|+\rho),$$

这推出 $B=\bigcup\limits_{1}^{\infty}B_n$. 因 B 是第二纲集(由定理 1.3.12),故有某个 B_n 含一个球 $B_{3r}(a),a\in B,r>0$. 取 $m\in\mathbb{N}$ 使 $-a\in B_m$. 任给 $x\in B_r(0)$,有

$$\begin{aligned}\|Fx\|&=\sup_{\|y\|=r}r^{-1}\langle Fx,y\rangle\\&=\sup_{\|y\|=r}r^{-1}[\langle Fx,-a-x\rangle+\langle Fx,(y+a+2x)-x\rangle]\\&\leqslant r^{-1}(m+n),\end{aligned}$$

这表明 $FB_r(0)$ 有界,如所欲证. □

现在转向本节的主要对象凸函数. 微积分学中提到凸函数,但并未给予太多重视. 今天的形势已大大不同. 随着凸分析及与之关联的凸最优化理论的深入发展与广泛应用,对于凸函数的研究已形成某种热潮. 引进的凸函数概念之多,甚至已难以计数. 本节当然仅涉及最基本的内容.

记住 $J=[0,1]$. 下面约定 $t'=1-t(t\in J)$. t' 这一记号并不通用,仅在本节使用. 注意 $t\to t'$ 是 J 上的一个对合,即 $t''=t$.

定义2.4.2　设 $f: D\subset X\to\mathbb{R}$. 若 f 满足条件

$$f(t'x+ty)\leqslant t'f(x)+tf(y),\quad x,y\in D,t\in J,\tag{2.4.6}$$

则称 f 为**凸函数**,而称 $-f$ 为凹函数. 若当 $x\neq y$ 且 $0<t<1$ 时式(2.4.6) 为严格不等式,则称 f 为严格凸函数,而称 $-f$ 为严格凹函数.

凸性条件(2.4.6)有多种等价形式,各有其优点. 设 $x\neq y,z=t'x+ty$,则 $z-x=t(y-x),z-y=t'(x-y)$. 取范数后解出

$$t=\frac{\|x-z\|}{\|x-y\|},\quad t'=\frac{\|y-z\|}{\|y-x\|},$$

代入式(2.4.6)后得到

$$f(z) \leqslant \frac{\|y-z\|f(x)+\|x-z\|f(y)}{\|x-y\|}, \quad z \in [x,y]. \tag{2.4.7}$$

这一形式规范对称,直观意义明显,在应用上有其方便. 其次,用归纳法易从条件(2.4.6)推出,凸函数f满足如下 **Jensen 不等式**:

$$f\Big(\sum_i t_i x_i\Big) \leqslant \sum_i t_i f(x_i), \tag{2.4.8}$$

其中, $\sum t_i x_i$ 是 D 中点的任一凸组合. 此外,如同对于单调映射一样,对于凸函数也宜用归化法,为此需用如下基本结论: f是凸函数(严格凸函数)$\Leftrightarrow \forall x, x+h \in D, h \neq 0, f(x+th)$ 关于 $t \in J$ 是凸函数(严格凸函数).

凸函数以两种方式产生凸集. 其一是在空间 $X \times \mathbb{R}$ 中: $f: D \to \mathbb{R}$ 是凸函数等价于它的所谓上图

$$\operatorname{epi} f \triangleq \{(x,r) \in D \times \mathbb{R} : f(x) \leqslant r\} \tag{2.4.9}$$

是凸集. 当 $\operatorname{epi} f$ 为凸集时,可将其边界$\{f = r\}$ 想象为空间 $X \times \mathbb{R}$ 中的凸曲面. 其次在空间 X 中产生凸集, f是凸函数 $\Rightarrow \forall r \in \mathbb{R}, \{f \leqslant r\}$ 与$\{f < r\}$ 均为凸集. 但初看起来颇出人意外的是,这并非f为凸函数的充分条件,$f = \xi_{[0,\infty)}$ 即为反例.

现在看几个凸函数的例子.

例 2.4.1 (i) 设$A \subset X$是一非空凸集,$f(x) = d(x,A)$,今验明f为凸函数. 任给 $x,y \in X, t \in J, a,b \in A$,有

$$\begin{aligned} f(t'x + ty) &\leqslant \|t'x + ty - (t'a + tb)\| \\ &\leqslant t'\|x-a\| + t\|y-b\|. \end{aligned}$$

固定 x,y,t 而变动 a,b,使 $\|x-a\| \to f(x)$, $\|y-b\| \to f(y)$,恰好得到不等式(2.4.6). 易知f也是连续函数. 因此,若 $\delta > 0$,则集

$$\{x : d(x,A) < \delta\} \text{ 与} \{x : d(x,A) \leqslant \delta\}$$

分别为开凸集与闭凸集. 直观上,这似乎是明显的. 特别取 $A = \{x_0\}$,得到凸函数 $f(x) = \|x - x_0\|$, 开凸集 $B_\delta(x_0)$ 与闭凸集 $\bar{B}_\delta(x_0)$, 这些事实当然也易直接验明.

(ii) 若$f: X \to \mathbb{R}$ 是次线性函数(由条件(1.6.5)),则f是凸函数. 特别地,任何半范都是凸函数. 注意,凸函数未必是次线性的, $f(x) = x^2 (x \in \mathbb{R})$ 就是一个反例.

(iii) 设 $F(t,x) : [a,,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 连续且 $F_{xx} \geqslant 0$,

$$f(x) = \int_a^b F(t,x(t))\,\mathrm{d}t, \quad x \in X = C[a,b].$$

今验明f为凸函数. 由 $F_{xx} \geqslant 0$ 推出 $F(t,x)$ 对 x 为凸函数. 任给 $x,y \in X, t \in J$,有

$$\begin{aligned} f(t'x + ty) &= \int_a^b F(s, t'x(s) + ty(s))\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant \int_a^b [t'F(s,x(s)) + tF(s,y(s))]\,\mathrm{d}s \\ &= t'f(x) + tf(y), \end{aligned}$$

这就验证了条件(2.4.6).

下面依次考虑凸函数的连续性与微分性质,而重点是微分性质.基本的结论是:凸函数倾向于具有较好的连续性与微分性质.直观上这似乎是自然的.不妨想象一下,一条凸曲线容易出现间断吗?

定理2.4.2　设$f:\Omega\subset X\to\mathbb{R}$是凸函数,则以下条件互相等价:

(i) f在Ω中某个球$B_r(x_0)$内上有界;

(ii) f在Ω内局部 Lipschitz 连续.

若$\dim X<\infty$,则f必满足条件(i),因而必在Ω内局部 Lipschitz 连续.

证　为证(i)$\Leftrightarrow$(ii),显然只需证(i)$\Rightarrow$(ii).取$\beta>0$,使$f(B_r(x_0))\leqslant\beta$.取$\delta>0$充分小,今证$f$在$B_\delta(x_0)$内 Lipschitz 连续.任取$x,y\in B_\delta(x_0)$,设$\varepsilon=\|x-y\|>0$.取$y'\in B_\delta(x_0)$,使$2x_0=y+y'$,则

$$2f(x_0)\leqslant f(y)+f(y'),\quad -f(y)\leqslant\beta+2|f(x_0)|.\tag{2.4.10}$$

取$a,b\in X$,使得$x\in[a,y]$,$y\in[x,b]$,$\|a-x\|=\|b-y\|=\delta$.因δ充分小,可设$a,b\in B_r(x_0)$.用不等式(2.4.7)与式(2.4.10)得

$$\begin{aligned}f(x)-f(y)&\leqslant\frac{\varepsilon f(a)+\delta f(y)}{\varepsilon+\delta}-f(y)\\&=\frac{\varepsilon[f(a)-f(y)]}{\varepsilon+\delta}\\&\leqslant 2\delta^{-1}\varepsilon[\beta+|f(x_0)|]\triangleq\beta_1\varepsilon,\end{aligned}$$

其中,β_1与x,y无关.同理,有$f(y)-f(x)\leqslant\beta_1\varepsilon$,因此

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\beta_1\|x-y\|,$$

如所要证.

其次,证f在Ω内任一点x_1邻近上有界(因而由已证结论推出f在x_1邻近亦 Lipschitz 连续,这就得出结论(ii)).取$\rho>1$,使$z\triangleq x_0+\rho(x_1-x_0)\in\Omega$.若$x$充分邻近于$x_1$,则$(\rho-1)^{-1}(\rho x-z)$充分邻近于$x_0$.于是

$$\begin{aligned}f(x)&=f\left(\frac{\rho-1}{\rho}\frac{\rho x-z}{\rho-1}+\frac{z}{\rho}\right)\\&\leqslant\frac{\rho-1}{\rho}f\left(\frac{\rho x-z}{\rho-1}\right)+\frac{1}{\rho}f(z)\\&\leqslant\rho^{-1}[\beta(\rho-1)+f(z)]\triangleq\beta_2,\end{aligned}$$

β_2与x无关.这表明f在x_1邻近上有界,如所要证.

若$\dim X=n<\infty$,则可在Ω内取出点$x_i(0\leqslant i\leqslant n)$,使得$\{x_i-x_0:1\leqslant i\leqslant n\}$线性无关,从而$A\triangleq\mathrm{co}\{x_i:0\leqslant i\leqslant n\}$必含**内点**$\bar{x}$.用不等式(2.4.8)可推出$f$在$A$内(特别在$\bar{x}$邻近)上有界,因此$f$满足条件(i).　□

现在清点一下定理2.4.2的结论,看看凸函数有多么特殊.首先,由条件(i)与

(ii)等价推出：f 在 Ω 内要么处处连续(而且还是局部 Lipschitz 连续)，要么处处不连续(而且处处局部地上方无界). 在无限维空间中后一情况可能出现，不连续的线性泛函(可用适当方法造出)就是适例."一点连续推出处处连续"，在这一点上凸函数与线性函数一致. 若 $f: D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为凸函数，则由定理2.4.2推出 f 在 D 内部必连续，但在 ∂D 上可能出现间断. 特别地，若 $f: [a,b]\to\mathbb{R}$ 为凸函数，则 f 至多可能在端点 a 或 b 间断. 综上可以说，有了定理2.4.2之后，关于凸函数的连续性已没有更多可说的了.

至于微分性质，情况就远非如此简单，不能指望用一个定理来解决所有问题. 首先指出，实际上要处理两个很不相同的问题，即凸函数的可微性如何及可微函数在什么条件下成为凸函数. 这两个问题又都可以依据不同意义的微分来处理，这就难免面对错综复杂的情况. 不过，还是有一些令人满意的结果.

定理 2.4.3 设 $f: D\subset X\to\mathbb{R}$ 是凸函数，$x\in D$.

(i) 设 $x\pm h\in D$，则方向导数 $f'_{\pm}(x,h)$ 存在且

$$f'_{-}(x,h)\leqslant f'_{+}(x,h)\leqslant \Delta f(x,h); \tag{2.4.11}$$

(ii) 若 $\dim X<\infty$，$x\in D^{\circ}$，G 导数 $\mathrm{D}f(x)$ 存在，则 $f'(x)=\mathrm{D}f(x)$. 因此在有限维空间中，凸开集内的凸函数 G 可导与 F 可微一致.

证 (i) 令 $\varphi(t)=t^{-1}\Delta f(x,th)$，则不等式(2.4.11)相当于

$$\varphi(0^-)\leqslant\varphi(0^+)\leqslant\varphi(1).$$

因此只要证 $\varphi(t)$ 在 $(-1,0)$ 内单调减，在 $(0,1)$ 内单调增，当 $s<0<t$ 时 $\varphi(s)\leqslant\varphi(t)$. 这三件事的证明是类似的且都基于不等式(2.4.7). 不妨只证第三个结论，

$$\begin{aligned} f(x)&\leqslant\frac{t\,\|h\|f(x+sh)-s\,\|h\|f(x+th)}{(t-s)\,\|h\|}\\ &=f(x)-\frac{ts}{t-s}[\varphi(t)-\varphi(s)], \end{aligned}$$

这得出 $\varphi(s)\leqslant\varphi(t)$，如所要证.

(ii) 不妨设 $X=\mathbb{R}^n$，$\{e_i\}$ 是其标准基. 令 $g(h)=\Delta f(x,h)-f'(x,h)\,(x+h\in D)$，则 $g(h)$ 是凸函数. 由式(2.4.11)有 $g(h)\geqslant 0$，显然 $g(th)=o(t)\,(t\to 0)$. 于是

$$\begin{aligned} g(h)&=g\Big(\sum_i h_ie_i\Big)\leqslant\frac{1}{n}\sum_i g(nh_ie_i)\\ &=\sum_{h_i\neq 0}h_i\frac{g(nh_ie_i)}{nh_i}\\ &\leqslant\|h\|\Big\{\sum_{h_i\neq 0}\Big[\frac{g(nh_ie_i)}{nh_i}\Big]^2\Big\}^{1/2}=o(|h|), \end{aligned}$$

这表明 $f'(x)=\mathrm{D}f(x)$，如所要证. □

将定理2.4.3用到凸函数$f:(a,b)\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$得出$\forall x\in(a,b)$, $f'_{\pm}(x)$恒存在且$f'_{-}(x)\leqslant f'_{+}(x)$.

凸函数当然未必可微. 但一旦已知f的可微性,就能将f的凸性表为一定的微分条件. 此处不妨先回顾一下$\varphi:(a,b)\to\mathbb{R}$为凸函数的微分条件:$\varphi$是凸函数$\Leftrightarrow$ $\varphi'(t)$单调增$\Leftrightarrow\varphi''(t)\geqslant 0$, 只要所出现的导数存在. 以上结果有相当完美的推广.

定理2.4.4 设$f:\Omega\subset X\to\mathbb{R}$.

(i) 一阶条件:若f在Ω内可微,则f是凸函数$\Leftrightarrow f'(x)h\leqslant\Delta f(x,h)(x,x+h\in\Omega)\Leftrightarrow f':\Omega\to X^*$是单调映射;

(ii) 二阶条件:若f在Ω内二次可微,则f是凸函数$\Leftrightarrow\forall x\in\Omega,f''(x):X\to X^*$是正线性算子(由条件(2.4.4));

证 (i) 若f是凸函数,则直接由式(2.4.11)有$f'(x)h\leqslant\Delta f(x,h)$. 反之,设$f'(x)h\leqslant\Delta f(x,h)(x,x+h\in\Omega)$,令$\varphi(t)=f(x+th)$,设$0\leqslant s<t\leqslant 1$,则

$$\begin{aligned}\varphi'(s)&=f'(x+sh)h\leqslant(t-s)^{-1}\Delta f(x+sh,(t-s)h)\\&=(s-t)^{-1}\Delta f(x+th,(s-t)h)\leqslant\varphi'(t),\end{aligned}$$

可见φ'在J上单调增,因而φ在J上为凸函数. 这推出f为凸函数.

其次,f是凸函数$\Leftrightarrow(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)f(x+th)=\langle f'(x+th),h\rangle$在$J$上单调增$(x,x+h\in\Omega)\Leftrightarrow f'$是单调映射.

(ii) 由(i)与命题2.4.1推出. □

若$f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$二次可微,则结合式(2.2.5)与式(2.1.16)′有

$$f''(x)h^2=\sum_{i,j}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\partial x_j}h_ih_j=h^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(x)h,\quad x\in\Omega,h\in\mathbb{R}^n.$$

可见,f是凸函数$\Leftrightarrow\forall x\in\Omega$, $\nabla^2 f(x)$半正定. 通常就写$f''(x)=\nabla^2 f(x)$.

看两个应用定理2.4.4的简单例子.

例2.4.2 (i) 设H是一个实Hilbert空间,$A\in L(H)$是自伴算子,$b\in H,c\in\mathbb{R}$,考虑H上的“二次函数”$f(x)=\langle Ax,x\rangle+\langle b,x\rangle+c(x\in H)$. 利用式(2.1.7)求得

$$f'(x)h=\langle Ah,x\rangle+\langle Ax,h\rangle+\langle b,h\rangle=\langle 2Ax+b,h\rangle.$$

由H的自对偶性得$f'(x)=2Ax+b$,因而$f''(x)=2A$. 于是由定理2.4.4得出f为凸函数$\Leftrightarrow A$是正线性算子.

(ii) 设$f(x)=|x|^p(x\in\mathbb{R}^n)$. 在例2.1.2(ii)中已求得

$$\nabla^2 f(x)=p(p-2)|x|^{p-4}xx^{\mathrm{T}}+p|x|^{p-2}I,\quad 0\neq x\in\mathbb{R}^n.$$

于是

$$h^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(x)h=p(p-2)|x|^{p-4}(x^{\mathrm{T}}h)^2+p|x|^{p-2}|h|^2.$$

当$p\geqslant 2$时,显然有$h^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(x)h\geqslant 0$. 若$1\leqslant p<2$,则

$$h^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(x)h \geqslant p(p-2)|x|^{p-4}|x|^2|h|^2+p|x|^{p-2}|h|^2$$
$$=p(p-1)|x|^{p-2}|h|^2\geqslant 0.$$

这就得出,当 $p\geqslant 1$ 时 $|x|^p$ 是凸函数. 若 $p<1$,则用例子 $\sqrt{|x|}\,(x\in\mathbb{R})$ 即可说明 $|x|^p$ 未必为凸函数.

已提到凸函数未必可微. 虽然凸函数总有单侧方向导数(由定理 2.4.3),但未必适合应用上的各种需要. 因此人们致力于寻求新的弱微分概念,而这就开启了一个新的方向. 下面考虑的次微分,只是一系列弱微分概念中较简单的一种.

为表述方便,以下约定:对函数 $f: D\subset X\to\mathbb{R}$ 总认定 $f|D^c=\infty$,因而 $\forall x\in D, h\in X, \Delta f(x,h)$ 总有意义.

定义 2.4.3 设 $f: D\subset X\to\mathbb{R}, x\in D$. 令

$$\partial f(x)=\{u\in X^*: u(h)\leqslant\Delta f(x,h)\,(\forall h\in X)\}. \tag{2.4.12}$$

若 $\partial f(x)\neq\varnothing$,则说 f 在 x 次可微,称 $\partial f(x)$ 为 f 在 x 的**次微分**,称任何 $u\in\partial f(x)$ 为 f 在 x 的**次梯度**.

注意定义 2.4.3 并未预设 f 为凸函数. 不过,若 f 在 D 上处处次可微,则可推出 f 为凸函数. 因此可以说,次微分概念实际上是专为凸函数而设的.

今给次梯度一个直观解释. 设 $u\in\partial f(x_0)$,则

$$u(x)-f(x)\leqslant u(x_0)-f(x_0),\quad \forall x\in X. \tag{2.4.13}$$

令 $v=(u,-1)\in X^*\times\mathbb{R}$[①],$G=\{(x,f(x)): x\in D\}$,则不等式(2.4.13)表明 $v(G)\leqslant v(x_0,f(x_0))\triangleq c$,这意味着 f 的图形 G 位于 $X\times\mathbb{R}$ 中的超平面 $\{v=c\}$ 的一侧. 可见,超平面 $\{v=c\}$ 可看成 G 在点 $\{x_0,f(x_0)\}$ 处的一个"切平面",它由次梯度 u 唯一决定. 在这种理解下,即使 f 在 x_0 不可微,只要 f 在 x_0 次可微,f 的图形在该点处仍有切平面,只是当 $\partial f(x_0)$ 含多于一个元时,上述的切平面不是唯一的.

现在看两个例子,以获得关于次微分的具体印象.

例 2.4.3 (i) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是凸函数. 取定 $x\in\mathbb{R}$. $\forall u\in\mathbb{R}$,有

$$u\in\partial f(x)\Leftrightarrow uh\leqslant\Delta f(x,h)\,(\forall h\in\mathbb{R})$$

---

① 任给 $u\in X^*, w\in Y^*$,定义

$$\langle u\oplus w,(x,y)\rangle=u(x)+w(y),\quad (x,y)\in X\times Y,$$

则易验证 $u\oplus w\in(X\times Y)^*$ 且有拓扑同构

$$X^*\times Y^*\to(X\times Y)^*,\quad (u,w)\to u\oplus w.$$

因此不妨认定 $(X\times Y)^*=X^*\times Y^*$,将每个 $v\in(X\times Y)^*$ 写成 $v=(u,w), u\in X^*, w\in Y^*$ 且 $v(x,y)=u(x)+w(y)\,(x\in X, y\in Y)$. 特别地,有 $(X\times\mathbb{R})^*=X^*\times\mathbb{R}$,对 $v=(u,r)\in X^*\times\mathbb{R}, x\in X, y\in\mathbb{R}, v(x,y)=u(x)+ry$.

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta f(x,-h)}{-h} \leqslant u \leqslant \frac{\Delta f(x,h)}{h} (\forall h > 0)$$

$$\Leftrightarrow f'_-(x) \leqslant u \leqslant f'_+(x),$$

这就得出 $\partial f(x) = [f'_-(x), f'_+(x)]$. 可见 f 在 $\mathbb{R}$ 上处处次可微且 $\partial f(x)$ 是一个闭区间, $f'(x)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\partial f(x)$ 缩为一点. 当 $\partial f(x) = \{f'(x)\}$ 时通常就直接写作 $\partial f(x) = f'(x)$. 若 $f'_-(x) < f'_+(x)$, 则 f 的图形在 x 处有无限多条切线, 切线的斜率介于 $f'_-(x)$ 与 $f'_+(x)$ 之间.

(ii) 设 $f(x) = \|x\|$ $(x \in X)$. 首先设 $x \neq 0$. $\forall u \in X^*$, 有

$$u \in \partial f(x) \Leftrightarrow u(\varepsilon h - x) \leqslant \varepsilon\|h\| - \|x\| \ (\forall \varepsilon > 0, h \in X)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon[u(h) - \|h\|] \leqslant u(x) - \|x\| \ (\forall \varepsilon > 0, h \in X).$$

若 $u \in \partial f(x)$, 则分别取 $\varepsilon \to 0^+$ 与 $\varepsilon \to \infty$ 得出 $u(x) = \|x\|, \|u\| = 1$. 当 $u(x) = \|x\|, \|u\| = 1$ 时易直接验证 $u \in \partial f(x)$. 其次, $\forall u \in X^*$, 有

$$u \in \partial f(0) \Leftrightarrow u(h) \leqslant \|h\| \ (\forall h \in X) \Leftrightarrow \|u\| \leqslant 1.$$

综合以上两种情况得

$$\partial\|x\| = \begin{cases} \{u \in X^* : u(x) = \|x\|, \|u\| = 1\}, & x \neq 0, \\ \{u \in X^* : \|u\| \leqslant 1\}, & x = 0. \end{cases} \tag{2.4.14}$$

特别地, 用到 $f(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ 得

$$\partial|x| = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & x \neq 0, \\ [-1,1], & x = 0. \end{cases}$$

现在来说明, 次可微一般要求什么条件.

定理 2.4.5　设 $f: D \subset X \to \mathbb{R}$ 是凸函数, $x \in D$.

(i) 必要条件: 若 f 在 x 次可微, 则 f 在 x **下半连续**, 这意味着

$$x_n \to x \Rightarrow f(x) \leqslant \varliminf_n f(x_n); \tag{2.4.15}$$

(ii) 充分条件: 若 f 在 x 连续, 则 f 在 x 次可微.

概言之, 次可微介于下半连续与连续之间, 无疑是一个很弱的条件, 根本无法与 F 可微相比.

证　(i) 任取 $u \in \partial f(x)$, 设 $x_n \to x$, 则

$$f(x) \leqslant \varliminf_n [f(x_n) - u(x_n - x)] = \varliminf_n f(x_n),$$

这表明 f 在 x 下半连续.

(ii) 由 f 在 x 连续推出: $\forall \varepsilon > 0$, 存在 x 的邻域 U, 使得 $f(y) < f(x) + \varepsilon$ $(\forall y \in U)$. 令 $\rho = f(x) + 2\varepsilon$, 则 $U \times (\rho - \varepsilon, \infty) \subset \operatorname{epi} f$ (由式(2.4.9)), 故 (x, ρ) 是上图 $\operatorname{epi} f$ 的内点. 在空间 $X \times \mathbb{R}$ 中对凸集 $A = \operatorname{epi} f$ 与 $B = \{(x, f(x))\}$ 应用定理 1.6.3(i) 得出: 存在 $v = (u, \beta) \in X^* \times \mathbb{R}$, 使得

$$v(A^\circ) < v(x, f(x)), \quad v(A) \leqslant v(x, f(x)),$$

这推出

$$\begin{cases} u(x)+\beta\rho < u(x)+\beta f(x), \\ u(y)+\beta f(y) \leqslant u(x)+\beta f(x), \quad \forall y \in D. \end{cases}$$

由其中第一式与$\rho > f(x)$推出$\beta < 0$，由第二式推出

$$-\beta^{-1}u(y-x) \leqslant f(y)-f(x), \quad \forall y \in D.$$

这表明$-\beta^{-1}u \in \partial f(x)$，因而$f$在$x$次可微. □

例2.4.3(i)似乎表明，当导数存在时恰与次微分一致. 一个自然的问题是：次微分与导数之间，一般具有什么关系？下面的定理对此给出了完全的回答.

定理2.4.6 设$f: D \subset X \to \mathbb{R}$是凸函数，$x \in D$.

(i) 任给$u \in X^*$，有$u \in \partial f(x) \Leftrightarrow u(h) \leqslant f'_+(x,h)(\forall h \in X) \Leftrightarrow u(h) \geqslant f'_-(x,h)(\forall h \in X)$；

(ii) 若G导数$Df(x)$存在，则$\partial f(x) = Df(x)$；

(iii) 若f在x连续，$\partial f(x)=\{u\}$，则$u = Df(x)$. 因此，连续凸函数f在x为G可导$\Leftrightarrow \partial f(x)$仅含一元，对于$\mathbb{R}^n$上的凸函数$f$，$f'(x)$存在$\Leftrightarrow \partial f(x)$仅含一元.

证 (i)由式(2.4.11)与式(2.1.37)推出. 由(i)直接推出(ii).

(iii) 只要证$f'(x,h) \equiv u(h)$，为此又只要证$f'_\pm(x,h) = u(h)$. 取定$0 \neq h \in X$，$\alpha \in [f'_-(x,h), f'_+(x,h)]$. 定义

$$u_\alpha: \mathbb{R}h \to \mathbb{R}, \quad th \to \alpha t,$$

则u_α是一维子空间$\mathbb{R}h$上的线性泛函. 由α的选择知$u_\alpha(th) \leqslant f'_+(x,th)(t \in \mathbb{R})$. 利用$f$的凸性易推出$p = f'_+(x,\cdot)$为次线性泛函. 于是由定理1.6.1(i)推出，$u_\alpha$可扩张为$X$上的线性泛函(仍记作$u_\alpha$)，使得

$$u_\alpha(k) \leqslant p(k) = f'_+(x,k) \leqslant \Delta f(x,k), \quad \forall k \in X. \tag{2.4.16}$$

由f在x连续推出$\Delta f(x,k)$在$k=0$邻近有界，因而$u_\alpha(k)$在$k=0$邻近上有界，故$u_\alpha \in X^*$. 不等式(2.4.16)表明$u_\alpha \in \partial f(x)$. 但$\partial f(x)=\{u\}$，故$u_\alpha = u$与$\alpha$无关，这就推出$f'_-(x,h) = f'_+(x,h) = u(h)$，如所要证. □

2.5 极　值

极值是一个有点古老的概念，在人类知识体系中早就占有一席之地. 极值问题之所以重要，其根本理由在于，人们确信：无论自然与社会，任何事物在其趋于平衡时都不可避免地遵循极值原则，即在某种意义上达到最优. 例如，力学中的能量最小化，经济学中的效用最大化等. 简单的极值问题应用初等微分法就够了，但更多的极值问题有赖于越来越复杂的数学工具. 现代极值理论已经如此深化，几乎与所有数学领域都有所关联. 但我们要强调的是，至少从形式上看，极值问题的提法少有改变，如同其初等原型一样简单明晰，而解法则深深地植根于解决初等极值问

题的那些经典命题中. 本节的目的就在于让你看到利用近代微分学的概念与方法,可将一些熟知的极值结论推广到何等一般的地步. 这些推广的一部分,在变分学中早已用稍不同的形式给出并被广泛应用. 如已提到的,正是变分学的发展在一定程度上催生了近代微分学. 这一事实也就说明了,极值问题对于微分学自身的发展具有多大的重要性.

本节中设 X,Y 等是**实** Banach 空间, Ω 与 D 分别为 X 的非空开子集与非空子集,当涉及 Ω 或 D 上的凸函数时自动认定它们是凸集. 为表述简便,使用如下缩记号: $f(D) \geqslant \alpha \Leftrightarrow f(x) \geqslant \alpha (\forall x \in D)$.

下面的定义与初等微分学中的极值定义并无实质区别,所不同的只是空间框架更为一般罢了.

定义 2.5.1　设 $f: D \subset X \to \mathbb{R}, x_0 \in D$. 若存在 $\delta > 0$,使得

$$f(D \cap B_\delta(x_0)) \geqslant f(x_0), \tag{2.5.1}$$

则称 x_0 为 f 在 D 上的局部极小点,而称 $f(x_0)$ 为局部极小值. 若

$$f(D) \geqslant f(x_0), \tag{2.5.2}$$

则称 x_0 为 f 在 D 上的全局极小点或最小值点,而称 $f(x_0)$ 为 f 在 D 上的最小值.

类似地,可定义(局部或全局)极大点与极大值. 极小点与极大点合称为极值点;极小值与极大值合称为极值. 只要未加注明,说到极值时总指局部极值. 因 f 的极大点正是 $-f$ 的极小点,原则上只需要考虑极小值就够了.

源于最优化理论的一些用语与表述方法今天已广为流行且确有其优点,我们也适度采用. 若 x_0 是 $f(x)$ 在 D 上的(局部或全局)极小点,则说 x_0 是**最小化问题**

$$\min f(x), \quad \text{s.t. } x \in D \tag{2.5.3}$$

的(局部或全局)**最优解**,而称 $f(x_0)$ 为问题(2.5.3)的最优值. 若 $x_0 \in D^\circ$,则就局部问题而言,集 D 实际上不起约束作用,这种情况下的极值称为**自由极值**.

对于一个给定的最小化问题(2.5.3),通常提出的问题是

(A) 该问题的最优解是否存在?

(B) 一点 $x_0 \in D$ 成为最优解的(必要或充分)条件是什么?

(C) 如何(准确或近似地)求出最优解?

本节的主要目标是给出上述问题(B)的各种形式的解答,它们均以微分条件的形式出现,因而密切地联系着本章的微分学知识. 不过,在此之前首先给出问题(A)的一种解答,它属"纯存在性"结果,即并不提供某个确知的最优解 x_0.

定理 2.5.1　设 $f: D \subset X \to \mathbb{R}$ 下半连续且满足条件

$$\lim_{x \in D, \|x\| \to \infty} f(x) = \infty, \tag{2.5.4}$$

当 D 有界时认定条件(2.5.4)自动满足, D 是闭集, 则附加以下两条件之一可使 f 在 D 上取得最小值:

(i) $\dim \operatorname{span} D < \infty$;

(ii) X 是自反空间,f 为凸函数.

证　令 $\alpha = \inf f(D)$. 取序列 $\{x_n\} \subset D$,使得 $f(x_n) \to \alpha(n \to \infty)$. 利用条件(2.5.4) 推出 $\{x_n\}$ 有界. 若条件(i) 满足,则 $\{x_n\}$ 必有收敛子列,不妨就设 $x_n \to x_0 \in D$,于是 $f(x_0) \leqslant \underline{\lim}_n f(x_n) = \alpha$(由式(2.4.15)),这推出 $f(x_0) = \alpha$ 就是最小值. 其次设条件(ii)满足. 由定理1.6.5,不妨设 $x_n \rightharpoonup x_0(n \to \infty)$. 由定理1.6.6,$D$ 是弱闭的,因此 $x_0 \in D$. 为证 $f(x_0) = \alpha$,只要对任给 $\beta > \alpha$,证 $x_0 \in A \triangleq \{f \leqslant \beta\}$. 由 f 为下半连续凸函数推出 A 是凸闭集,因而也是弱闭的. 不妨设 $f(x_n) \leqslant \beta(n \in \mathbb{N})$,因此 $x_0 \in A$,如所要证. □

定理2.5.1 显然蕴涵了经典的 Weierstrass 定理:闭区间上的实连续函数必取得最小值. 可以说,定理2.5.1 就是一个很一般的 Weierstrass 定理. 定理证明中用到的序列 $\{x_n\}$ 称为**极小化序列**. 在极值理论中运用极小化序列乃是一种普遍方法. 不过,定理2.5.1 并未给出构成极小化序列的任何具体方法.

由定理1.3.4(ii)直接推出 Weierstrass 定理的如下有限维形式:若 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是有界闭集,$f \in C(D,\mathbb{R})$,则 f 在 D 上取得最大值与最小值. 必须强调, $\mathbb{R}^n$ 不能代以一般赋范空间. 下面就是一个反例:

$$f(x) = \int_0^1 |x(t)| \, \mathrm{d}t, \quad x \in D,$$

其中, D 是 $X = C[0,1]$ 中的单位球面. 显然 $f \in C(D,\mathbb{R})$. 设 $x_n(t) = t^n(t \in [0,1], n \in \mathbb{N})$,则 $\{x_n\} \subset D$,$f(x_n) = (n+1)^{-1} \to 0(n \to \infty)$. 另一方面, $\forall x \in D$,显然有 $f(x) > 0$. 可见 $f(x)$ 在 D 上不取得最小值.

如已提到的,本节的主要任务是给出极值的微分条件,现在就来考虑. 与经典微分学中不同,现在有强弱不等的多种微分概念可用,因而极值的微分条件亦相应地具有多种形式,下面依从强到弱的顺序依次考虑. 首先推广初等微分学中的以下结论:设 f: $(a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$. 若 x_0 是 f 的极值点而 f 在 x_0 可微,则 $f'(x_0) = 0$. 反之,若 $f'(x_0) = 0$,$f''(x_0) > 0$,则 x_0 是 f 的极小点.

定理2.5.2　设 f: $D \subset X \to \mathbb{R}$,$x_0 \in D^\circ$.

(i) 必要条件:若 x_0 是 f 的极小点,$f'(x_0)$ 存在,则 $f'(x_0) = 0$;

(ii) 充分条件:若 f 在 x_0 邻近是 C^2 函数,$f'(x_0) = 0$,$f''(x_0)$ 是强正的(由条件(2.4.5)),则 x_0 是 f 的极小点.

证　(i) 只要证 $f'(x_0)h = 0(\forall h \in X)$. 取定 $h \in X$,因 $\varphi(t) \triangleq f(x_0 + th)$ 以 $t = 0$ 为其极小点,故有 $0 = \varphi'(0) = f'(x_0)h$, 如所要证.

(ii) 取 $\lambda > 0$,使 $f''(x_0)h^2 \geqslant 2\lambda \|h\|^2$(由条件(2.4.5)). 取 $\delta > 0$,使得

$$\|f''(x_0 + z) - f''(x_0)\| < \lambda, \quad \forall z \in B_\delta(0).$$

任给 $h \in B_\delta(0)$, 由 Taylor 公式(2.1.26)有

$$2\Delta f(x_0,h) = f''(x_0 + z)h^2 \quad (z \in [0,h])$$

$$= f''(x_0)h^2 + [f''(x_0 + z) - f''(x_0)]h^2$$
$$\geq 2\lambda \|h\|^2 - \lambda \|h\|^2 = \lambda \|h\|^2,$$

可见 x_0 是 f 的极小点. □

定理2.5.2 特别蕴涵了如下有限维结论:设 $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是 C^2 函数, $x_0 \in \Omega$, $\nabla f(x_0) = 0$, $\nabla^2 f(x_0)$ 正定,则 x_0 是 f 的极小点.

从形式上看,定理2.5.2 作为经典极值条件的推广堪称完美. 但从应用上考虑,它并不能完全令人满意. 首先,要求 x_0 为内点就是一极强限制,它排除了 x_0 为边界点或 D 根本无内点的情况,而后者在应用上恰恰是常见的. 其次,如在2.1 节中已指出的,在无限维空间中 F 可微是一个很强的条件,更不必说 $f \in C^2$ 了. 因此有必要除去内点要求且考虑更弱的微分条件. 注意到方向导数是一个简单而便于运用的工具,以方向导数取代 F 导数看来是一个值得一试的选择. 下面是一个虽然简单但不失为有用的结果.

定理2.5.3　设 $f: D \subset X \to \mathbb{R}$, D 为凸集, $x_0 \in D$, $f'_+(x_0, h)$ $(h \in X)$ 恒存在.

(i) 必要条件:若 x_0 是 f 的极小点,则

$$f'_+(x_0, D - x_0) \geq 0. \tag{2.5.5}$$

若 $D - x_0$ 是 X 的子空间, f 在 x_0 处 G 可微,则条件(2.5.5) 相当于

$$f'(x_0, D - x_0) = 0; \tag{2.5.6}$$

(ii) 充分条件:若 f 是凸函数且条件(2.5.5) 满足,则 $f(x_0) = \min f(D)$.

证　(i) 任给 $x \in D$,令 $h = x - x_0$,则

$$f'_+(x_0, h) = \lim_{t \to 0^+} t^{-1} \Delta f(x_0, th) \geq 0,$$

这正表明条件(2.5.5)满足. 若 $D - x_0$ 是子空间, $h \in D - x_0$,则

$$0 \leq f'(x_0, h) = -f'(x_0, -h) \leq 0$$

(由式(2.5.5)与式(2.1.37)),这得出式(2.5.6).

(ii) 任给 $x \in D$,令 $h = x - x_0$,则结合式(2.5.5) 与式(2.4.11) 有

$$0 \leq f'_+(x_0, h) \leq \Delta f(x_0, h) = f(x) - f(x_0),$$

这正表明 $f(x_0)$ 是最小值. □

将定理2.5.3 用到函数 $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 得出:若 a(或 b) 是 f 的极小点,则 $f'_+(a) \geq 0$(或 $f'_-(b) \leq 0$),只要这些单侧导数存在.

定理2.5.3 可用来解决如下变分问题.

例2.5.1　考虑如下最小化问题:

$$\begin{cases} \min \displaystyle\int_a^b F(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x, \\ \text{s.t. } y(a) = \alpha, y(b) = \beta, y \in Y = C^2[a, b], \end{cases} \tag{2.5.7}$$

其中, α, β 是实常数. 令 $D = \{y \in Y: y(a) = \alpha, y(b) = \beta\}$,

$$f(y)=\int_a^b F(x,y(x),y'(x))\mathrm{d}x,\quad y\in D,$$

则问题归于求f在D上的极小点. 任给$y_0\in D$,$D-y_0$显然是Y的子空间,实际上它就是$Y_0\triangleq\{y\in Y: y(a)=y(b)=0\}$. 下面考虑应用条件(2.5.6),为此需计算方向导数$f'(y,h)$. 设$F(x,y,p)\in C^2$,$p=y'$. 下面用一种较简易的计算法(更严格的处理并无原则困难,只是增加许多琐碎细节). 任给$y\in Y$,$h\in Y_0$,有

$$\begin{aligned}f'(y,h)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(y+th)\Big|_{t=0}\\&=\int_a^b\Big[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(x,y(x)+th(x),y'(x)+th'(x))\Big|_{t=0}\Big]\mathrm{d}x\\&=\int_a^b[F_y(x,y(x),y'(x))h(x)+F_p(x,y(x),y'(x))h'(x)]\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\Big(Fy-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_p\Big)h(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中用了分部积分与$h(a)=h(b)=0$, $F_y=F_y(x,y(x),y'(x))$,F_p类似. 于是条件(2.5.6) 可表成

$$\int_a^b\Big(F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_p\Big)h(x)\mathrm{d}x=0,\quad\forall h\in Y_0.\tag{2.5.8}$$

可以说明Y_0在$L^2[a,b]$中稠密(关于L^p空间的系统讨论见3.5节). 于是由条件(2.5.8)得出

$$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_p=0,\tag{2.5.9}$$

这是一个关于未知函数$y(x)$的二阶非线性微分方程,称它为变分问题(2.5.7)的**Euler方程**①. 若F不显含x,则可验证方程(2.5.9) 等价于$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F-pF_p)=0$或

$$F-pF_p=\text{const.}\tag{2.5.10}$$

应当注意,以上结果所依据的式(2.5.6)只是必要条件. 因此只能断定,问题(2.5.7)的解包含在方程(2.5.9)(或方程(2.5.10))的解中,至于方程(2.5.9)的解是否真是问题(2.5.7)的解,则应由其他考虑决定.

现在用以上方法来解决如下著名的**最速降线问题**. 设$y=y(x)$是xy平面上连接点(0,0) 与(b,h)($b,h>0$) 的光滑曲线,y轴铅直朝下. 今要选取函数$y(x)$,使质点沿该曲线无摩擦地从点(0,0) 下滑至点(b,h)时所用时间T最短. 不妨设质点的质量$m=1$. 因质点动能的增加等于其势能的减少. 故有$v^2=2gy$,v是线速度,g

---

① 在现代文献中,Euler方程是一个被广泛使用但并未严格界定的术语. 一般地,任何用等式表达的极值微分条件统称为Euler方程.

是重力加速度. 于是

$$T = \int_0^T \mathrm{d}t = \int_0^T \frac{\mathrm{d}s(t)}{v(t)} = \int_0^b \sqrt{\frac{1+p^2}{2gy}}\mathrm{d}x,$$

其中, $p = y'$. 这就形成问题(2.5.7)的如下特例:

$$\begin{cases} \min \int_0^b F(y(x), y'(x))\mathrm{d}x, \\ \text{s.t. } y(0) = 0, y(b) = h, y \in Y = C^2[0,b], \end{cases}$$

其中, $F(y,p) = \sqrt{(1+p^2)/y}$. 将此 F 代入式(2.5.10) 得

$$y(1+p^2) = 2a,$$

其中, a 是正常数. 这是一个一阶隐方程,用参数法求解:以 $p = \cot(t/2)$ 代入后解出 $y = 2a/(1+p^2) = a(1-\cos t)$, 然后有

$$x = \int_0^t \frac{\mathrm{d}y}{p} = a\int_0^t (1-\cos s)\mathrm{d}s = a(t - \sin t).$$

现在你已认出,最速降线原来是旋轮线.

利用解问题(2.5.7)的思想(而不是用其结论)可解以下问题:

例 2.5.2　设一薄膜边界固定在柱面 $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ 上, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一有界区域, $u(x,y)$ 表示点 (x,y) 的位移. 在无外力作用时薄膜具有势能

$$f(u) = \iint_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

在平衡时 $f(u)$ 应达到最小,因而薄膜的平衡状态解最小化问题

$$\begin{cases} \min f(u), \\ \text{s.t. } u|\partial\Omega = \varphi, u \in X = C^2(\bar{\Omega}), \end{cases} \tag{2.5.11}$$

φ 是给定光滑函数. 任给 $u \in X, h \in X_0 \triangleq \{u \in X: u|\ \partial\Omega = 0\}$, 有

$$\begin{aligned} f'(u,h) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_\Omega |\nabla(u+th)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \Big|_{t=0} \\ &= 2\iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -2\iint_\Omega (\Delta u) h \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

其中用了 Green 公式与 $h|\ \partial\Omega = 0$. 于是类似于例 2.5.1,得出问题(2.5.11)的 Euler 方程为 Laplace 方程 $\Delta u = 0$.

现在再回到一般的极值问题. 定理 2.5.3 已经大大降低了可微性条件,再往前走一步,就要用到次微分了. 下面是一个很简单的结果:

定理 2.5.4　设 $f: X \to \mathbb{R}, x_0 \in D \subset X$.

(i) 充要条件: $f(x_0) = \min f(D) \Leftrightarrow 0 \in \partial(f|\ D)(x_0)$;

(ii) 充分条件：若存在 $u \in \partial f(x_0)$，使得 $u(D - x_0) \geqslant 0$，则

$$f(x_0) = \min f(D).$$

证 (i) 直接看出

$$f(x_0) \leqslant f(D) \Leftrightarrow 0 \leqslant f(D) - f(x_0)$$
$$\Leftrightarrow 0 \in \partial(f \mid D)(x_0).$$

(ii) 若 $u \in \partial f(x_0)$ 满足 $u(D - x_0) \geqslant 0$，则

$$0 \leqslant u(x - x_0) \leqslant f(x) - f(x_0), \quad \forall x \in D.$$

这正表明 $f(x_0) = \min f(D)$. □

我们将在本节的最后一个例子中解释定理 2.5.4 的应用.

至此为止，关于一般最小化问题(2.5.3)的定理都没有解释点集 D 的构成，而这一点恰好是重要的. D 可能用各种方法给定. 应用上常见的情形之一是 D 由某个等式约束条件给定：$g(x) = 0$①，其中，$g: \Omega \subset X \to Y$. 在这种情况下，可将问题(2.5.3) 改写成

$$\min_{x \in \Omega} f(x), \quad \text{s.t. } g(x) = 0. \tag{2.5.12}$$

问题(2.5.12)称为等式约束的**条件极值**问题，或简称为条件极值问题，f 与 g 分别称为该问题的目标函数与约束函数. 因问题(2.5.12) 不过是问题(2.5.3) 的特例，并不存在重新界定其最优解的问题. 对于问题(2.5.12) 可给出很类似于定理 2.5.2 的微分条件.

定理 2.5.5 设 $f: \Omega \subset X \to \mathbb{R}$ 在 $x_0 \in \Omega$ 可微，$g \in C^1(\Omega, Y)$，$g'(x_0)$ 为满射，x_0 是问题(2.5.12) 的最优解，则存 $\lambda \in Y^*$，使得

$$f'(x_0) + \lambda \circ g'(x_0) = 0. \tag{2.5.13}$$

证 令 $T = g'(x_0)$，则式(2.5.13) 相当于 $f'(x_0) = -T^*\lambda \in R(T^*)$. 由 $R(T) = Y$ 与定理 1.6.9 推出 $R(T^*) = N(T)^\perp$. 于是只要证 $f'(x_0) \in N(T)^\perp$. 取定 $h \in N(T)$，由下面补述的 Lusternik 定理，当 $|t|$ 充分小时，方程

$$g(x_0 + y + th) = 0$$

有解 $y = y(t) = o(t)(t \to 0)$. 于是当 $|t|$ 充分小时，有

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant f(x_0 + y(t) + th) - f(x_0) \\ &= f'(x_0)(y(t) + th) + o(y(t) + th) \\ &= tf'(x_0)h + o(t). \end{aligned}$$

除以 t 后分别取 $t \to 0^+$ 与 $t \to 0^-$ 从以上不等式推出 $f'(x_0)h \geqslant 0 \geqslant f'(x_0)h$，于是 $f'(x_0)h = 0$. 故得 $f'(x_0) \in N(T)^\perp$，如所要证. □

以上证明中用到的 Lusternik 定理可表述为

---

① 换成 $g(x) = c$，$c \in Y$ 与 x 无关，下面的所有讨论与结论均无需改变.

定理 2.5.6 设 $g: \Omega \subset X \to Y$ 是 C^1 映射, $x_0 \in \Omega, g'(x_0)$ 为满射; 则当 $h \in X$, $\|h\|$ 充分小时, 方程

$$g(x_0 + y + h) = g(x_0) + g'(x_0)h$$

有解 $y = y(h)$ 且 $\|y(h)\| = o(\|h\|)(\|h\| \to 0)$.

关于 Lusternik 定理的证明可参见文献(陈文嫄, 1982)的 §7.1.

现在对定理 2.5.5 的结论作稍不同的解释. 令

$$L(x,\lambda) = f(x) + \lambda(g(x)), \quad x \in \Omega, \lambda \in Y^*, \tag{2.5.14}$$

则条件(2.5.13)可写作 $L_x(x_0,\lambda) = 0$. 在形式上, 这正是自由极值问题

$$\min L(x,\lambda), \quad x \in \Omega \tag{2.5.15}$$

以 x_0 为最优解的必要条件(见定理 2.5.2(i)). 函数 $L(x,\lambda)$ 称为问题(2.5.12)的 **Lagrange 函数**, 而使式(2.5.13)成立的 $\lambda \in Y^*$ 称为 **Lagrange 乘子**. 因此可以说, 通过引进 Lagrange 函数 $L(x,\lambda)$, 条件极值问题(2.5.12) 转化成了自由极值问题(2.5.15). 原问题中的约束条件 $g(x) = 0$ 因被吸收到函数 $L(x,\lambda)$ 中而在表面上被消去了. 这一看似奇特的方法, 对于处理条件极值问题常能收到意想不到的效果, 在近代极值理论中被广泛采用且发展出多种多样的形式, 成为一种具有很大普遍性的方法.

若取 $Y = \mathbb{R}^m, g = (g_1, g_2, \cdots, g_m)^{\mathrm{T}}, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$, 则

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_i \lambda_i g_i(x), \quad x \in \Omega, \lambda \in \mathbb{R}^m, \tag{2.5.16}$$

$$L_x(x_0,\lambda) = f'(x_0) + \sum_i \lambda_i g_i'(x_0), \tag{2.5.17}$$

其中, λ_i 就是通常所说的 Lagrange 乘数. 条件 $R(g'(x_0)) = \mathbb{R}^m$ 相当于 $\{g_i'(x_0): 1 \leqslant i \leqslant m\}$ 线性无关, 当 $m = 1$ 时这就是 $g'(x_0) \neq 0$. 若进而设 $X = \mathbb{R}^n$, 则 $g'(x_0) \in \mathbb{R}^{m \times n}, g'(x_0)$ 为满射 $\Leftrightarrow \operatorname{rank} g'(x_0) = m$(行满秩).

以两个古典极值问题为例来解释定理 2.5.5 的应用.

例 2.5.3(等周问题) 求 xy 平面上一光滑闭曲线

$$C: x = x(t), \quad y = y(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

使其周长一定, 而所围面积最大. 这意味着解以下条件最大化问题:

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_0^{2\pi} [x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)]\mathrm{d}t, \\ \text{s.t. } \displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,\mathrm{d}t = \text{const}, \end{cases} \tag{2.5.18}$$

其中, $x, y \in X = C^2(\mathbb{T}^1)$ (见 2.2 节), $\dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$. 注意此处用了面积公式

$$C \text{ 所围面积} = \frac{1}{2}\int_C x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x.$$

作 Lagrange 函数(由式(2.5.16))

$$L(x,y,\lambda) = \int_0^{2\pi} [x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t) + \lambda\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}]\mathrm{d}t,$$

其中, $x,y \in X, \lambda \in \mathbb{R}$. 用例 2.5.1 中所用的方法不难求出

$$L_x(x,y,\lambda)h = \int_0^{2\pi} [2 - \lambda k(t)]\dot{y}(t)h(t)\mathrm{d}t,$$

$$L_y(x,y,\lambda)h = \int_0^{2\pi} [\lambda k(t) - 2]\dot{x}(t)h(t)\mathrm{d}t,$$

其中, $h \in X, k = (\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y})(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-3/2}$. 立即看出 $|k|$ 就是曲线 C 的曲率, 条件 $L_{(x,y)}(x,y,\lambda) = 0$ 相当于

$$L_x(x,y,\lambda) = 0, \quad L_y(x,y,\lambda) = 0,$$

由此方程组解出 $k \equiv \mathrm{const}$. 可见,所求的曲线就是圆周,直观上,这是意料中的事.

例 2.5.4(球面测地线)　求单位球面 $\mathbb{S}^2(\subset \mathbb{R}^3)$ 上的光滑曲线 $x(t)(0 \leqslant t \leqslant 1)$,使其端点 $x(0) = a$ 与 $x(1) = b$ 固定而长度最短. 这意味着解最小化问题

$$\begin{cases} \min \displaystyle\int_0^1 |\dot{x}(t)|\,\mathrm{d}t \\ \text{s. t. } |x(t)| \equiv 1, x(0) = a, x(1) = b, \end{cases} \tag{2.5.19}$$

其中, $x \in X = C^2(J,\mathbb{R}^3), J = [0,1]$. 问题(2.5.19)中的约束条件可写作 $g(x) = 1$,其中, $g(x): X \to Y, x \to |x|^2, Y = C(J)$. 此处要引用推论 3.7.1,将 $\lambda \in Y^*$ 表为

$$\lambda(y) = \int_0^1 y(t)\mathrm{d}\varphi(t), \quad y \in Y.$$

作 Lagrange 函数

$$L(x,\lambda) = \int_0^1 |\dot{x}(t)|\,\mathrm{d}t - \int_0^1 |x(t)|^2\mathrm{d}\varphi(t).$$

为表出条件 $L_x(x,\lambda) = 0$,下面使用一个粗略的方法,用以突出解此问题的基本思想,而不拘泥于细节,以免陷入过于烦琐的讨论. 首先,假定 $\mathrm{d}\varphi = \lambda\mathrm{d}t$,因而可改写 $L(x,\lambda)$ 为

$$L(x,\lambda) = \int_0^1 [|\dot{x}(t)| - \lambda(t)|x(t)|^2]\mathrm{d}t.$$

仿例 2.5.1 算出

$$L_x(x,\lambda)h = \int_0^1 \{|\dot{x}|^{-3}[(\dot{x}\cdot\ddot{x})\dot{x} - |\dot{x}|^2\ddot{x}] - 2\lambda x\}\cdot h\mathrm{d}t,$$

其中, $h \in X, h(0) = h(1) = 0$. 这就得到问题(2.5.19)的 Euler 方程

$$(\dot{x}\cdot\ddot{x})\dot{x} - |\dot{x}|^2\ddot{x} - 2\lambda|\dot{x}|^3 x = 0. \tag{2.5.20}$$

由 $|x| \equiv 1$ 得 $x\cdot\dot{x} = 0, x\cdot\ddot{x} = -|\dot{x}|^2$. 分别以 $x,\ddot{x}$ 与式(2.5.20)两端作内积得

$$2\lambda|\dot{x}|^3 = -|\dot{x}|^2(x\cdot\ddot{x}) = |\dot{x}|^4,$$

$$(\dot{x}\times\ddot{x})^2 = |\dot{x}|^2|\ddot{x}|^2 - (\dot{x}\cdot\ddot{x})^2 = |\dot{x}|^6.$$

以 $2\lambda = |\dot{x}|$ 代入式(2.5.20)消去 λ，得

$$(\dot{x}\cdot\ddot{x})\dot{x} - |\dot{x}|^2\ddot{x} - |\dot{x}|^4 x = 0.$$

放宽可微性限制，设 $x \in C^3$，将上式微分一次，然后与 $\dot{x}\times\ddot{x}$ 作内积得出 $[\dot{x}\ \ddot{x}\ \dddot{x}] = 0$. 于是用微分几何中的结论得出 $x(t)$ 为平面曲线. 由前面已得的 $|\dot{x}\times\ddot{x}| = |\dot{x}|^3$ 得出曲线的曲率为1，因此只能是大圆的一段. 以上讨论当然留下一些不严格之处，但其转化问题的思想却是清楚且具有普遍价值的.

在近代极值理论中，所考虑的条件极值问题并不限于等式约束，也用到不等式约束，而且后者更具一般性（注意条件 $g(x) = 0$ 可换成不等式约束 $g(x) \leqslant 0 \leqslant -g(x)$）. 现在考虑一个与问题(2.5.12)相对应的不等式约束条件极值问题

$$\min f(x), \quad \text{s.t. } g(x) \leqslant 0, \qquad (2.5.21)$$

看前面所用的 Lagrange 函数法是否依然有效. 令人满意的是，仍然能建立类似于定理2.5.5的如下结果：

定理2.5.7　设 $f: \Omega\subset X\to\mathbb{R}$ 在 $x_0\in\Omega$ 可微，$g\in C^1(\Omega,\mathbb{R}^m)$，$g(x_0) = 0$，$g'(x_0)$ 为满射. 若 x_0 是问题(2.5.21)的最优解，则存在 $\lambda\in\mathbb{R}^m_+$，使得

$$f'(x_0) + \sum_i \lambda_i g_i'(x_0) = 0. \qquad (2.5.22)$$

证　关键之点是注意到，x_0 也是问题(2.5.12)的最优解，于是由定理2.5.5有 $\lambda\in\mathbb{R}^m$ 使条件(2.5.22)满足. 余下证 $\lambda\geqslant 0$（注意在 $\mathbb{R}^m$ 中总使用标准向量序）. 因 $T\triangleq g'(x_0)$ 为满射，故 $\mathbb{R}^m_+\subset R(T)$. 由式(2.5.22)有 $\langle\lambda, Th\rangle = -f'(x_0)h$，故只要证 $Th\geqslant 0\Rightarrow f'(x_0)h\leqslant 0$. 取定 $h\in X$ 使 $Th\geqslant 0$. 由定理2.5.6，当 $t>0$ 充分小时，方程

$$g(x_0 + y - th) = -tTh$$

有解 $y = y(t) = o(t)\ (t\to 0^+)$. 于是当 $t>0$ 充分小时，有

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant f(x_0 + y(t) - th) - f(x_0) \\ &= f'(x_0)(y(t) - th) + o(y(t) - th) \\ &= -tf'(x_0)h + o(t), \quad t\to 0^+. \end{aligned}$$

这推出 $f'(x_0)h\leqslant 0$，如所要证. □

与定理2.5.5不尽相当的是，此处并没有使用更一般的约束函数 $g\in C^1(\Omega, Y)$，而只限定 $Y = \mathbb{R}^m$. 实际上，将定理2.5.7推广到这种更一般的形式完全不成问题，只要 Y 是一个有序 Banach 空间就行了.

下面是定理2.5.7的一个简单应用.

推论2.5.1　设 H 是一个实 Hilbert 空间，$f: H\to\mathbb{R}$ 可微，$r>0$，

$$f(x_0) = \min\{f(x): \|x\|\leqslant r\}, \quad \|x_0\|\leqslant r.$$

则存在 $\lambda\leqslant 0$，使得 $f'(x_0) = \lambda x_0$.

证　若 $\|x_0\| < r$，则取 $\lambda = 0$（由定理2.5.2）. 若 $\|x_0\| = r$，则取 $g(x) =$

$\|x\|-r$, 应用定理2.5.7得$\tau \geqslant 0$,使$f'(x_0)=-\tau g'(x_0)=\lambda x_0,\lambda=-\tau/r$(由式(2.1.4)). □

本节建立了形式上很不相同的多种极值条件,显得有些庞杂,该作点总结.最好的方式是用一个统一的例子来依次解释各种极值条件,从而将它们贯穿起来.

例2.5.5(最佳逼近问题)　给定非空集$A\subset X$与$b\in A^c$. 若$a\in A$满足

$$\|a-b\|=d(b,A),$$

则称a为b在A中的最佳逼近.求b在A中的最佳逼近,相当于解最小化问题

$$\min \|x-b\|,\quad \text{s.t. } x\in A. \tag{2.5.23}$$

问题(2.5.23)的目标函数$f(x)=\|x-b\|$似乎很简单.但因集A有很大的多样性,问题并不简单,很难给出完全的解法.即使用上本节的所有结果,也只能处理若干特殊情况.不过,问题(2.5.23)用作说明的例子还是很适当的.

(i) $f(x)=\|x-b\|$是连续凸函数且显然满足条件(2.5.4).于是应用定理2.5.1得出:若A是某个有限维子空间中的闭集,或X是自反空间而A是闭凸集,则b在A中的最佳逼近存在(但未必唯一).

(ii) 设X是实Hilbert空间,A是凸集.由式(2.1.4)有

$$\nabla\|x-b\|=\|x-b\|^{-1}(x-b),\quad x\in A.$$

于是由定理2.5.3得出:x_0是b在A中的最佳逼近的充要条件是

$$\langle b-x_0,x-x_0\rangle\leqslant 0,\quad \forall x\in A. \tag{2.5.24}$$

几何上,条件(2.5.24)意味着:对任给$x\in A$,向量$x-x_0$与$b-x_0$张成钝角.这与我们在平常空间中的直觉经验显然是一致的.若A是X的闭子空间,则不难看出条件(2.5.24)意味着$b-x_0\in A^{\perp}$,这恰与定理1.7.3的结论一致.

(iii) 对任给$x\in A$,由式(2.4.14)有

$$\partial\|x-b\|=\{u\in X^*: u(x-b)=\|x-b\|,\|u\|=1\}.$$

于是由定理2.5.4(ii)得出:若$x_0\in A$,存在$u\in X^*$满足条件

$$u(x_0-b)=\|x_0-b\|,\|u\|=1,u(x-x_0)\geqslant 0,\quad \forall x\in A, \tag{2.5.25}$$

则x_0是b在A中的最佳逼近.若A是X的子空间,则$u(x-x_0)\geqslant 0(\forall x\in A)\Leftrightarrow u\in A^{\perp}$,这就可将条件(2.5.25)改写成

$$u\in A^{\perp},\|u\|=1,\quad u(x_0-b)=\|x_0-b\|. \tag{2.5.26}$$

"$\|u\|=1,u(x_0-b)=\|x_0-b\|$"也称为共线条件.若$X$为Hilbert空间,则取$u=\|x_0-b\|^{-1}(x_0-b)$使条件(2.5.26)满足,此时$u$与$x_0-b$真正共线.

(iv) 设X是实Hilbert空间,A是X的闭子空间,P是从X到$A^{\perp}$的正投影,则问题(2.5.23)可改写成

$$\min \|x-b\|,\quad \text{s.t. } Px=0. \tag{2.5.27}$$

因认定$P\in L(X,A^{\perp})$时P是满射,故由定理2.5.5得出:若x_0是b在A中的最佳逼近,则存在$\lambda\in(A^{\perp})^*=A^{\perp}$,使得(注意$P=P^*,P\lambda=\lambda$)

$$\|x_0 - b\|^{-1}(x_0 - b) + \lambda = 0,$$

从而 $x_0 - b = -\|x_0 - b\|\lambda \in A^{\perp}$. 这再次得出定理 1.7.3 的结论.

(v) 设 X 是实 Hilbert 空间, $A = \bar{B}_r(a)\,(a \in X, r > 0)$, 则问题(2.5.23) 可表为

$$\min \|x - b\|, \quad \text{s.t. } g(x) = \|x - a\| - r \leqslant 0.$$

若 x_0 是 b 在 A 中的最佳逼近, 则必 $g(x_0) = 0$. 由定理 2.5.7 有 $\lambda \in \mathbb{R}_+$, 使得

$$\|x_0 - b\|^{-1}(x_0 - b) + \lambda\|x_0 - a\|^{-1}(x_0 - a) = 0.$$

由以上等式得出 $\lambda = 1$, 然后解出

$$x_0 = \frac{\|a - x_0\|b + \|x_0 - b\|a}{\|a - x_0\| + \|x_0 - b\|},$$

这表明 x_0 是线段 $[a, b]$ 与球面 $\partial B_r(a)$ 是交点. 直观上, 这是理所当然的.

2.6 微分方程

在分析数学中, 微分方程论是一个大题目, 当然无法成为本书的论题. 不过, 作为微分方程理论基础的存在定理, 则密切地联系于微分学, 因而是应用本章理论与方法的适当课题.

设 X 与 M 是给定的 Banach 空间. 考虑带参数 μ 的一阶常微分方程

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \mu), \tag{2.6.1}$$

其中, $\dot{x}(t)$ 表示 x 对 t 的导数(本节皆如此), $f: \Omega \subset \mathbb{R} \times X \times M \to X$. 如在常微分方程论中所看到的, 关于方程(2.6.1) 的基本问题是

(A) 解的存在唯一性: 给定 $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{\mu}) \in \Omega$, 是否存在一个含 $\bar{t}$ 的开区间 I, 使得方程(2.6.1) 在 I 上存在唯一解 $x(t) = x(t, \bar{t}, \bar{x}, \bar{\mu})$, 它满足 $x(\bar{t}) = \bar{x}$?

(B) 解对初值与参数的连续与可微性: 若 $x(t, \bar{t}, \bar{x}, \bar{\mu})$ 是问题(A)的唯一解, 它是否具有对 $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{\mu})$ 的连续性与可微性?

在 X 与 M 为有限维空间的情况下, 传统的常微分方程理论对于上述问题已给出完全而标准的解法, 且其结论已成为广泛应用的常识. 但其论证的全过程并不很简单, 我们并无兴趣去描述有关细节. 本节的目的是运用本章所述的概念、工具与语言, 给出问题(A)与(B)的一个统一而又简捷的解法, 以显示抽象分析方法的非同寻常的效力.

在 2.3 节中曾强调, 隐函数问题实质上是一个方程问题. 而现在则要指出, 求解方程(2.6.1)的问题可转化为某个隐函数方程问题. 这一首先由 Robbin(1968) 开创的颇为新颖的方法, 开启了应用隐函数定理于方程研究(包括微分方程、积分方程、差分方程等)的新途径. 隐函数方法有许多优势, 值得强调的至少有如下两点: 它不受空间维数的限制, 而且解的存在唯一性与对初值的连续或可微依赖性是同时解决

的,这就大大缩短了解答问题(A)与(B)的全过程. 不过仍得指出,所面对的问题毕竟有其复杂性. 如同在2.3节中一样,将主要阐明方法的要点,并不追求细节上的完备性,只是在本节最后才弥补主要结论证明中的某些缺陷.

本节中 I 总记实开区间,$I_\delta = (-\delta,\delta)$,$\delta > 0$. 以下是关于方程(2.6.1)的一个基本定理.

定理2.6.1 设 $f: \Omega \subset \mathbb{R} \times X \times M \to X$ 是 $C^r(1 \leqslant r \leqslant \infty)$ 函数,则对任给 $(t_0, x_0, \mu_0) \in \Omega$,存在含 t_0 的开区间 I、(x_0, μ_0) 的开邻域 $U \times V (\subset X \times M)$ 及 $I \times I \times U \times V$ 上 C^r 的 X 值函数 $\theta(t,s,x,\mu)$,使得对任给 $(s,x,\mu) \in I \times U \times V$,$x(t) = \theta(t,s,x,\mu)$ 满足方程(2.6.1)与初值条件 $x(s) = x$. 如果 $\bar{x}(t)(t \in I)$ 亦是方程(2.6.1)的解且 $\bar{x}(s) = x$,则必 $\bar{x}(t) = \theta(t,s,x,\mu)(t \in I)$.

证 证明由以下3步组成:

(i) 简化问题. 这一步是常规的,所用方法在常微分方程论中是标准的. 令 $Y = \mathbb{R} \times X \times M$,则 Y 是一个实 Banach 空间. 定义

$$\Phi(y) = (1, f(y), 0) \in Y, \quad y = (t,x,\mu) \in \Omega,$$

则 $\Phi \in C^r(\Omega, Y)$(由定理2.1.3). 取定 $y_0 = (t_0, x_0, \mu_0) \in \Omega$,设存在 $I_\delta \times W$ 内的 C^r 的 Y 值函数 $\sigma(t,y)$,此处 $I_\delta = (-\delta,\delta)$,$\delta > 0$,$W = I \times U \times V$,$I = t_0 + I_{\delta/2}$,$U \times V$ 是 (x_0,μ_0) 的开邻域,$\sigma(t,y)$ 满足

$$\dot{\sigma}(t,y) = \Phi(\sigma(t,y))(t \in I_\delta), \quad \sigma(0,y) = y \in W.$$

以 π 记 Y 到 X 的投影,令 $\theta(t,s,x,\mu) = \pi\,\sigma(t-s,s,x,\mu)$,则 $\theta \in C^r(I \times I \times U \times V, X)$ 且易验证 $x(t) = \theta(t,s,x,\mu)$ 满足方程(2.6.1),$x(s) = x$. 这就可将问题改述为:设 $f \in C^r(\Omega, X)$,$\Omega \subset X$,$x_0 \in \Omega$,要求 x_0 的开邻域 U 与 $\theta \in C^r(I_\delta \times U, \Omega)$,使

$$\dot{\theta}(t,x) = f(\theta(t,x))(t \in I_\delta), \quad \theta(0,x) = x \in U. \qquad (2.6.2)$$

若 $g(t)$ 满足 $\dot{g}(t) = f(g(t))(t \in I_\delta)$,$g(0) = x \in U$,则必 $g(t) = \theta(t,x)(t \in I_\delta)$.

(ii) 取 $r = 1$ 证明以上结论. 令 $J = [-1,1]$,在 $C(J,X)$ 与 $C^1(J,X)$ 中分别用范数 $\|\varphi\|_0$ 与 $\|\varphi\|_1 \triangleq \|\varphi\|_0 \vee \|\dot{\varphi}\|_0$(见式(2.2.13)). 令

$$C_0^1(J,X) = \{\varphi \in C^1(J,X): \varphi(0) = 0\},$$

则 $C(J,X)$ 与 $C_0^1(J,X)$ 均为 Banach 空间. 取定 $x_0 \in \Omega$,取 $\rho > 0$,使 $B_{2\rho}(x_0) \subset \Omega$,令 $B = B_\rho(x_0)$,$B_0 = B_\rho(0)$. 定义

$$\begin{cases} F: \mathbb{R} \times B \times C_0^1(J,B_0) \to C(J,X), \\ (s,x,\varphi) \to \dot{\varphi} - sf \circ (x + \varphi). \end{cases} \qquad (2.6.3)$$

F 对 s 与 x 显然为 C^1 映射;F 对 φ 亦为 C^1 映射(这要用到后面补证的引理2.6.1),因而 $F \in C^1$(由定理2.1.3). 因 $F(0,x_0,0) = 0$,

$$F_\varphi(0,x_0,0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}: C_0^1(J,X) \cong C(J,X),$$

故可用隐函数定理得出:存在含 0 的开区间 I,x_0 的开邻域 $U(\subset B)$ 及 C^1 函数

$$I \times U \to C_0^1(J,B_0),(s,x) \to \varphi_{sx},$$

使得

$$F(s,x,\varphi_{sx}) = \dot{\varphi}_{sx} - sf\circ(x+\varphi_{sx}) = 0, \quad s \in I, x \in U. \tag{2.6.4}$$

取 $\delta > 0$ 使 $\bar{I}_\delta \subset I$;令 $\varphi_x = \varphi_{\delta x}$,$\theta(t,x) = x + \varphi_x(t/\delta)$. 则 $\theta \in C^1(I_\delta \times U,\Omega)$(这要用到后面补证的引理 2.6.2),$\theta(0,x) = x + \varphi_x(0) = x$. 用式(2.6.4)推出

$$\dot{\theta}(t,x) = \delta^{-1}\dot{\varphi}_x(t/\delta) = f(x+\varphi_x(t/\delta)) = f(\theta(t,x)),$$

可见 $\theta(t,x)$ 满足式(2.6.2). 若 $g(t)$ 满足 $\dot{g}(t) = f(g(t))(t \in I_\delta)$,$g(0) = x \in U$,令 $\psi_x(t) = g(\delta t) - x$,则

$$F(\delta,x,\psi_x) = \delta\,\dot{g}(\delta t) - \delta f(g(\delta t)) = 0, \quad |t| < 1.$$

于是由隐函数的唯一性推出 $\varphi_x = \psi_x$,从而 $g(t) = \theta(t,x)(t \in I_\delta)$.

(iii) 设 $r > 1$,θ 依第(ii)步,今证 $\theta \in C^r$. 可设 $r < \infty$. 设 $\theta \in C^{r-1}$,则 $\partial_t\theta(t,x) = f(\theta(t,x)) \in C^{r-1}$(由式(2.6.2)与引理 2.3.2). 由

$$\partial_x\theta(t,x)\partial_x\left[x + \int_0^t f(\theta(s,x))\mathrm{d}s\right] = 1_X + \int_0^t f'(\theta(s,x))\partial_x\theta(s,x)\mathrm{d}s$$

知 $z \triangleq \partial_x\theta$ 满足含"参数" x 的方程

$$\dot{z}(t) = f'(\theta(t,x))z(t), \quad z(0) = 1_X. \tag{2.6.5}$$

因 $f' \in C^{r-1}$,$\theta \in C^{r-1}$,故用归纳假设得出方程(2.6.5)的解为 C^{r-1} 函数,因而 $\partial_x\theta(t,x) \in C^{r-1}$. 于是 $\theta \in C^r$ 得证. □

对于线性方程

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t) \tag{2.6.6}$$

及与之对应的齐次方程

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \tag{2.6.7}$$

可得到较好的结果.

定理 2.6.2　设 $A(t) \in C(I,L(X))$,$b(t) \in C(I,X)$,I 是含 t_0 的开区间,则以下结论成立:

(i) 存在 $\theta \in C^1(I\times X,X)$,$\forall x \in X$,$x(t) = \theta(t,x)$ 是方程(2.6.6)在 I 上满足 $x(t_0) = x$ 的唯一解;

(ii) 设 $\sigma(t,x)$ 是方程(2.6.7)在 I 上满足 $\sigma(t_0,x) = x$ 的解,$\sigma_t = \sigma(t,\cdot)$,则 $\{\sigma_t : t \in I\} \subset \mathrm{GL}(X)$,

$$\theta(t,x) = \sigma(t,x) + \sigma\left(t,\int_{t_0}^t \sigma_s^{-1}b(s)\mathrm{d}s\right). \tag{2.6.8}$$

证　(i)用传统的逐次逼近法. 可设 $t_0 = 0$,取含 0 的闭区间的升列 $\{J_k\}$,使得 $\cup J_k = I$. 令

$$M_k = \sup_{t\in J_k}[\,\|A(t)\| \vee \|b(t)\|\,], \quad L_x = \|x\| + 1.$$

定义 $\theta_0(t,x) = x$, 对任给 $n \geqslant 0,(t,x) \in I \times X$,令

$$\theta_{n+1}(t,x) = x + \int_0^t [A(s)\theta_n(s,x) + b(s)]\mathrm{d}s. \tag{2.6.9}$$

容易归纳地验证

$$\| \theta_n(t,x) - \theta_{n-1}(t,x) \| \leqslant L_x M_k^n |t|^n/n!, \quad t \in J_k, x \in X.$$

这推出 $\{\theta_n(t,x)\}$ 在 $I \times X$ 上局部一致收敛于某个连续函数 $\theta(t,x)$. 由式(2.6.9)有

$$\theta(t,x) = x + \int_0^t [A(s)\theta(s,x) + b(s)]\mathrm{d}s, \quad t \in I, x \in X.$$

这表明 $\theta(t,x)$ 是方程(2.6.6) 在 I 上满足 $\theta(0,x) = x$ 的解. 利用式(2.6.9) 可归纳地得出 $\partial\theta_n/\partial x$ 存在、连续且满足

$$\partial_x\theta_{n+1}(t,x) = 1_X + \int_0^t A(s)\partial_x\theta_n(s,x)\mathrm{d}s, \quad n \geqslant 0,$$

$$\| \partial_x\theta_n(t,x) - \partial_x\theta_{n-1}(t,x) \| \leqslant M_k^n |t|^n/n!, \quad t \in J_k, n \geqslant 1.$$

这得出 $\{\partial_x\theta_n(t,x)\}$ 在 $I \times X$ 上局部一致收敛于 $\partial_x\theta(t,x)$,可见 $\partial_x\theta(t,x)$ 连续. 其次显然 $\dot{\theta}(t,x)$ 连续,因此 $\theta \in C^1(I \times X, X)$.

若 $g(t)$ 满足方程(2.6.6) 且 $x(0) = x$,则 $\varphi(t) \triangleq \| g(t) - \theta(t,x) \|$ 满足

$$\varphi(t) \leqslant M_k \int_0^t \varphi(s)\mathrm{d}s, \quad 0 \leqslant t \in J_k, k \geqslant 1.$$

于是由 Gronwall 不等式推出 $\varphi(t) = 0(0 \leqslant t \in I)$. 同理, 有 $\varphi(t) = 0(0 \geqslant t \in I)$, 因此 $g(t) = \theta(t,x)(t \in I)$.

(ii) 由已证的结论(i)知 $\sigma \in C^1(I \times X, X)$. 任给 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in X$, $x(t) \triangleq \alpha\,\sigma(t,x) + \beta\,\sigma(t,y)$ 必满足方程(2.6.7) 且 $x(0) = \alpha x + \beta y$. 于是由唯一性得

$$\alpha\,\sigma(t,x) + \beta\,\sigma(t,y) = \sigma(t, \alpha x + \beta y),$$

这正表明 $\sigma_t = \sigma(t,\cdot) \in L(X)$. 由解的唯一性得出:方程(2.6.7) 的解必不取零值,除非它恒为零. 因此σ_t是单射. 固定$t_1 \in I$. $\forall y \in X$, 方程(2.6.7)必有解 $x(t)$, 使得 $x(t_1) = y$. 令 $x = x(0)$,则 $y = \sigma(t_1, x) = \sigma_{t_1}(x)$,可见 σ_{t_1} 是满射. 因此$\{\sigma_t : t \in I\} \subset \mathrm{GL}(X)$. 将式(2.6.8)右端改写为

$$\sigma(t,x) + \sigma_t \int_0^t \sigma_s^{-1} b(s)\mathrm{d}s \triangleq \beta(t,x).$$

由直接计算易验证 $\beta(0,x) = x$,$\dot{\beta}(t,x) = A(t)\beta(t,x) + b(t)$,因此必 $\beta(t,x) = \theta(t,x)$,式(2.6.8) 得证. □

定理2.6.2 中的“二元函数” $\sigma(t,x)$ 完全刻画了方程(2.6.7)的全体解的动态. 任意固定 $x \in X$,$\sigma_x(t) \triangleq \sigma(t,x)$ 是方程(2.6.7)“过点 x ”的解;任意固定 $t \in I$,$\sigma_t(x) \triangleq \sigma(t,x)$ 是空间X到自身的变换. 这种观点可推广而用于非线性方程,且发展成具有丰富成果的微分动力系统理论.

为进一步阐明上面提到的思想,考虑如下自治方程:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x \in \Omega \subset X, \tag{2.6.10}$$

其中,$f \in C^r(\Omega, X)(1 \leqslant r \leqslant \infty)$. 由定理2.6.1,任给$x_0 \in \Omega$,存在$\delta > 0$, x_0 的开邻域 $U(\subset \Omega)$ 及函数 $\theta \in C^r(I_\delta \times U, \Omega)$,使得对任给 $x \in U, x(t) = \theta(t,x)$ 是初值问题(2.6.10) 在 I_δ 上的唯一解. 然而这只是一个局部结果,下面要将这样的局部结果"拼接"成一个整体结果.

定理2.6.3　设$\Omega \subset X, f \in C^r(\Omega, X)(1 \leqslant r \leqslant \infty)$,则存在开集$W \subset \mathbb{R} \times \Omega$与$\theta \in C^r(W, \Omega)$,使得以下结论成立:

(i) $W = \bigcup_{x \in \Omega} I_x \times \{x\}, I_x = (\alpha_x, \beta_x), -\infty \leqslant \alpha_x < 0 < \beta_x \leqslant \infty$;

(ii) $\forall x \in \Omega, x(t) = \theta(t,x)(t \in I_x)$ 是初值问题(2.6.10) 的解;

(iii) 若 $g(t)$ 满足 $\dot{g}(t) = f(g(t))(t \in I), 0 \in I, g(0) = x \in \Omega$,则 $I \subset I_x$ 且 $g(t) = \theta(t,x)(t \in I)$;

(iv) 任给 $(t,x) \in W$ 成立,

$$I_x = t + I_{\theta(t,x)}, \tag{2.6.11}$$

$$\theta(s+t,x) = \theta(s, \theta(t,x)), \quad s+t, t \in I_x. \tag{2.6.12}$$

证　任给 $x \in \Omega$, 由定理2.6.1,必存在某个含0的开区间 I_x,使初值问题(2.6.10) 在 I_x 上有唯一解 $x(t)$,将它写作 $\theta(t,x)$. 因可运用通常的延拓手续,不妨设 $I_x = (\alpha_x, \beta_x)$ 已达最大. 令 $W = \bigcup_{x \in \Omega} I_x \times \{x\}$,则$\theta(t,x)$ 在 W 上已有定义且直接看出结论(i) ~ (iii)成立. 取定 $(t,x) \in W$. 令 $g(s) = \theta(s+t,x)(s+t \in I_x)$,则

$$\dot{g}(s) = f(g(s)), \quad g(0) = \theta(t,x).$$

于是由结论(iii)得出 $g(s) = \theta(s, \theta(t,x))$,这表明式(2.6.12) 成立且 $I_x - t \subset I_{\theta(t,x)}$,即 $I_x \subset t + I_{\theta(t,x)}$. 另一方面,有

$$I_{\theta(t,x)} \subset -t + I_{\theta(-t,\theta(t,x))} = -t + I_x,$$

这得出式(2.6.11).

余下只要证 W 是开集且 $\theta \in C^r(W, \Omega)$. 令

$$W_0 = \{(t,x) \in W: \text{存在}(t,x) \text{ 的邻域 } V \text{ 使 } \theta | V \in C^r\},$$

只要证 $W_0 = W$. 用反证法. 设存在$(t_0, x_0) \in W \backslash W_0$,不妨设

$$t_0 = \inf\{t > 0: (t, x_0) \notin W_0\}.$$

因显然有 $\{0\} \times \Omega \subset W_0$,故必 $t_0 > 0$. 令 $x_1 = \theta(t_0, x_0)$,取$\delta > 0$与x_1 的邻域 V,使 $I_\delta \times V \subset W_0$. 取 $t_1 \in (t_0 - \delta/2, t_0)$,使 $x_2 = \theta(t_1, x_0) \in V$. 因$(t_1, x_0) \in W_0$,故有 x_0 的邻域 V_0,使$\{t_1\} \times V_0 \subset W_0$ 且 $\theta(t_1 \times V_0) \subset V$. $\forall t \in I_{\delta/2}, x \in V_0$,有 $\theta(t_0 + t, x) = \theta(t_0 + t - t_1, \theta(t_1, x)), (t_0 + t - t_1, \theta(t_1, x)) \in I_\delta \times V \subset W_0$,这推出

$$(t_0, x_0) \in (t_0 + I_{\delta/2}) \times V_0 \subset W_0,$$

这与 $(t_0, x_0) \notin W_0$ 矛盾. 因此必 $W_0 = W$. □

定理2.6.3 中的 θ 称为由微分系统(2.6.10)或向量场$f(x)$ 生成的**流**. θ 的最

有趣的性质是等式(2.6.12). 若令 $\theta_t = \theta(t,\cdot)$,则式(2.6.12) 相当于

$$\theta_{s+t} = \theta_s\theta_t, \tag{2.6.13}$$

其中,$\theta_t: V_t \to V_{-t}$ 是一个 C^r 微分同胚,$V_t = \{x: (t,x) \in W\}$ 是 Ω 的开子集. 若 $W = \mathbb{R} \times \Omega$,则 $\forall t \in \mathbb{R}, V_t = \Omega$,因而 $\theta_t: \Omega \to \Omega$ 是 C^r 微分同胚,此时式(2.6.13) 表明 $t \to \theta_t$ 是一个群同态,称这样的 θ 为对 Ω 的一个单参数群作用. 另一方面,$\forall x \in \Omega$, $\theta_x(t) \triangleq \theta(t,x)$ 是初值问题(2.6.10) 的最大解,称为 θ 过 x 的轨道. 以上术语在现代微分动力系统理论中是标准而通行的.

今用一个例子来解释本节结果的应用.

例 2.6.1(梯度场) 设 X 是一个实 Hilbert 空间,$\Omega \subset X, f \in C^\infty(\Omega,\mathbb{R})$. 考虑 Ω 内的自治方程

$$\dot{x}(t) = \nabla f(x(t)). \tag{2.6.14}$$

由定理 2.6.3,存在开集 $W \subset \mathbb{R} \times \Omega$ 与 $\theta \in C^\infty(W,\Omega)$,$\theta$ 是方程(2.6.14) 或梯度场 $\nabla f(x)(x \in \Omega)$ 生成的流. 下面指出流 θ 的若干特殊性质.

(i) 取定 $x \in \Omega, \forall t \in I_x$(依定理 2.6.3 的记号,下同),有

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)f(\theta(t,x)) &= \langle \nabla f(\theta(t,x)), \dot{\theta}(t,x)\rangle \\ &= \|\nabla f(\theta(t,x))\|^2 \geqslant 0,\end{aligned}$$

可见 $f(\theta(t,x))$ 对 t 单调增. 实际上,只要 $\nabla f(x) \neq 0$(即 x 不是梯度场 ∇f 的奇点),则 $\theta(t,x)$ 绝不经过 ∇f 的任何奇点,因而 $\nabla f(\theta(t,x)) \neq 0$. 这就推出 $f(\theta(t,x))$ 对 t 严格单调增,除非 $\theta(t,x) \equiv x$.

(ii) 取定 $x \in \Omega$,设 $0 < t < \tau < \beta_x < \infty$,则

$$\|\theta(t,x) - \theta(\tau,x)\| = \left\|\int_t^\tau \dot{\theta}(s,x)\mathrm{d}s\right\| \leqslant \int_t^\tau \|\nabla f(\theta(s,x))\|\mathrm{d}s.$$

由此可见,若 $\nabla f(\theta(t,x))$ 在区间 $[0,\beta_x]$ 内有界,则必存在

$$\lim_{t\to\beta_x^-}\theta(t,x) = x^* \in \partial\Omega.$$

因此,对给定的 $x \in \Omega$,只可能出现以下 3 种情况:$\beta_x = \infty$,$\nabla f(\theta(t,x))$ 在某个有限区间 $[0,\beta]$ 上无界,$\theta(t,x)$ 在有限正时间内到达边界 $\partial\Omega$. 若已知 $\nabla f(\theta(t,x))$ 有界且 $\theta(t,x)$ 不接近边界 $\partial\Omega$,则必定 $\beta_x = \infty$. 对 α_x 可作类似讨论. 若 $\nabla f(x)$ 在 Ω 上有界且 θ 的任何轨道均不接近边界 $\partial\Omega$,则 $W = \mathbb{R} \times \Omega$.

(iii) 设 $a \in \mathbb{R}, x \in \Omega, f(x) < a, \beta_x = \infty$. $\forall t > 0$,有

$$\begin{aligned}f(\theta(t,x)) - f(x) &= \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}f(\theta(s,x))\mathrm{d}s = \int_0^t \|\nabla f(\theta(s,x))\|^2\mathrm{d}s \\ &\geqslant \inf_{0\leqslant s\leqslant t} t\|\nabla f(\theta(s,x))\|^2.\end{aligned}$$

这就推出:若以下条件满足:

$$\inf\{\|\nabla f(y)\| : f(y) \leqslant a\} > 0, \tag{2.6.15}$$

则当 t 充分大时 $f(\theta(t,x))>a$，因而必存在唯一 $t_x\in(0,\infty)$，使得 $f(\theta(t_x,x))=a$. 令 $f_a=\{f=a\}$，上述的 t_x 称为轨道 $\theta(t,x)$ 到达"等位面" f_a 的时间.

(iv) 设条件(2.6.15)满足，$x\in\Omega,f(x)<a,t_x$ 依上段，则 t_x 必连续地依赖于初值 x. 事实上，令 $F(t,x)=f(\theta(t,x))-a$，则 $F\in C^\infty,F(t_x,x)=0$，

$$\partial_t F(t_x,x)=\|\nabla f(\theta(t_x,x))\|^2>0.$$

于是由隐函数定理推出 $x\to t_x$ 是 C^∞ 函数.

特别地，取 $f(x)=\|x\|(x\in\Omega=X\setminus\{0\})$，则 $\nabla f(x)=\|x\|^{-1}x$（由式(2.1.4)），$\|\nabla f(x)\|=1(x\in\Omega)$. 直接观察得出

$$\theta(t,x)=(1+t\|x\|^{-1})x,\quad x\in\Omega,-\|x\|<t<\infty.$$

$\forall x\in\Omega$，当 $t\to-\|x\|$ 时 $\theta(t,x)\to 0\in\partial\Omega$. 若 $0<\|x\|<a$，则 $\|\theta(t,x)\|=t+\|x\|=a\Leftrightarrow t=a-\|x\|\triangleq t_x$，$t_x$ 即轨道 $\theta(t,x)$ 到达球面 $\|x\|=a$ 的时间，t_x 显然是 x 的 C^∞ 函数.

若以函数 $y(x)$ 取代 $x(t)$，则方程(2.6.1)推广为更一般的方程

$$y'(x)=F(x,y(x)),\tag{2.6.16}$$

其中，$F:\Omega\subset X\times Y\to L(X,Y)$. 若对任给 $(x_0,y_0)\in\Omega$，在 x_0 的某个邻域内方程(2.6.16)有唯一解 $y(x)$ 使得 $y(x_0)=y_0$，则说方程(2.6.16)是完全可积的. 主要基于定理2.6.1的以下结果，可看作经典 **Frobenius 定理**的抽象形式.

定理 2.6.4　设 X 与 Y 是实 Banach 空间，$F:\Omega\subset X\times Y\to L(X,Y)$ 为 $C^r(r\geqslant 1)$ 映射，则方程(2.6.16)完全可积的充要条件是：对任给 $(x,y)\in\Omega$，成立

$$\begin{aligned}&F_x(x,y)hk+(F_y(x,y)(F(x,y)h))k\\&=F_x(x,y)kh+(F_y(x,y)(F(x,y)k))h,\quad h,k\in X.\end{aligned}\tag{2.6.17}$$

证　任给方程(2.6.16)的解 $y(x)$，利用式(2.6.16)算出 $y''(x)hk$ 并注意 $y''(x)hk=y''(x)kh$（由命题2.1.2），可验知条件(2.6.17)的必要性.

设条件(2.6.17)满足. 取定 $(x_0,y_0)\in\Omega$，考虑带"参数" $h\in X$ 的方程

$$\dot u(t)=F(x_0+th,u(t))h.\tag{2.6.18}$$

由定理2.6.1，方程(2.6.18)局部地有唯一 C^r 解 $u(t,h)$，$(t,h)\in I\times V$，I 是某个含0的开区间，V 是 X 的某个0邻域，$u(0,h)=y_0$. 取 $\delta>0$ 使 $\bar I_\delta\subset I$，令 $y(x)=u(\delta,\delta^{-1}(x-x_0))$，则 $y(\cdot)\in C^r(U,Y)$，$U=x_0+\delta V$ 是 x_0 的邻域，$y(x_0)=u(\delta,0)=u(0,0)=y_0$. 任给 $h\in V,k\in X$，令

$$\varphi(t,h,k)=u_h(t,h)k-tF(x_0+th,u(t,h))k,\tag{2.6.19}$$

则 $\varphi(0,h,k)=0,\varphi(\delta,\delta^{-1}(x-x_0),k)=\delta y'(x)k-\delta F(x,y(x))k$. 为证 $y'(x)=F(x,y(x))(x\in U)$，只要证 $\varphi(t,h,k)\equiv 0$. 为此又只要指出 $\varphi(t,h,k)$ 满足某个齐次线性微分方程. 约定 $\varphi=\varphi(t,h,k)$，$F=F(x_0+th,u(t,h))$，F_x,F_y 类似，则

$$\begin{aligned}\dot{u}_h(t,h)k &= \partial_h(F(x_0+th,u(t,h))h)k\\ &= tF_xkh+F_yu_h(t,h)kh+Fk\\ &= t[F_xkh+F_y(Fk)h]+(F_y\varphi)h+Fk,\\ &= t[F_xhk+F_y(Fh)k]+(F_y\varphi)h+Fk,\end{aligned}$$

其中用了式(2.6.19)与式(2.6.17).结合式(2.6.19)与上式得

$$\dot{\varphi}=\dot{u}_h(t,h)k-Fk-tF_xhk-tF_y(Fh)k=(F_y\varphi)h,$$

这正表明 φ 满足一个齐次线性微分方程.因此条件(2.6.17)是充分的. □

若取 $X=\mathbb{R}^n, Y=\mathbb{R}$,则方程(2.6.16)与式(2.6.17)分别为

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}=F_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,y),\quad 1\leqslant i\leqslant n,$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}+F_j\frac{\partial F_i}{\partial y}=\frac{\partial F_j}{\partial x_i}+F_i\frac{\partial F_j}{\partial y},\quad 1\leqslant i,j\leqslant n.$$

现在补证定理2.6.1证明中提到的引理.

引理2.6.1 设 $J\subset\mathbb{R}$ 是一紧区间,$\Omega\subset X$, $f\in C^1(\Omega,X)$, $0\in J$, $C_0^1(J,X)$ 依定理2.6.1之证,则

$$F:\ C_0^1(J,\Omega)\subset C_0^1(J,X)\to C(J,X),\quad \varphi\to f\circ\varphi$$

是 C^1 映射.

证 任给 $\varphi\in C_0^1(J,\Omega)$,有 $f\circ\varphi\in C(J,X)$,故 $F(\varphi)$ 有定义.只要证 $F'(\varphi)$ 存在且连续.设 $\varphi,\varphi+h\in C_0^1(J,\Omega)$,今证

$$(F'(\varphi)h)(t)=f'(\varphi(t))h(t),\quad t\in J. \tag{2.6.20}$$

$h(t)\to f'(\varphi(t))h(t)$ 显然是线性的,

$$\sup_{t\in J}\|f'(\varphi(t))h(t)\|\leqslant\sup_{t\in J}\|f'(\varphi(t))\|\ \|h(t)\|\leqslant\text{const}\,\|h\|_1,$$

其中,用到 $\|f'(\varphi(t))\|$ 对 t 连续,$\|h\|_1=\|h\|_0\vee\|\dot{h}\|_0$.可见 $h(t)\to f'(\varphi(t))h(t)$ 是从 $C_0^1(J,X)$ 到 $C(J,X)$ 的有界线性算子.其次,

$$\begin{aligned}&\|F(\varphi+h)-F(\varphi)-(f'\circ\varphi)h\|_0\\ &=\sup_{t\in J}\|f(\varphi(t)+h(t))-f(\varphi(t))-f'(\varphi(t))h(t)\|\\ &\leqslant\sup_{t\in J}\|f'(\varphi(t)+\theta_th(t))-f'(\varphi(t))\|\ \|h(t)\|=o(\|h\|_1),\end{aligned}$$

其中用了中值定理与 f' 的连续性,$\theta_t\in[0,1]$.这就证得式(2.6.20).

其次证 $F'(\varphi)$ 在 $C_0^1(J,\Omega)$ 内连续.设 $\varphi,\varphi_n\in C_0^1(J,\Omega)$, $\|\varphi_n-\varphi\|_1\to0$,则

$$\begin{aligned}\|F'(\varphi_n)-F'(\varphi)\|&=\sup_{\|h\|_1\leqslant1}\|F'(\varphi_n)h-F'(\varphi)h\|_0\\ &\leqslant\sup_{\|h\|_0\leqslant1}\sup_{t\in J}\|f'(\varphi_n(t))h(t)-f'(\varphi(t))h(t)\|\\ &\leqslant\sup_{t\in J}\|f'(\varphi_n(t))-f'(\varphi(t))\|\to0(n\to\infty),\end{aligned}$$

最后一步用到 f' 连续与 $\varphi_n(t)\rightrightarrows\varphi(t)(t\in J,n\to\infty)$. □

引理2.6.2　设 $U \subset X$ 是一开集, $\varphi \in C^1(U, C_0^1(J,X))$ (依定理2.6.1证明中的记号), $\theta(t,x) = \varphi_x(t)$, $\varphi_x = \varphi(x)$, 则 $\theta \in C^1((-1,1) \times U, X)$.

证　不难看出 $\partial_t\theta = \dot{\varphi}_x$, $\partial_x\theta(t,x)h = (\varphi'(x)h)(t)$ $(t \in (-1,1), x \in U, h \in X)$. 只要证 $\partial_t\theta$ 与 $\partial_x\theta$ 对 (t,x) 连续. 取定 $t \in (-1,1)$, $x \in U$, 设 $t_n \to t$, $x_n \to x$, 则

$$
\begin{aligned}
&\| \partial_t\theta(t_n,x_n) - \partial_t\theta(t,x) \| \\
= &\| \dot{\varphi}_{x_n}(t_n) - \dot{\varphi}_x(t) \| \\
\leqslant &\| \varphi_{x_n} - \varphi_x \|_1 + \| \dot{\varphi}_x(t_n) - \dot{\varphi}_x(t) \| \to 0 (n \to \infty), \\
&\| \partial_x\theta(t_n,x_n) - \partial_x\theta(t,x) \| \\
= &\sup_{\|h\|=1} \| (\varphi'(x_n)h)(t_n) - (\varphi'(x)h)(t) \| \\
\leqslant &\sup_{\|h\|=1} [\| (\varphi'(x_n)h)(t_n) - (\varphi'(x)h)(t_n) \| \\
&+ \| (\varphi'(x)h)(t_n) - (\varphi'(x)h)(t) \|] \\
\leqslant &\sup_{\|h\|=1} [\| \varphi'(x_n)h - \varphi'(x)h \|_1 + \sup_{\|s\|\leqslant 1} \| (\varphi'(x)h)'(s) \| \, | t_n - t |] \\
\leqslant &\sup_{\|h\|=1} [\| \varphi'(x_n) - \varphi'(x) \| \, \| h \| + \| \varphi'(x)h \|_1 \, | t_n - t |] \\
\leqslant &\| \varphi'(x_n) - \varphi'(x) \| + \| \varphi'(x) \| \, | t_n - t | \to 0, \quad n \to \infty,
\end{aligned}
$$

可见 $\partial_t\theta$ 与 $\partial_x\theta$ 均连续, 如所要证. □

第3章 测度与积分

与微分学比较，积分学有更久远的历史. 作为积分概念原型的几何求积问题，不仅植根于人类文化的早期历史，而且是人们常识的一部分. 在 Newton-Leibniz 之后，积分学已经历了多次重大改造，Lebesgue 积分的出现尤其被看成里程碑性的事件. 在某些方面，近代积分学与它所脱胎而出的早期原型的差别已如此之大，以致人们难以再将它们等量齐观. 然而，这些发展只是改变了积分的构成方式与拓展了其应用范围，却并未改变积分的本质特征与基本功能：积分不过是一种求和与加总的工具而已，它作为一种整体性的分析工具，与处理局部问题的微分恰相对应. 积分学的近代发展在很大的程度上是不断将各种复杂对象的综合与汇总问题纳入到它的范围之内，而其构成方法则因测度论的出现而得到根本改造. 而且，在近代积分学的理论框架下，积分与级数、积分与测度等之间的界线日益消失，乃至融为一体.

为了将高度发展而异常丰富的近代积分学理出一个头绪，本章依积分对象的逐步改变为顺序，依次考虑数值函数的积分、向量值函数的积分及函数对的 Stieltjes 积分，而构成积分所依赖的测度则由正测度进至向量值测度、正则测度、Lebesgue 测度及 Lebesgue-Stieltjes 测度. 这两条线索平行展开而又互相交叉，不能不呈现出颇为纷繁的面貌.

本章总以 Ω 记某个完备测度空间，以 E 记某个($\mathbb{K}$ 上的) Banach 空间. 对于 E 值函数 $f(x)$，约定以 $|f|$ 记其“绝对值函数” $\|f(x)\|$.

3.1 正测度与积分

Lebesgue 通过创立他的测度理论而奠立一种新的积分，由此开启了积分学的一系列重大改造[①]. 直接从长度、面积等几何求积概念发展出来的正测度，首先成为定义积分的工具. 实或复函数关于正测度的积分理论今天已如此成熟，已成为大学实分析课程的标准内容，也成为许多相关领域的标准语言，它的基本内容实际上是比较简单的，我们用一节的篇幅加以概括，以作为本章的一个开头. 但应强调，本

---

① Lebesgue 关于他的积分论的经典论文的发表(1902 年)，被公认为是现代测度与积分论诞生的标志. 其后数十年，Lebesgue 本人及许多杰出数学家致力于发展与扩充 Lebesgue 理论. Radon 与 Fréchet 在 1910 ~ 1920 年的工作对于抽象测度与积分论的形成起了决定性作用. 至 20 世纪 50 年代，现代形式下的测度与积分论已大体成形.

节的基本思想实际上也支配了积分学的进一步发展,因而这些思想后面将在不同的形式下反复运用,这就必要从一开始就给予足够注意并理出清晰头绪.

首先概述测度与可测函数的概念与相关用语.

定义 3.1.1　给定非空集 Ω 与集族 $\mathscr{A} \subset 2^{\Omega}$. 若 $\mathscr{A}$ 满足条件

(M_1) $\mathscr{A}$ 对可数并运算与补运算封闭,$\Omega \in \mathscr{A}$,

则称 $\mathscr{A}$ 是 Ω 上的一个 **σ 代数**,而称 $(\Omega,\mathscr{A})$ 为一个**可测空间**,称每个 $A \in \mathscr{A}$ 为 $\mathscr{A}$ 可测集或简称可测集. 若 $\{A_i\} \subset \mathscr{A}$ 是互不相交集的可数族,则称 $A = \cup A_i$ 或 $\{A_i\}$ 为 A 的一个分解[①]. 若一函数 μ: $\mathscr{A} \to [0,\infty] (= \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\})$ 满足条件

(M_2) $\mu\varnothing = 0$,当 $A = \cup A_i$ 是一分解时 $\mu A = \sum \mu A_i$,

则称 μ 为 $(\Omega,\mathscr{A})$ 上的一个**正测度**,简称为测度,称 $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ 或 Ω 为一个**测度空间**. 若 $A \in \mathscr{A}$ 可表为 $A = \cup A_n$,$\mu A_n < \infty$ ($\forall n \in \mathbb{N}$),则说 A 关于 μ 有 **σ 有限测度**;当 Ω 有 σ 有限测度时称 μ 为 σ 有限测度;当 $\mu\Omega < \infty$ 时称 μ 为有限测度;当 $\mu\Omega = 1$ 时称 μ 为概率测度. 若测度 μ 满足条件

(M_3) $\mu A = 0 \Rightarrow 2^A \subset \mathscr{A}$,

则称 μ 为完备测度,而称 $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ 或 Ω 为完备测度空间.

说到测度时,可能只联想到 Lebesgue 测度,至多加上几个似乎无足轻重的例外. 这是来自某些实分析教科书的一种错觉. 不过,暂时还缺乏足够多的例子来消除这一错觉. 但以下例子也能说明一些问题.

例 3.1.1　(i) **计数测度**. 设 Ω 是任一非空集,$\mathscr{A} = 2^{\Omega}$. 任给 $A \in \mathscr{A}$,定义 μA 为 A 所含元素之个数,当 A 为无限集时令 $\mu A = \infty$. 则显然条件(M_1) ~ (M_3)满足,因而 μ 是一个完备测度,称它为 Ω 上的计数测度. 计数测度似乎平凡得不足道,但它是最重要的测度之一.

(ii) **Dirac 测度**. 仍设 $\Omega,\mathscr{A}$ 如(i),取定 $a \in \Omega$,任给 $A \in \mathscr{A}$,定义 $\delta_a(A) = \xi_A(a)$,ξ_A 记 A 的特征函数. 则 δ_a 是一个完备概率测度,称为点 a 处的 Dirac 测度. Dirac 测度已简单得不消作任何解释,但在近代分析中的重要性却不能低估. 后面将不断提到它. 直观上,可想象 δ_a 是集中于点 a 的一个单位质量.

(iii) **Lebesgue 测度**. 在 $\mathbb{R}^n$ 上存在唯一完备测度 m,它使任何开集可测,且使任何 n 维方体的测度即其 n 维体积. 称 m 为 n 维 Lebesgue 测度或就称为 Lebesgue 测度. 在 3.6 节中将稍详细地谈到它.

(iv) **概率空间**. 若 P 是 $(\Omega,\mathscr{A})$ 上的一个概率测度,则称 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 为一个概率空间. 概率空间的研究必然要联系到它的直观背景,且受到随机现象内在规则性的启示. 但从逻辑上看,除了 $P(\Omega) = 1$ 这一特殊要求外,概率测度并不具有不同

① 此术语虽不完全通行,但也见于某些文献,如(Rudin, 1987). 鉴于它确能明显地简化许多定义与命题的表述,本书将适当地采用它,但主要限于本章.

于其他测度的特殊性质. 也不要以为“$P(A)$ 表示 A 的概率”是一个特殊性质,它只不过是一种解释(尽管是一种重要的解释)而已,在逻辑上并无任何独立于测度论公理之外的意义.

(v) **导出测度**. 设 $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ 是任一测度空间,$\emptyset \neq M \in \mathscr{A}$. 令

$$\mathscr{A}_M = \{A : A \subset M \text{ 且 } A \in \mathscr{A}\}, \quad \mu_M(A) = \mu(A), \quad A \in \mathscr{A}_M,$$

则易验证 $(M,\mathscr{A}_M,\mu_M)$ 是一测度空间,称 μ_M 为 μ 在 M 上的导出测度,或说 μ_M 是 μ 在 M 上的限制,也记作 $\mu \mid M$. 当不必严加区分时可将 μ_M 就写作 μ.

任给非空集 Ω 及非空的 $\mathscr{A} \subset 2^{\Omega}$,必存在包含 $\mathscr{A}$ 的最小 σ 代数 $\mathscr{B}$,它就是 Ω 上所有包含 $\mathscr{A}$ 的 σ 代数的交,称为由 $\mathscr{A}$ 生成的 σ 代数. 若 (Ω,τ) 是一个拓扑空间,$\mathscr{B}$ 是由 τ 生成的 σ 代数,则称 $\mathscr{B}$ 为 Ω 中的 Borel 集族,其中的集称为 **Borel 集**. $\mathscr{B}$ 包含了 Ω 中的所有开集、闭集、G_δ 集与 F_σ 集等. 若 Ω 上的测度 μ 在 Borel 集族 $\mathscr{B}$ 上有定义且使紧集有有限测度,则称 μ 为 **Borel 测度**. Lebesgue 测度就是一个 Borel 测度. 当涉及拓扑空间上的测度且希望与拓扑结构有一定关联时,总是考虑 Borel 测度. 对于 Borel 测度的深入讨论将在 3.4 节中进行.

再回到一般的测度空间 $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$. 下面的命题汇集了由条件(M_1)与(M_2)推出的一些简单结论,其证明是平凡的.

命题 3.1.1 设 $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ 是一测度空间,则以下结论成立:

(i) $\mathscr{A}$ 对可数并、可数交与差运算封闭;

(ii) 单调性:若 $A,B \in \mathscr{A}, A \subset B$,则 $\mu A \leqslant \mu B$ 且当 $\mu A < \infty$ 时有

$$\mu(B \backslash A) = \mu B - \mu A;$$

(iii) 次可加性:任给可数族 $\{A_i\} \subset \mathscr{A}$,有 $\mu(\cup A_i) \leqslant \sum \mu A_i$;

(iv) 下连续性:若 $\{A_n\} \subset \mathscr{A}$ 为升列,则 $\mu A_n \to \mu(\cup A_n)$;

(v) 上连续性:若 $\{A_n\} \subset \mathscr{A}$ 为降列, $\mu A_1 < \infty$,则 $\mu A_n \to \mu(\cap A_n)$.

定义 3.1.1 并未赋予测度 μA 任何具体含义,更不必说给予它“面积”一类的直观意义. 在逻辑上,除了满足定义 3.1.1 中那些条件之外, μA 什么也不是,唯有如此,才留下了作最广泛应用的可能性,不致为任何特殊的解释所束缚. 这正是抽象测度的优点. 另一方面,缺乏一种具体解释的支撑,亦成为认知上的障碍. 为克服这一缺点,不妨持一种宽泛的理解,即总将 μA 看成对 A 的某种量度,关于 A 的“容量”“大小”的某种量化指标.

上述观点对于以下特殊情况最能凸显其意义:设 $A \in \mathscr{A}$,那么正是 μA 与 μA^c 的比较定量地界定了 A 与 A^c 的差别. 若 $\mu A > 0$ 而 $\mu A^c = 0$,则不妨认为 A^c 可忽略不计,而 A 则几乎占据了整个 Ω. 这一理解导致一套流行的术语:当 $\mu A = 0$ 时称 A 为**零集**或 μ 零集;若 $A = \{x \in \Omega : x \text{ 满足 } P\}$, P 是某个命题或条件,则当 $\mu A^c = 0$

时说P在Ω上几乎处处成立[①],写作P,a. e. 或P,μ -a. e.. 例如,若$\mu\{f\neq 0\}=0$,则说f在Ω上几乎处处等于零,写作$f=0$,a. e. 或$f=0$,μ -a. e.. 关于"几乎处处"的这一套用语与记号不仅简化了相关命题的表述,而且为系统地使用强有力的测度论方法开辟了道路.

完备性并非处处需要,但使用完备测度能免去一些不必要的麻烦,在涉及"a. e. 条件"时尤其如此. 而且,假定完备性无损于一般性,因为任何测度均可经某种轻微修改而实现完备化,这就是如下的完备化定理:

定理 3.1.1 任给测度空间 $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$,μ 可唯一地扩张为某个 σ 代数 $\overline{\mathscr{A}}\subset 2^{\Omega}$ 上的完备测度$\bar{\mu}$, 使得对任给$A\in\overline{\mathscr{A}}$,存在$M,N\in\mathscr{A}$,使得$M\subset A\subset N$且$\mu(N\backslash M)=0$. 如上的$\bar{\mu}$ 称为μ 的**完备化**.

鉴于此,今后用到的测度空间总假定是完备的而不处处说明.

为使测度论方法可用于研究函数,首先要求所考虑的函数在通常的情况下总产生可测集. 这似乎是一含糊的要求,但事实证明,下面定义的可测函数能很好地满足这一要求.

定义 3.1.2 设 $(\Omega,\mathscr{A})$ 是一个可测空间. 若f是Ω上的广义实函数("广义"意味着容许取值 $\pm\infty$),$\forall\alpha\in\mathbb{R}$,有$\{f<\alpha\}\in\mathscr{A}$,则称$f$为$\Omega$上的实可测函数[②]. 若 u,v 是Ω上的有限的实可测函数,则称$f=u+\mathrm{i}\,v$为Ω上的复可测函数. 若Ω是拓扑空间,而$\mathscr{B}$是Ω中的 Borel 集族,则称 $(\Omega,\mathscr{B})$ 上的可测函数为 **Borel 可测函数** . 若$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 而 $\mathscr{A}$ 是 Lebesgue 可测集族,则称 $(\Omega,\mathscr{A})$ 上的可测函数为 Lebesgue 可测函数.

在本节中,实与复可测函数合称为可测函数.

对于Ω上的一函数f,判定其是否可测原则上当然是重要的,但实际上很少成为问题. 这是因为,少数性质良好的函数很容易直接判定其可测性,而以这些已知的可测函数为基础通过适当运算而得的可测函数,已能满足所有需要. 此处所称的"适当运算" 至少包括以下 3 类:代数运算、极限运算与格运算. 所谓**格运算**就是取上确界与下确界的运算,在两个函数的情形定义如下:

$$\begin{cases}(f\vee g)(x)=\max\{f(x),g(x)\},\\(f\wedge g)(x)=\min\{f(x),g(x)\}.\end{cases}\tag{3.1.1}$$

显然有$f\wedge g=-[(-f)\vee(-g)]$. 其次可验证

$$f\vee g=2^{-1}(|f-g|+f+g),$$

---

① 更妥当的说法是:若 A^c 含于某个零集,则说 P 几乎处处成立. 当μ 是完备测度时,这两种说法不再有区别. 因通常假定所用的测度空间是完备的,故不必考虑这种修正.

② 本书中涉及实可测函数或实可积函数时总指广义实函数,并不处处注明. 运用 $\pm\infty$ 时, 认定 $\pm\infty+x=\pm\infty=\pm\infty\cdot y(x\in\mathbb{R},0<y\in\mathbb{R})$ 等为常识. 此外总约定 $\pm\infty\cdot 0=0$.

因此通过取绝对值并用代数运算,即可表出$f\vee g$与$f\wedge g$. 约定

$$f^+=f\vee 0,\quad f^-=(-f)^+,$$

二者分别称为f的“正部”与“负部”(注意$f^-\geqslant 0$!). 以下公式是常用的:

$$f=f^+-f^-,\quad |f|=f^++f^-. \tag{3.1.2}$$

Ω上仅取有限个有限值的可测函数称为**简单函数**,分别以$S(\Omega)$与$S^+(\Omega)$记Ω上的简单函数与非负简单函数之全体. 给定$f\in S(\Omega)$,总认定它已表成某个和式$\sum\alpha_i\xi_{e_i}$,其中,$\{e_i:1\leqslant i\leqslant n\}$是$\Omega$的一个分解,$\alpha_i\in\mathbb{K}$不必互不相同. 下面就要指出,仅以简单函数作为“基本构件”,就足以构成任何可测函数.

定理 3.1.2 设f是Ω上的可测函数,则存在序列$\{f_n\}\subset S(\Omega)$,它在Ω上点态收敛于f且$|f_n|\leqslant|f|$. 当$f\geqslant 0$时可要求$\{f_n\}\subset S^+(\Omega)$且$f_n$对$n$单调增(写作$0\leqslant f_n\nearrow f$).

证 因可用分解$f=\mathrm{Re}\,f+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,f$及式(3.1.2),不妨设$f\geqslant 0$. 对于这种情况,所需的$f_n$可直接构作如下:

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{k-1}{2^n}, & \dfrac{k-1}{2^n}\leqslant f(x)<\dfrac{k}{2^n},k=1,2,\cdots,n2^n,\\ n, & f(x)\geqslant n.\end{cases}$$

直接看出$f_n\in S^+(\Omega)$且$f_n\nearrow f$. □

定理 3.1.2 有两重价值. 首先,在理论上它完全阐明了可测函数的结构:可测函数原来就是简单函数列的极限函数,或者说,可测函数类就是对极限运算封闭且包含简单函数类的最小函数类. 这样,初看起来似乎直观意义不明的可测函数,就有了较清晰的面貌. 其次,在方法上定理 3.1.2 为用简单函数研究可测函数开辟了道路. 凡对可测函数提出的问题,可首先在简单函数类中解决(这往往较容易),然后通过一极限过程过渡到一般可测函数. 下面的积分定义,正好运用了这一思想.

积分定义遵循由特殊到一般的几个递进步骤. 构成积分的这种方法在近代分析中是很典型的,几乎成了一种模式.

定义 3.1.3 (i) 任给$f=\sum\alpha_i\xi_{e_i}\in S^+(\Omega)$(记住$\{e_i\}$是$\Omega$的分解!),令

$$\int_\Omega f\mathrm{d}\mu=\sum_i\alpha_i\mu e_i; \tag{3.1.3}$$

(ii) 若f是Ω上的非负可测函数,则令

$$\int_\Omega f\mathrm{d}\mu=\sup_{f\geqslant\varphi\in S^+(\Omega)}\int_\Omega\varphi\mathrm{d}\mu; \tag{3.1.4}$$

(iii) 若f是Ω上的实可测函数,则令

$$\int_\Omega f\mathrm{d}\mu=\int_\Omega f^+\mathrm{d}\mu-\int_\Omega f^-\mathrm{d}\mu, \tag{3.1.5}$$

只要上式右端不出现 $\infty - \infty$ 的情况；

(iv) 若 $f = u + \mathrm{i}v$ 是 Ω 上的复可测函数，则令

$$\int_\Omega f\mathrm{d}\mu = \int_\Omega u\mathrm{d}\mu + \mathrm{i}\int_\Omega v\mathrm{d}\mu, \tag{3.1.6}$$

只要右端两积分均存在且有限.

式(3.1.3)～(3.1.6)中的 $\int_\Omega f\mathrm{d}\mu$（假定其存在）都称为 f 在 Ω 上关于测度 μ 的积分，但仅当此积分有限时说 f 在 Ω 上关于测度 μ 可积. 必须强调，区分**有积分**与**可积**是重要的. 约定 $L^1(\Omega,\mu)$ 记 Ω 上关于测度 μ 可积的可测函数之全体，当不必标明 μ 时就简写作 $L^1(\Omega)$，甚至写作 L^1. 由定义 3.1.3 直接看出，对于实可测函数 f，$f \in L^1 \Leftrightarrow f^{\pm} \in L^1$；对于复可测函数 $f = u + \mathrm{i}v$，$f \in L^1 \Leftrightarrow u, v \in L^1$.

积分记号 $\int_\Omega f\mathrm{d}\mu$ 中的 3 个要素（积分域 Ω，被积函数 f 与测度 μ）无疑都是重要的，但在不致误解时也可使用简略记号

$$\int f\mathrm{d}\mu, \quad \int_\Omega f, \quad \int_\Omega$$

等. 另一方面，有时需标明积分变量（如对“参变积分”就是如此），用更详细的记号

$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \quad 或 \quad \int_\Omega f(x)\mu(\mathrm{d}x).$$

若 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，则在 Ω 上对 Lebesgue 测度 m 的积分称为 Lebesgue 积分. 与此相区别，由定义 3.1.3 给出的关于一般测度 μ 的积分也称为抽象 Lebesgue 积分. 就关于积分的一般理论而言，这种区分并不重要，下面不妨都称为 Lebesgue 积分.

若 f 是 Ω 上的可测函数，$\varnothing \neq A \in \mathscr{A}$，则 f 显然亦是 A 上的可测函数（见例 3.1.1(v)）. 容易证明，只要积分 $\int_\Omega f\mathrm{d}\mu$ 有定义，则 $\int_A f\mathrm{d}\mu$ 亦有定义且成立

$$\int_A f\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f\xi_A\mathrm{d}\mu. \tag{3.1.7}$$

将由积分定义直接推出的简单结论汇集在以下命题中，以便引用.

命题 3.1.2　设 f, g 是 Ω 上的可测函数，α, β 是常数，则以下结论成立：

(i) 可积性：$f \in L^1 \Leftrightarrow |f| \in L^1$，因而“绝对可积”一词失去意义. 若 $f \in L^1$，则 $|f| < \infty$，a. e.，集 $\{f \neq 0\}$ 有 σ 有限测度；

(ii) 忽略零集：若 $f = g$，a. e.，则 $\int_\Omega f\mathrm{d}\mu = \int_\Omega g\mathrm{d}\mu$（只要假定其中之一存在），$f \in L^1 \Leftrightarrow g \in L^1$；

(iii) 线性性：$\int_\Omega(\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}\mu = \alpha\int_\Omega f\mathrm{d}\mu + \beta\int_\Omega g\mathrm{d}\mu$，只要右端有意义；

(iv) 完全可加性: $\int_A f\mathrm{d}\mu = \sum \int_{A_i} f\mathrm{d}\mu$,只要左端积分存在且 $\{A_i\}$ 是 A 的一个分解;

(v) 单调性: $f \leqslant g \Rightarrow \int_\Omega f\mathrm{d}\mu \leqslant \int_\Omega g\mathrm{d}\mu$,假定这些积分存在. 若 $f \in L^1$,则

$$\left|\int_\Omega f\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_\Omega |f|\,\mathrm{d}\mu; \tag{3.1.8}$$

(vi) 积分为零的条件:设 $f \geqslant 0$,则 $\int_\Omega f\mathrm{d}\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$, a. e. ;

(vii) 绝对连续性:若 $f \in L^1$,则

$$\lim_{e \subset \Omega,\, \mu e \to 0} \int_e |f|\,\mathrm{d}\mu = 0; \tag{3.1.9}$$

(viii) 积分定义测度:若 $f \geqslant 0$,令

$$\nu A = \int_A f\mathrm{d}\mu, \quad A \in \mathscr{A}, \tag{3.1.10}$$

则 ν 是 $(\Omega,\mathscr{A})$ 上的一个正测度, $\mu A = 0 \Rightarrow \nu A = 0$.

其中一部分结论(如(iii),(v))比较平凡,似乎是任何积分都应满足的普遍性质,但其他一些结论则不那么自明,与 Riemann 积分比较尤显惊人,这些都显示出 Lebesgue 积分的好处. 结论(ii)表明 Lebesgue 积分竟如此"粗略",有关命题所需条件只要 a. e. 满足就够了. 结论(vi)推出:若 $f,g \in L^1, A \in \mathscr{A}$,在 A 上 $f < g$,则 $\int_A f\mathrm{d}\mu < \int_A g\mathrm{d}\mu$,除非 $\mu A = 0$. 结论(viii)表明,可将命题 3.1.1 所描述的测度性质(如连续性)直接用于式(3.1.10)右端的积分.

任给 $f \in L^1$,由命题 3.1.2(i)有 $|f| \in L^1$,故

$$\|f\|_1 \triangleq \int_\Omega |f|\,\mathrm{d}\mu < \infty. \tag{3.1.11}$$

以 $\|f\|_1$ 为范数, $L^1(\Omega,\mu)$ 是一个 Banach 空间,其中,范数收敛称为平均收敛. 这些事实在 3.5 节中将作更一般的考虑,因而此处无需单独处理. 提前使用某些术语、记号与个别结论,只是为了表述某些内容的方便且绝无逻辑循环之嫌.

本节关注的重点是关于积分的几个基本定理,它们涉及积分与极限及积分与积分互换的条件. 这些问题在微积分学中也是基本的,但缺少令人满意的结果. 而 Lebesgue 积分对此作了重大改进,因而确立了其优势. 为表述这些结果,首先作点准备. 设 $f, f_n (n \in \mathbb{N})$ 是 Ω 上的可测函数,约定

$$f_n \to f, \text{a. e.} \Leftrightarrow \mu\{f_n \not\to f\} = 0,$$

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \Leftrightarrow \mu\{|f_n - f| \geqslant \varepsilon\} \to 0 (n \to \infty, \forall \varepsilon > 0).$$

对于以上两种情况,分别说 $\{f_n\}$ 几乎处处收敛于 f 与依测度 μ 收敛于 f. 为使测度收

敛的定义可行,要求f_n与f在Ω上几乎处处有限. 以上两种收敛的关系如何?下面的定理作了解答.

定理3.1.3　设$f,f_n(n\in\mathbb{N})$是Ω上几乎处处有限的可测函数.

(i) 若$\mu\Omega<\infty$,$f_n\to f$, a. e. ,则$f_n\xrightarrow{\mu}f$;

(ii) 若$f_n\xrightarrow{\mu}f$,则$\{f_n\}$有子列几乎处处收敛于f.

证　令$A_{kr}=\{|f_k-f|\geqslant 1/r\}$,则易看出$\{f_n\not\to f\}=\bigcup\limits_{r=1}^{\infty}\overline{\lim\limits_k}A_{kr}$.

(i) 由$\mu\{f_n\not\to f\}=0$, $\mu\Omega<\infty$与命题3.1.1(v)推出

$$\lim_n\mu\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_{kr}\Big)=0,\quad\forall r\in\mathbb{N}.$$

这又推出$\mu A_{nr}\to 0(n\to\infty,r\in\mathbb{N})$,因此$f_n\xrightarrow{\mu}f$.

(ii) 由$f_n\xrightarrow{\mu}f$有$\mu A_{nr}\to 0(n\to\infty,r\in\mathbb{N})$,因此可取出指标$n_1<n_2<\cdots$,使得$\mu A_{n_kk}<2^{-k}(k\in\mathbb{N})$. 于是

$$\begin{aligned}\mu\{f_{n_k}\not\to f\}&=\mu\Big(\bigcup_{r=1}^{\infty}\overline{\lim_k}A_{n_kr}\Big)=\lim_{r\to\infty}\mu\Big(\overline{\lim_k}A_{n_kr}\Big)\\&\leqslant\lim_{r\to\infty}\mu\Big(\bigcup_{k=r}^{\infty}A_{n_kr}\Big)\leqslant\lim_{r\to\infty}\sum_{k=r}^{\infty}\mu A_{n_kr}=0,\end{aligned}$$

这表明$f_{n_k}\to f$, a. e.. □

取$f_n=\xi_{[0,n]}$,则在$\mathbb{R}_+$上$f_n\to 1$(处处收敛). 但$m\{|f_n-1|=1\}=\infty(\forall n\in\mathbb{N})$. 可见定理3.1.3(i)之条件$\mu\Omega<\infty$是要紧的. 其次令$f_n=\xi_{\delta_n}$,$\delta_n$依次取为

$$\delta_1=[0,1/2],\quad\delta_2=[1/2,1],\quad\delta_3=[0,1/3],\quad\delta_4=[1/3,2/3],$$
$$\delta_5=[2/3,1],\quad\delta_6=[0,1/4],\quad\cdots,$$

则显然在$[0,1]$上$f_n\xrightarrow{m}0$. 但$\forall x\in[0,1]$,$f_n(x)\not\to 0$. 这表明定理3.1.3(ii)不能加强为"$f_n\xrightarrow{\mu}f\Rightarrow f_n\to f$, a. e.".

以下就是本节的中心结果,它通常被称为积分收敛定理.

定理3.1.4　设$f_n(n\in\mathbb{N})$是Ω上的可测函数.

(i) **Levi 定理**:若$0\leqslant f_n\nearrow f$(或$f_n\searrow f$,$f_n\leqslant g\in L^1$),则

$$\int_\Omega f\mathrm{d}\mu=\lim_n\int_\Omega f_n\mathrm{d}\mu;$$

(ii) **Fatou 定理**:若$f_n\geqslant 0(\forall n\in\mathbb{N})$,则$\int_\Omega\underline{\lim\limits_n}f_n\mathrm{d}\mu\leqslant\underline{\lim\limits_n}\int_\Omega f_n\mathrm{d}\mu$;

(iii) **Lebesgue 控制收敛定理**:若$|f_n|\leqslant g\in L^1$, $f_n\to f$, a. e. 或$f_n\xrightarrow{\mu}f$,则$f\in L^1$, $\|f_n-f\|_1\to 0$,因而$\int_\Omega f_n\mathrm{d}\mu\to\int_\Omega f\mathrm{d}\mu$.

证　(i) 只需对于$0\leqslant f_n\nearrow f$证$\int_\Omega f\mathrm{d}\mu\leqslant\lim\limits_n\int_\Omega f_n\mathrm{d}\mu$, 为此又只要证:任给$\beta\in$

$(0,1)$, $f \geqslant \varphi \in S^+(\Omega)$, 有$\int_\Omega \beta\varphi \mathrm{d}\mu \leqslant \lim_n \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu$. 这由以下推理得出:

$$\int_\Omega \beta\varphi \mathrm{d}\mu = \int_{\cup\{\beta\varphi \leqslant f_n\}} \beta\varphi \mathrm{d}\mu = \lim_n \int_{\{\beta\varphi \leqslant f_n\}} \beta\varphi \mathrm{d}\mu \leqslant \lim_n \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu,$$

其中, 用到 $\nu A = \int_A \beta\varphi \mathrm{d}\mu (A \in \mathscr{A})$ 是一测度,而集$\{\beta\varphi \leqslant f_n\}$ 对 n 上升.

(ii) 利用已证的(i),

$$\int_\Omega \underline{\lim_n} f_n \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \lim_n \inf_{k \geqslant n} f_k \mathrm{d}\mu = \lim_n \int_\Omega \inf_{k \geqslant n} f_k \mathrm{d}\mu$$

$$\leqslant \lim_n \inf_{k \geqslant n} \int_\Omega f_k \mathrm{d}\mu = \underline{\lim_n} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu.$$

(iii) 首先设$f_n \to f$, a. e. ,则$|f| \leqslant g$, a. e. ,因此$f \in L^1$ 且$|f_n - f| \leqslant 2g$, a. e.. 于是由已证的(ii) 有

$$2\|g\|_1 = \int_\Omega \lim_n [2g - |f_n - f|] \mathrm{d}\mu$$

$$\leqslant \underline{\lim_n} \int_\Omega [2g - |f_n - f|] \mathrm{d}\mu$$

$$= 2\|g\|_1 - \overline{\lim_n} \|f_n - f\|_1,$$

这推出 $\|f_n - f\|_1 \to 0 (n \to \infty)$. 其次设$f_n \xrightarrow{\mu} f$. 若 $\|f_n - f\|_1 \not\to 0$,则有$\varepsilon > 0$ 与$\{f_n\}$ 的子列$\{f_{n_k}\}$,使得 $\|f_{n_k} - f\|_1 \geqslant \varepsilon$. 显然亦有$f_{n_k} \xrightarrow{\mu} f$. 于是由定理3.1.3(ii)有$\{f_{n_k}\}$ 的子列$\{f_{n_k'}\}$,使得$f_{n_k'} \to f$, a. e.. 于是由已证结论有 $\|f_{n_k'} - f\|_1 \to 0$,这与$\|f_{n_k'} - f\|_1 \geqslant \varepsilon$ 相矛盾. 因此必有 $\|f_n - f\|_1 \to 0$. □

注意,对于 Levi 定理并未假定$f_n \in L^1$(当然也未必$f \in L^1$). 如果对某个 n 有$\int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu = \infty$,则自动地认为$\int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu \to \int_\Omega f \mathrm{d}\mu = \infty$.

定理3.1.4 的以下推论是常用的:

推论3.1.1 设$f_n (n \in \mathbb{N})$ 是Ω上的可测函数.

(i) 若$f_n \geqslant 0 (n \in \mathbb{N})$,则$\int_\Omega \sum f_n \mathrm{d}\mu = \sum \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu$;

(ii) 若$f_n \geqslant 0$, $f_n \to f$, a. e. , $\int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu \leqslant C$,则$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu \leqslant C$;

(iii) 若$\mu\Omega < \infty$, $|f_n| \leqslant \mathrm{const}$, $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 则 $\|f_n - f\|_1 \to 0$;

(iv) 若 $\sum \|f_n\|_1 < \infty$,则$\int_\Omega \sum f_n \mathrm{d}\mu = \sum \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu$,

其中, 结论(i)与(ii)分别由 Levi 定理与 Fatou 定理推出, 结论(iii)与(iv)由控制收敛定理推出. 以证(iv)为例, 令 $F_n = \sum_1^n f_i$, $F = \sum_1^\infty f_n$. 由结论(i)有

$$\int_\Omega \sum_n |f_n| \mathrm{d}\mu = \sum_n \|f_n\|_1 < \infty,$$

这表明 $g \triangleq \sum |f_n| \in L^1$. 于是由命题3.1.2(i)有 $g < \infty$, a.e., 这推出 $\sum f_n$ 几乎处处收敛, 即 $F_n \to F$, a.e.. 因 $|F_n| \leqslant g$, 故可应用控制收敛定理得出

$$\int_\Omega \sum_n f_n \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \lim_n F_n \mathrm{d}\mu = \lim_n \int_\Omega F_n \mathrm{d}\mu = \sum_n \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu.$$

在推论3.1.1(i)中, 并未假设 $\sum f_n$ 与 $\sum_n \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu$ 收敛, 亦未假定 $f_n \in L^1$, 因此可能出现这样的情况: 非负项的无穷和中某项取 ∞, 此时总认定该和就是 ∞. 今后在类似情况下都作此理解. 将推论3.1.1中的结论(i)与(iv)概括起来可以说, 只要 $f_n \geqslant 0 (n \in \mathbb{N})$ 或者 $\sum \|f_n\|_1 < \infty$, 对级数 $\sum f_n$ 即可逐项积分. 这与基于一致收敛性的类似结论比较, 无疑是更方便的.

若 $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ 与 $(\Gamma, \mathscr{B}, \nu)$ 是两个 σ 有限测度空间, 则可依自然的方式构成积测度空间 $(\Omega \times \Gamma, \mathscr{C}, \mu \times \nu)$, 其中, $\mathscr{C}$ 是 $\Omega \times \Gamma$ 上由"可测矩形"族 $\{A \times B: A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\}$ 生成的 σ 代数, **积测度** $\mu \times \nu$ 是 $\mathscr{C}$ 上的 σ 有限测度, 它唯一地决定于

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu A \cdot \nu B, \quad A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}. \tag{3.1.12}$$

利用积测度, 可表述如下的 **Fubini 定理**:

定理3.1.5　设 $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ 与 $(\Gamma, \mathscr{B}, \nu)$ 是两个 σ 有限测度空间, f 是积测度空间 $\Omega \times \Gamma$ 上的可测函数, 则当 $f \geqslant 0$ 或 $f \in L^1(\Omega \times \Gamma)$ 时成立

$$\begin{aligned}\int_{\Omega \times \Gamma} f \mathrm{d}(\mu \times \nu) &= \int_\Omega \mathrm{d}\mu(x) \int_\Gamma f(x, y) \mathrm{d}\nu(y) \\ &= \int_\Gamma \mathrm{d}\nu(y) \int_\Omega f(x, y) \mathrm{d}\mu(x).\end{aligned} \tag{3.1.13}$$

对于式(3.1.13)自然应作如下理解: 两个累次积分的内层积分几乎处处存在且定义出一个 Ω 或 Γ 上的可测函数.

Fubini 定理的证明较长, 但是标准的, 可见于一般实分析著作.

下面通过考虑一些特殊情况来说明本节结果的应用.

例3.1.2　(i) 设 Ω 是任一无限集, μ 是 Ω 上的计数测度. Ω 上的任何实或复函数都是 μ 可测的. 约定 $l^1(\Omega) = L^1(\Omega, \mu)$. 若 $f \in l^1(\Omega)$, 则由命题3.1.2(i)推出: f 必为有限函数, 且 $\{f \neq 0\}$ 有 σ 有限计数测度, 这相当于 $\{f \neq 0\}$ 是一可数集. 设 $\{f \neq 0\} = \{x_n\}$, 则由完全可加性有

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu = \int_{\{f \neq 0\}} f \mathrm{d}\mu = \sum_n \int_{\{x_n\}} f \mathrm{d}\mu = \sum_n f(x_n).$$

因和式 $\sum f(x_n)$ 应与项的排列无关, 它必须是绝对收敛的. 这就得出

$$l^1(\Omega) = \{f: f \text{ 是 } \Omega \text{ 上的有限函数, 除至多可数个}$$

$$\text{点外} f(x) = 0 \text{ 且} \sum_{x\in\Omega} |f(x)| < \infty\}, \tag{3.1.14}$$

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu = \sum_{x\in\Omega} f(x), \quad f \in l^1(\Omega), \tag{3.1.15}$$

和式 $\sum |f(x)|$ 与 $\sum f(x)$ 实际上是绝对收敛的无穷级数,其意义是确定的.

(ii) 特别取 μ 为 $\mathbb{N}$ 上的计数测度,则 $\mu\times\mu$ 就是 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 上的计数测度. 设 $l^1 = l^1(\mathbb{N})$. 任给序列 $\{x_n\}\subset\mathbb{K}$,则当 $x_n\geqslant 0(n\in\mathbb{N})$ 或 $(x_n)\in l^1$ 时有

$$\int_{\mathbb{N}} x(n)\mathrm{d}\mu = \sum_n x_n, \quad x(n) = x_n,$$

且当 $(x_n)\in l^1$ 时上式右端级数绝对收敛. 任给二重序列 $\{x_{mn}\}\subset\mathbb{K}$, 由 Fubini 定理得出若 $x_{mn}\geqslant 0$ 或 $\sum_{m,n}|x_{mn}|<\infty$,则

$$\sum_{m,n} x_{mn} = \sum_m\sum_n x_{mn} = \sum_n\sum_m x_{mn}.$$

以上所述表明,求和问题已纳入积分论的统一框架之内,这无疑是 Lebesgue 积分的一大优势.

(iii) 设 f_n 依推论 3.1.1(iv), $F(x,n) = f_n(x)$, ν 记 $\mathbb{N}$ 上的计数测度,则 $F\in L^1(\Omega\times\mathbb{N},\mu\times\nu)$. 于是由 Fubini 定理推出

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sum_n f_n \mathrm{d}\mu &= \int_\Omega \mathrm{d}\mu(x)\int_{\mathbb{N}} F(x,n)\mathrm{d}\nu(n)\\ &= \int_{\mathbb{N}}\mathrm{d}\nu(n)\int_\Omega F(x,n)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_n\int_\Omega f_n\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

3.2 Bochner 积分

由 3.1 节所概述的积分论固然已具相当的一般性,但仍只是充分发展的近代积分理论的初阶,它大体上完成于 20 世纪 30 年代,并以充分标准的形式进入各种实分析的教材. 本章所定的目标自然要更远大一些. 从本节开始,就要朝各个方向推广经典的积分论. 在走出第一步之前,不妨作点一般考虑. 在 3.1 节中看到,积分依赖于两大要素:测度空间 (Ω,μ) 与被积函数 f. 在定义 3.1.1 中主要由公理 $(\mathrm{M}_1)\sim(\mathrm{M}_2)$ 界定的测度空间概念实际上过于单纯了,它并不足以支撑一个充分精细的积分论,因而有必要作各种拓广与细化,朝这一方向的每个步骤都引出积分理论的扩展或深化. 另一方面,被积函数类亦可以扩大. 在这一方向选择的余地似乎小一些. 从实或复可测函数扩展到无限维向量值函数,已能满足主要的需要. 这一步跨越本节即可完成. 本节的任务简单地说就是:给定完备测度空间 $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ 与 $\mathbb{K}$ 上的 Banach 空间 E,定义函数 $f:\Omega\to E$ 的可测性、可积性及其积分,并建立积分的各种性质. 在这样做时,既要充分借鉴上节所循的思路,也要充分利用上节的

现成结论.

定义 3.2.1　设 $f: \Omega \to E$.

(i) 若 $f(\Omega) = \{a_i\}$ 是可数(或有限)集且每个 $\{f = a_i\} \in \mathscr{A}$,则称 f 为**可数值函数**(或简单函数).

(ii) 若存在可数值函数序列 $\{f_n\}$,使得 $f_n \to f$, a. e. ,则称 f 为**可测函数**.

(iii) 若 $\forall \varphi \in E^*$, $\varphi \circ f$ 是 $\mathbb{K}$ 值可测函数,则称 f 为**弱可测函数**.

与定理 3.1.2 对照起来看,在向量值可测函数定义中,似乎以简单函数取代可数值函数更为自然. 一些著作(如(俞鑫泰, 1992))就是这样做的. 一个细致的分析可以指明,当测度 μ 有限时两种选择等价(见推论 3.2.1(iii)). 如同在 3.1 节中对简单函数所约定的,对于可数值函数 $f: \Omega \to E$ 总使用记号 $f = \sum a_i \xi_{e_i}$,此处 $\{e_i\}$ 是 Ω 的一个分解,$\{a_i\} \subset E$ 是一可数集,a_i 不必互异. 此外,对任何 $f: \Omega \to E$,约定以 $|f|$ 记"绝对值函数" $\|f(x)\|$,此记号今后将一直保持有效.

定义 3.2.1 中对于可测与弱可测函数的界定,开启了一个颇具一般性的处理模式:在将某类数值函数(如连续函数、可测函数、有界变差函数、解析函数等)推广于 Banach 空间值函数时常得到强弱两种形式,弱形式借助于有界线性泛函定义. 在这样做时,人们高度关注的问题是:两种形式是否等价? 倘若等价自然是最理想的(对于解析函数将看到这一结果). 在不等价的情况下,我们仍然关注:附加什么条件能使弱形式等价于强形式? 就可测性而言,如下定理解决了这一问题:

定理 3.2.1(Pettis)　设 $f: \Omega \to E$, 则 f 可测 $\Leftrightarrow$ f 弱可测且几乎可分值,后者意味着存在零集 $A \subset \Omega$,使得 $f(A^c)$ 是可分的. 特别地,若 E 本身是可分空间(包括 $\dim E < \infty$ 的情况),则 f 可测 $\Leftrightarrow$ f 弱可测.

证　首先设 f 可测. 取可数值函数到 $\{f_n\}$,使得 $f_n \to f$, a. e. ,则 $\forall \varphi \in X^*$,有 $\varphi \circ f_n \to \varphi \circ f$, a. e. ,从而 $\varphi \circ f$ ($\forall \varphi \in E^*$) 可测,故 f 弱可测. 令 $A = \{f_n \not\to f\}$,则 $f(A^c)$ 含于 $\overline{\cup f_n(\Omega)}$,后者显然是可分的,这表明 f 几乎可分值.

反之,设 f 弱可测且几乎可分值. 不妨设 E 本身可分,因而有一可数稠集 $\{a_i\}$. 令 $B_{ni} = f^{-1}B_{1/n}(a_i)$, $e_{ni} = B_{ni} \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} B_{nj}$ $(n, i \in \mathbb{N}, B_{n0} = \varnothing)$,则

$$\Omega = \bigcup_i B_{ni} = \bigcup_i e_{ni}, \quad n \in \mathbb{N}$$

且 $\{e_{ni}: i \in \mathbb{N}\}$ 是互不相交族. 令 $f_n = \sum_i a_i \xi_{e_{ni}}$,则直接看出 $|f_n - f| < 1/n$,因而 $f_n \rightrightarrows f (n \to \infty)$. 为说明 f_n 是可数值函数,只要说明 B_{ni} 可测. 注意到

$$B_{ni} = \left\{ |f - a_i| < \frac{1}{n} \right\},$$

只要说明实函数 $|f - a_i|$ 可测. 因 E 可分,由定理 1.6.8(i)有序列 $\{\varphi_k\} \subset E^*$,使得 $\|y\| = \sup_k |\varphi_k(y)|$ ($\forall y \in E$). 于是

$$\|f(x) - a_i\| = \sup_k |\varphi_k(f(x) - a_i)|, \quad x \in \Omega.$$

由 f 弱可测推出 $\varphi_k \circ (f - a_i)$ 可测，因而 $|f - a_i|$ 可测，如所要证. □

定理 3.2.1 实际上蕴涵了比初看起来更多的信息.

推论 3.2.1 可测函数 $f: \Omega \to E$ 有以下性质：

(i) $|f|$ 是非负可测函数；

(ii) 存在可数值函数列 $\{f_n\}$ 与零集 A，使在 A^c 上 $f_n \rightrightarrows f$；

(iii) $\forall \rho > 1$，存在可数值函数列 $\{g_n\}$，使得 $g_n \to f$, a. e. 且 $|g_n| \leqslant \rho |f|$，当 $\mu\Omega < \infty$ 时可要求 g_n 是简单函数；

(iv) 若 $\varphi \circ f = 0$, a. e. ($\forall \varphi \in E^*$)，则 $f = 0$, a. e..

证 结论(i)与(ii)直接从定理 3.2.1 的证明看出.

(iii) 设 $\{f_n\}$ 如结论(ii)，令

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & \|f_n(x)\| \leqslant \rho \|f(x)\|, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

直接看出 g_n 是可数值函数且 $g_n \to f$. a. e.，$|g_n| \leqslant \rho |f|$.

设 $\mu\Omega < \infty$，今将 g_n 改造为简单函数. 设 $g_n = \sum_i a_{ni}\xi_{e_{ni}}$，$\{e_{ni}: i \in \mathbb{N}\}$ 是 Ω 的一个分解. $\forall n \in \mathbb{N}$，取 $k_n \in \mathbb{N}$，使 $A_n = \bigcup_{i > k_n} e_{ni}$ 满足 $\mu A_n < 2^{-n}$. 令 $h_n = \sum_{i \leqslant k_n} a_{ni}\xi_{e_{ni}}$，则 h_n 是简单函数，$|h_n| \leqslant |g_n| \leqslant \rho |f|$. 令 $A = \overline{\lim} A_n$，则 $\mu A = 0$，在 A^c 上 $h_n \to f$, a. e.，因而在 Ω 上 $h_n \to f$, a. e..

(iv) 不妨设 E 可分，取 $\{\varphi_k\}$ 如定理 3.2.1 之证，则

$$\|f(x)\| = \sup_k |\varphi_k(f(x))| = 0, \text{a. e.}. \qquad \square$$

定理 3.2.1 使得可测函数的判定变得较容易些，以下结论颇能说明问题.

推论 3.2.2 (i) 若 $f: \Omega \to E$ 与 $g: \Omega \to \mathbb{K}$ 是可测函数，则 fg 为可测函数；

(ii) 若 $f_n: \Omega \to E (n \in \mathbb{N})$ 是可测函数，$f_n \to f$, a. e. 或 $f_n \xrightarrow{\mu} f$（后者界定为 $|f_n - f| \xrightarrow{\mu} 0$），则 f 是可测函数；

(iii) 若 Ω 是拓扑空间，μ 是 Ω 上的 Borel 测度，$f \in C(\Omega, E)$，Ω 或 E 可分，则 f 是可测函数.

只要说明 f（对于(i)是 fg）弱可测且几乎可分值，而这是容易的.

现在转向考虑积分，它的引进颇类似于定义 3.1.3，也循从特殊到一般的几个递进步骤. 首先引入一个记号. 任给可测函数 $f: \Omega \to E$，因 $|f|$ 必可测（由推论 3.2.1(i)），故总可写出（形式上与式(3.1.11)无异）

$$\|f\|_1 = \int_\Omega |f| \, d\mu. \tag{3.2.1}$$

定义 3.2.2 设 $f: \Omega \to E$ 是可测函数.

(i) 若 $f = \sum a_i \xi_{e_i}$ 是可数值函数，$\|f\|_1 < \infty (n \to \infty)$，则令

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu = \sum_i a_i \mu e_i; \tag{3.2.2}$$

(ii) 若存在可数值函数列 $\{f_n\}$，使得 $f_n \to f$, a.e.，$\|f_n\|_1 < \infty$，$\|f_n - f\|_1 \to 0 (n \to \infty)$，则令

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu = \lim_n \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu. \tag{3.2.3}$$

在以上两种情况下，称所定义的 $\int_\Omega f \mathrm{d}\mu$ 为 f 关于测度 μ 的 **Bochner 积分**，并说 f 是 Bochner 可积的. 不过，为简便起见，今后将省去积分前置的 Bochner 一词.

定义 3.2.2 的合理性尚需一些说明. 首先，由 $\sum \|a_i\| \mu e_i = \|f\|_1 < \infty$ 推出式(3.2.2)右端级数绝对收敛，因而 $\int_\Omega f \mathrm{d}\mu \in E$ 是确定的. 其次，若 $\{f_n\}$ 如定义 3.2.2(ii)，则当 $m, n \to \infty$ 时，有

$$\left\| \int_\Omega f_m \mathrm{d}\mu - \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu \right\| \leqslant \|f_m - f\|_1 + \|f_n - f\|_1 \to 0.$$

因上述不等式右端只涉及非负可测函数的积分，以上论证的合理性不成问题. 因此，式(3.2.3)右端极限必存在. 类似地可说明式(3.2.3)中的极限与 $\{f_n\}$ 的选择无关. 因此积分 $\int_\Omega f \mathrm{d}\mu$ 唯一确定. 而这也就说明了，对于可积的可数值函数 f，由定义 3.2.2 中(i)与(ii)两步定义的积分是一致的.

定义 3.2.2 与定义 3.1.3 固然有所类似，但可指出一个明显差别：依定义 3.1.3 可能出现的"有积分但不必可积"的情况，依定义 3.2.2 是绝不会出现的.

可积意味着"绝对可积"（见命题 3.1.2(i)），Lebesgue 积分的这一性质亦为 Bochner 积分所继承，这是 Bochner 积分的主要优点之一.

定理 3.2.2(Bochner)　设 $f: \Omega \to E$ 可测，则 f 可积 $\Leftrightarrow \|f\|_1 < \infty$.

证　若 f 可积，$\{f_n\}$ 如定义 3.2.2(ii)，则

$$\|f\|_1 \leqslant \|f_n - f\|_1 + \|f_n\|_1 < \infty.$$

反之，设 $\|f\|_1 < \infty$. 取 $\{g_n\}$ 依推论 3.2.1(iii)，则

$$|g_n - f| \leqslant |g_n| + |f| \leqslant (\rho + 1)|f| \in L^1,$$

$\|g_n\|_1 \leqslant \rho \|f\|_1 < \infty$. 由控制收敛定理（定理 3.1.4(iii)）得出 $\|g_n - f\|_1 \to 0 (n \to \infty)$，因而由定义 3.2.2(ii) 知 f 可积. □

类似于 3.1 节中所作的，以 $L^1(\Omega, E, \mu)$ 记可积函数 $f: \Omega \to E$ 之全体，通常简写作 $L^1(\Omega, E)$，有时也简写作 L^1，$L^1(\Omega, \mathbb{K})$ 就是 3.1 节已界定的 $L^1(\Omega)$. 由定理 3.2.2 知 $f \in L^1(\Omega, E) \Leftrightarrow |f| \in L^1(\Omega)$. 同 $L^1(\Omega)$ 一样，$L^1(\Omega, E)$ 依范数 $\|f\|_1$ 亦是一个 Banach 空间. 更深入的讨论包含在专论 L^p 空间的 3.5 节中.

若 $T \in L(E,F)$,F 是$\mathbb{K}$ 上的某个 Banach 空间,则利用定义 3.2.2 容易验证,对任给 $f \in L^1(\Omega,E)$ 有

$$T\int_\Omega f\mathrm{d}\mu = \int_\Omega Tf\mathrm{d}\mu, \tag{3.2.4}$$

即积分与有界线性算子可交换,这可与式(2.1.12)相对照. 特别由此推出

$$\varphi\left(\int_\Omega f\mathrm{d}\mu\right) = \int_\Omega \varphi\circ f\mathrm{d}\mu, \quad \varphi \in E^*. \tag{3.2.5}$$

等式(3.2.4)还有如下用法:设 X 与 Y 均为 Banach 空间,分别以 $L(X,Y)$ 与 Y 取代 E 与 F,以 $A \to Ax$(x 固定,$A \in L(X,Y)$)作为 T, 则从式(3.2.4)得

$$\int_\Omega f(s)\mathrm{d}\mu\cdot x = \int_\Omega f(s)x\mathrm{d}\mu, \tag{3.2.6}$$

其中,$f \in L^1(\Omega,L(X,Y))$,$x \in X$.

现在考虑 Bochner 积分的性质. 鉴于 Bochner 积分与 Lebesgue 积分在构成上的类似性,似乎可指望二者有类似的性质. 关于 Lebesgue 积分的种种结论,除了那些明显要求特殊条件者外(如 Levi 定理,它只能用于非负可测函数,在一般 Banach 空间中不再有意义),不妨都可试探一下是否能推广于 Bochner 积分. 在这样做时,至少有两条途径可供选择:

(A) 那些仅用到"绝对值函数"$|f|$ 的积分性质,可直接用于向量值函数 f 而无需证明. 例如,$\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0$, a. e. 这个命题对于 $f \in L^1(\Omega,E)$ 与 $f \in L^1(\Omega)$ 是毫无差别的.

(B) 利用公式(3.2.5),可将 3.1 节中的某些积分公式推广于 Bochner 积分. 今用一典型例子来说明. 设 $f \in L^1(\Omega,E)$,$A = \cup A_i$ 是 $A \in \mathscr{A}$ 的一个分解,要证

$$\int_A f\mathrm{d}\mu = \sum_i \int_{A_i} f\mathrm{d}\mu. \tag{3.2.7}$$

首先肯定式(3.2.7)两端都是 E 中确定的向量(而且右端级数绝对收敛). $\forall \varphi \in E^*$, 结合式(3.2.5)与命题 3.1.2(iv)有

$$\varphi\left(\int_A f\mathrm{d}\mu\right) = \int_A \varphi\circ f\mathrm{d}\mu = \sum_i \int_{A_i}\varphi\circ f\mathrm{d}\mu = \varphi\left(\sum_i \int_{A_i} f\mathrm{d}\mu\right),$$

这就可用推论 1.6.1 推出式(3.2.7)成立,即 Bochner 积分具有完全可加性.

以上两种途径都值得考虑,尤其后者正是我们特别推荐的归化法. 不过,无论循哪条途径,就基本积分性质的推广而言,所面对的任务大体上是平凡的. 因此,我们只是汇集最主要的结果于以下定理,而略去其几乎是标准的证明.

定理 3.2.3 Bochner 积分有以下性质:

(i) $J: L^1(\Omega,E) \to E$,$f \to \int_\Omega f\mathrm{d}\mu$ 是一个有界线性算子且 $\|J\| \leqslant 1$, 任给 $f \in L^1(\Omega,E)$,若 $A = \cup A_i$ 是 $A \in \mathscr{A}$ 的一个分解,则式(3.2.7) 成立;

(ii) 控制收敛定理:设 $f_n: \Omega \to E$ 可测,$|f_n| \leqslant g \in L^1$($\forall n \in \mathbb{N}$),$f_n \to f$, a. e.

或$f_n \xrightarrow{\mu} f(n\to\infty)$,则$f\in L^1$且$\|f_n-f\|_1\to 0$,从而

$$\int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu \to \int_\Omega f\mathrm{d}\mu(n\to\infty);$$

(iii) Fubini 定理:设$(\Omega,\mathscr{A},\mu)$与$(\Gamma,\mathscr{B},\nu)$是两个σ有限测度空间,$(\Omega\times\Gamma,\mathscr{C},\mu\times\nu)$是积测度空间,$f(x,y)\in L^1(\Omega\times\Gamma,E,\mu\times\nu)$,则成立

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times\Gamma} f\mathrm{d}(\mu\times\nu) &= \int_\Omega \mathrm{d}\mu(x)\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\\ &= \int_\Gamma \mathrm{d}\nu(y)\int_\Omega f(x,y)\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}\tag{3.2.8}$$

对于式(3.1.14)所作的说明,亦适用于式(3.2.8).

在定理 3.2.3 意义下的控制收敛定理与 Fubini 定理,在分析学中有广泛的应用,以下各章中将不乏这类应用的机会. 如同经典实分析中一样,控制收敛定理与 Fubini 定理尤其便于用来研究“参变积分”

$$f(y) = \int_\Omega F(x,y)\mathrm{d}\mu(x).\tag{3.2.9}$$

最重要的问题之一是:能否在积分号下求导? 下面给出一个这方面的结果.

定理 3.2.4　设$F(x,y):\Omega\times U\to E$,$U$是某赋范空间$Y$的一个开子集,$1\leqslant r\leqslant\infty$. $F(x,y)$对x在Ω上可积,当$1\leqslant k<r+1$时$F(x,y)$对y的k阶导数$F_y^{(k)}(x,y)$存在且对x在Ω上可测,对y在U内连续,

$$\|F_y^{(k)}(x,y)\|\leqslant g_k(x)\in L^1(\Omega).\tag{3.2.10}$$

设$f(y)$依式(3.2.9),则$f\in C^r(U,E)$且

$$f^{(k)}(y) = \int_\Omega F_y^{(k)}(x,y)\mathrm{d}\mu(x),\quad 1\leqslant k<r+1, y\in U.\tag{3.2.11}$$

证　因可对k用归纳法,不妨只对$k=1$证式(3.2.11)并说明$f'(y)$在U内连续. 取定$y\in U$与$0\neq h_n\in Y$,设$\|h_n\|\to 0(n\to\infty)$. 令

$$F_n(x) = \|h_n\|^{-1}[F(x,y+h_n)-F(x,y)-F_y'(x,y)h_n],$$

直接看出$F_n(x)\to 0(n\to\infty, x\in\Omega)$. 由式(2.1.19)与式(3.2.10)有

$$\|F_n(x)\|\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\|F_y'(x,y+th_n)-F_y'(x,y)\|\leqslant 2g_1(x).$$

可验知$F_n(x)$可测,于是由控制收敛定理(即定理 3.2.3(ii))有

$$\begin{aligned}&\lim_n \|h_n\|^{-1}\left[\Delta f(y,h_n)-\int_\Omega F_y'(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\cdot h_n\right]\\ &=\lim_n\int_\Omega F_n(x)\mathrm{d}\mu = 0,\end{aligned}$$

其中用了式(3.2.6). 这表明(由定义 2.1.1)

$$f'(y) = \int_\Omega F_y'(x,y)\mathrm{d}\mu(x),$$

即当$k=1$时式(3.2.11)成立. 再用一次控制收敛定理

$$\lim_n f'(y+h_n) = \lim_n \int_\Omega F'_y(x,y+h_n)\mathrm{d}\mu(x) = f'(y),$$

这表明$f'(y)$ 在 U 内连续. □

定理3.2.4 的结论堪称完美,但如何验证其条件似成问题. 下面的一连串补充说明或许能使所面临的困难不至像初看起来那么大.

(i) 鉴于微分性质是一局部性质,不妨对于 y 局部地应用定理3.2.4,因而涉及 y 的条件只要局部地满足就行了.

(ii) 若 Ω 是一可分紧拓扑空间,μ 是 Ω 上的 Borel 测度, $F_y^{(k)}(x,y)$ 在 $\Omega\times U$ 上连续,则 $F_y^{(k)}(x,y)$ 对 x 在 Ω 上可测,当 $y_0\in U$, $\|y-y_0\|$ 充分小时, 有

$$\|F_y^{(k)}(x,y)\| \leqslant \|F_y^{(k)}(x,y_0)\| + 1 \triangleq g_k(x) \in L^1(\Omega),$$

其中用了 Ω 的紧性. 因此,在 y_0 邻近可应用定理3.2.4.

(iii) 应用上常见的情况是取 $Y=\mathbb{R}^n$,此时可对定理3.2.4 的表述作如下修改:设 $F(x,y)$ 对 x 在 Ω 上可积,对 y 是 U 内的 C^r 函数,当 $1\leqslant|\alpha|<r+1$ 时,

$$\|\partial_y^\alpha F(x,y)\| \leqslant g_\alpha(x) \in L^1(\Omega), \tag{3.2.12}$$

则$f\in C^r(U,E)$ 且当 $1\leqslant|\alpha|<r+1$ 时,

$$\partial^\alpha f(y) = \int_\Omega \partial_y^\alpha F(x,y)\mathrm{d}\mu(x), \quad y\in U. \tag{3.2.13}$$

此处没有提及 $\partial_y^\alpha F(x,y)$ 对 $x\in\Omega$ 的可测性,理由在于:$\partial_y^\alpha F(x,y)$ 作为(对 x) 可测函数的极限函数,必定是可测的(由推论3.2.2(ii)).

前面对条件所作的局部化说明,当然也适用于 $Y=\mathbb{R}^n$ 这一特殊情况.

在实分析中有如下简单结果:若(依 Lebesgue 积分)

$$\int_a^x f(y)\mathrm{d}y = 0, \quad a\leqslant x\leqslant b,$$

则在 $[a,b]$ 上$f(x)=0$,a. e.. 这提示了如下思想:从积分的一定结论可推断出被积函数的一定性质. 这一想法是将积分用于函数研究的基础. 下面建立一个定理,它可看成上述思想的非常一般的应用.

定理3.2.5 设$f\in L^1(\Omega,E)$,$F\subset E$ 是一闭集. 若以下条件满足:

$$0<\mu A<\infty \Rightarrow \frac{1}{\mu A}\int_A f\mathrm{d}\mu \in F, \tag{3.2.14}$$

当 $0\notin F$ 时 μ 是 σ 有限的,则$f(x)\in F$,a. e. ,这意味着 $\mu\{f\notin F\}=0$.

证 不妨设 E 可分. 因集$\{f\neq 0\}$ 有 σ 有限测度(由命题3.1.2(i)),故不妨设 $\mu\Omega<\infty$. 由可分性推出,F^c 可表为可数个球 B_n 之并,只要证$f(x)$ 几乎处处取值于其中每个球 B_n 之外, 进而又不妨设 $F^c=B_r(a)$,$a\in E$,$r>0$. 因此只要证 $A=f^{-1}B_r(a)$ 是零集. 由 $A=\{|f-a|<r\}$ 知 A 可测. 若 $\mu A>0$,则

$$\left\|\frac{1}{\mu A}\int_A f\mathrm{d}\mu - a\right\| \leqslant \frac{1}{\mu A}\int_A |f-a|\,\mathrm{d}\mu < r,$$

从而 $\frac{1}{\mu A}\int_A f\mathrm{d}\mu \notin F$, 这矛盾于条件(3.2.14). 故必 $\mu A = 0$. □

注意, $\frac{1}{\mu A}\int_A f\mathrm{d}\mu$ 可解释为 f 在 A 上的均值. 因此可将定理3.2.5简略地表述为: f 的均值恒属于闭集 F 推出 $f(x)$ 本身几乎处处属于 F. 选择不同的 F,就得到定理3.2.5的各种特殊应用. 下面给出若干常用的推论:

推论3.2.3 设 $f \in L^1(\Omega,E)$.

(i) 若 $\rho \geqslant 0$,以下条件满足:

$$\mu A < \infty \Rightarrow \left\| \int_A f\mathrm{d}\mu \right\| \leqslant \rho \mu A, \tag{3.2.15}$$

则 $|f| \leqslant \rho$, a.e.. 特别地,若 $\int_A f\mathrm{d}\mu = 0(\mu A < \infty)$,则 $f = 0$, a.e.;

(ii) 设 $F \subset E$ 是一闭锥(F 是锥 $\Leftrightarrow \forall \alpha > 0$,有 $\alpha F \subset F$). 若以下条件满足:

$$\mu A < \infty \Rightarrow \int_A f\mathrm{d}\mu \in F, \tag{3.2.16}$$

则 $f(x) \in F$, a.e.. 特别取 $E = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}^n_+$ 得出若

$$\mu A < \infty \Rightarrow \int_A f\mathrm{d}\mu \geqslant 0, \tag{3.2.17}$$

则 $f(x) \geqslant 0$, a.e.;

(iii) 设 $F \subset E$ 是闭的实子空间. 则当条件(3.2.16)满足时 $f(x) \in F$, a.e.. 取 $E = \mathbb{C}, F = \mathbb{R}$ 得出若 $f \in L^1(\Omega,\mathbb{C})$,

$$\mu A < \infty \Rightarrow \int_A f\,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}, \tag{3.2.18}$$

则 $f(x) \in \mathbb{R}$, a.e.;

(iv) 若 $f \in L^1(\Omega,\mathbb{R})$ 满足条件

$$0 < \mu A < \infty \Rightarrow a \leqslant \frac{1}{\mu A}\int_A f\mathrm{d}\mu \leqslant b; \tag{3.2.19}$$

当 $0 \notin [a,b]$ 时 μ 是 σ 有限的, 则 $f(x) \in [a,b]$, a.e.. 若以下条件满足:

$$\mu A < \infty \Rightarrow 0 \leqslant \int_A f\mathrm{d}\mu \leqslant b\mu A, \tag{3.2.20}$$

则 $0 \leqslant f(x) \leqslant b$, a.e..

对于(i)取 $F = \bar{B}_\rho(0)$, 对于(iv)取 $F = [a,b]$. 其余是明显的.

3.3 向量值测度

3.2节中曾提到,推广积分的一个主要方向是扩展测度概念. 本节要实现如下跨越:从正测度过渡到一般的**向量值测度**. 走出这一步的必要性当然有一些实际的

理由，但即使从 3.2 节的内容也可以看出来. 如从定理 3.2.3(i) 能看出的，任给 $f \in L^1(\Omega, E)$，$\nu(A) \triangleq \int_A f\mathrm{d}\mu (A \in \mathscr{A})$ 是一个具有完全可加性的函数，似乎有理由将它当作一个测度，就如同命题 3.1.2(viii) 所断定的那样. 但在 3.2 节中却没有这样做，因暂时还没有取值于 E 中的测度概念. 现在就来填补这一缺陷.

本节中设 $(\Omega, \mathscr{A})$ 是给定的可测空间，E 是 $\mathbb{K}$ 上的 Banach 空间. 鉴于下面频繁的需要，重申本章的一个主要约定：当可数个 $A_i \in \mathscr{A}$ 互不相交且 $A = \cup A_i$ 时说 $A = \cup A_i$ 或 $\{A_i\}$ 是 A 的一个分解. 不妨总设分解 $\{A_i\}$ 是一无限族（否则只要加入一些空集即可）.

定义 3.3.1 若一集函数 $\nu: \mathscr{A} \to E$ 满足完全可加性条件

(A) 对任何分解 $A = \cup A_i$ 有 $\nu(A) = \sum \nu(A_i)$，

则称 ν 为 Ω 上的 E 值测度. $\mathbb{R}$ 值测度与 $\mathbb{C}$ 值测度分别称为**实测度**与**复测度**.

定义 3.3.1 惊人地简单，这或许会令你低估其唯一条件(A)的作用. 实际上，条件(A)可推出大量结论，唯有如此，对 E 值测度才可建立一个内容丰富的理论. 现在就来举出条件(A)的一些较直接的推论，借以获得对 E 值测度的初步印象.

命题 3.3.1 设 ν 是 Ω 上的一个 E 值测度，则 ν 有以下性质：

(i) $\nu(\varnothing) = 0$；

(ii) 若 $A = \bigcup_1^\infty A_i \in \mathscr{A}$ 是一个分解，则级数 $\sum \nu(A_i)$ 收敛且其和与各项顺序无关，必定 $\nu(A_i) \to 0 (i \to \infty)$；当 $E = \mathbb{C}$ 时，$\sum \nu(A_i)$ 绝对收敛；

(iii) 不存在互不相交的可数个集 $A_n \in \mathscr{A}$，使得 $\inf \|\nu(A_n)\| > 0$；

(iv) 可减性：若 $A, B \in \mathscr{A}, A \subset B$，则 $\nu(B \backslash A) = \nu(B) - \nu(A)$；

(v) 连续性：若 $\{A_n\} \subset A$ 是单调列（即升列或降列），则 $\nu(A_n) \to \nu(\cup A_n)$（对于升列）或 $\nu(A_n) \to \nu(\cap A_n)$（对于降列）.

以上结论的证明都是平凡的，不必备述其详. 仅强调一下其中的结论(iii)，这一简单事实下面将被反复利用.

命题 3.3.1 显示出向量值测度与正测度的某些类似性. 但两者之差异亦显而易见. 最主要的是 E 中没有序概念，因而 E 值测度无大小比较. 即使 ν 是实测度，也不能从 $A \subset B$ 推出 $\nu(A) \leqslant \nu(B)$，因而 $\nu(\Omega)$ 未必是最大的. 这些构成向量值测度不及正测度方便的因素. 对此能作的补救是：每个 E 值测度 ν 可依自然的方式产生一个正测度 $|\nu|$，下面就来给出这一构成法.

引理 3.3.1 设 ν 是 Ω 上的一个 E 值测度. 任给 $A \in \mathscr{A}$，令

$$|\nu|(A) = \sup\left\{\sum \|\nu(A_i)\| : A = \cup A_i \text{ 是一分解}\right\}, \tag{3.3.1}$$

则 $|\nu|$ 是一正测度，$\|\nu(A)\| \leqslant |\nu|(A) (\forall A \in \mathscr{A})$，$|\nu|$ 是 Ω 上有此性质的最小正测度.

证　给定 $A \in \mathscr{A}$. 设 $\{A_i\}$ 与 $\{B_j\}$ 是 A 的两个分解, 则 $\{A_i \cap B_j\}$ 是 A_i(i 固定) 的分解, 也是 B_j(j 固定) 的分解. 于是

$$\sum_j \|\nu(B_j)\| = \sum_j \left\| \sum_i \nu(A_i \cap B_j) \right\| \leqslant \sum_{i,j} \|\nu(A_i \cap B_j)\| \leqslant \sum_i |\nu|(A_i).$$

由 $\{B_j\}$ 的任意性, 这得出 $|\nu|(A) \leqslant \sum |\nu|(A_i)$. 若 $-2^{-i} \leqslant t_i < |\nu|(A_i)$, 则有 A_i 的分解 $\{A_{ij}\}$, 使得 $t_i < \sum_j \|\nu(A_{ij})\|$ ($\forall i \in \mathbb{N}$), 这得出

$$\sum_i t_i < \sum_{i,j} \|\nu(A_{ij})\| \leqslant |\nu|(A).$$

因 t_i 可任意接近于 $|\nu|(A_i)$, 故得 $\sum |\nu|(A_i) \leqslant |\nu|(A)$. 这就验明了 $|\nu|$ 完全可加, 从而是一个正测度. 显然有 $\|\nu(A)\| \leqslant |\nu|(A)$ $(A \in \mathscr{A})$.

若 Ω 上的正测度 μ 满足 $\|\nu(A)\| \leqslant \mu A$ $(A \in \mathscr{A})$, 则对 $A \in \mathscr{A}$ 的分解 $\{A_i\}$ 有

$$\sum_i \|\nu(A_i)\| \leqslant \sum_i \mu A_i = \mu A,$$

这结合式(3.3.1)得出 $|\nu|(A) \leqslant \mu A$. □

由引理 3.3.1 所确定的正测度 $|\nu|$ 称为 ν 的**变差**, 而称 $\|\nu\| \triangleq |\nu|(\Omega)$ 为 ν 的**全变差**. 若 $\|\nu\| < \infty$, 则称 ν 为**有界测度**或有界变差测度. 以 $M(\Omega,E)$ 记 Ω 上的有界 E 值测度之全体, 约定 $M(\Omega) = M(\Omega,\mathbb{K})$. 不难验证, $\|\nu\|$ 是 $M(\Omega,E)$ 上的一个范数且 $M(\Omega,E)$ 依此范数是一个 Banach 空间. 这就有了一种与 3.1 节中的考虑完全不同的观点: 所关注的对象不是某些个别的 E 值测度, 而是整个一类 E 值测度. 这种处理模式正是近代分析中的一贯做法.

引理 3.3.2　若空间 E 满足条件

$$\beta \triangleq \inf_{x_1,\cdots,x_m \in E} \sup_{\varepsilon_i = 0,1} \left\| \sum_i \varepsilon_i x_i \right\| \Big/ \sum_i \|x_i\| > 0, \tag{3.3.2}$$

则 Ω 上的任何 E 值测度 ν 必有界.

证　用反证法. 设 ν 是 Ω 上的一个 E 值测度, $\|\nu\| = \infty$. 由式(3.3.1), 必有 Ω 的分解 $\{A_i\}$ 与 $m \in \mathbb{N}$, 使得 $\sum_1^m \|\nu(A_i)\| > \beta^{-1}[1 + \|\nu(\Omega)\|]$. 由条件(3.3.2)(令 $x_i = \nu(A_i)$), 不妨设有 $k \leqslant m$, 使得

$$\left\| \sum_{i=1}^k \nu(A_i) \right\| \geqslant \beta \sum_{i=1}^m \|\nu(A_i)\| > 1 + \|\nu(\Omega)\|.$$

令 $P_1 = \bigcup_1^k A_i$, 则 $\|\nu(P_1)\| > 1 + \|\nu(\Omega)\|$. 于是

$$\|\nu(P_1^c)\| \geqslant \|\nu(P_1)\| - \|\nu(\Omega)\| > 1.$$

这就得到 $\|\nu(P_1)\| \wedge \|\nu(P_1^c)\| > 1$, 同时 $|\nu|(P_1) + |\nu|(P_1^c) = \infty$. 不妨设

$|\nu|(P_1)=\infty$. 以 P_1 取代 Ω 重复以上论证,又可得 $P_2\subset P_1$, $|\nu|(P_2)=\infty$, $\|\nu(P_1\backslash P_2)\|>1$. 一般地,有

$$P_n\subset P_{n-1},\ |\nu|(P_n)=\infty,\ \|\nu(P_{n-1}\backslash P_n)\|>1,\quad n\geqslant 2.$$

注意到 $P_{n-1}\backslash P_n$ 互不相交,这就与命题3.3.1(iii)矛盾. □

看一个简例子. 取 $E=l^2$,设 $\{e_i\}$ 是 l^2 的标准基(见例1.2.1(iii)), m 是一维 Lebesgue 测度. 任给 Lebesgue 可测集 $A\subset\mathbb{R}_+$,定义

$$\nu(A)=\sum_i i^{-1}m(A\cap[i-1,i))e_i,$$

则易见 ν 是$\mathbb{R}_+$ 上的一个 l^2 值测度. ν 是无界的:

$$\|\nu\|\geqslant\sum_i\|\nu([i-1,i))\|_2=\sum_i i^{-1}=\infty.$$

注意 l^2 确不满足条件(3.3.2). 取 $x_i=i^{-1}e_i(i\in\mathbb{N})$,则当 $m\to\infty$ 时,

$$\sup_{\varepsilon_i=0,1}\left\|\sum_{i=1}^m\varepsilon_i x_i\right\|_2\Big/\sum_{i=1}^m\|x_i\|_2=\left(\sum_{i=1}^m\frac{1}{i^2}\right)^{1/2}\Big/\sum_{i=1}^m\frac{1}{i}\to 0.$$

不过,在有限维空间中不会出现以上情况.

推论3.3.1 若 $\dim E<\infty$,则 Ω 上的 E 值测度均有界. 特别地, Ω 上的实测度与复测度均有界.

证 只要验证条件(3.3.2),可设 $E=\mathbb{K}^n$,下面就$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 的情况证明. 设 $x^i=(x_1^i,x_2^i,\cdots,x_n^i)\in\mathbb{R}^n, 1\leqslant i\leqslant m, r=\sum|x^i|>0$. 不妨设 $x^1,x^2,\cdots,x^k(k\leqslant m)$ 属于$\mathbb{R}^n$ 中同一象限且满足 $\sum_1^k|x^i|\geqslant r2^{-n}$, 则

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\left|\sum_{i=1}^k x^i\right|&\geqslant\left\|\sum_{i=1}^k x^i\right\|_1=\sum_{j=1}^n\left|\sum_{i=1}^k x_j^i\right|\\&=\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^n|x_j^i|=\sum_{i=1}^k\|x^i\|_1\\&\geqslant\sum_{i=1}^k|x^i|\geqslant r2^{-n},\end{aligned}$$

$$\left|\sum_{i=1}^k x^i\right|\Big/\sum_{i=1}^m|x^i|\geqslant\frac{1}{2^n\sqrt{n}}.$$

这表明 $\beta\geqslant(2n\sqrt{n})^{-1}$, 可见条件(3.3.2)满足,如所要证. □

任给 $\nu\in M(\Omega,\mathbb{R})$, ν 与 $|\nu|$ 分别为 Ω 上的有限实测度与有限正测度且必定 $\nu\leqslant|\nu|$ (由引理3.3.1). 令

$$\nu^{\pm}=\frac{1}{2}(|\nu|\pm\nu),\tag{3.3.3}$$

则 ν^+ 与 ν^- 均为 Ω 上的有限正测度,分别称为 ν 的**正变差与负变差**. 由式(3.3.3) 有

$$\nu = \nu^{+} - \nu^{-}, \quad |\nu| = \nu^{+} + \nu^{-}, \tag{3.3.4}$$

这可与式(3.1.2)类比. $\nu = \nu^{+} - \nu^{-}$ 称为 ν 的 **Jordan 分解**. 若 $\nu \in M(\Omega,\mathbb{C})$, 则利用实测度的 Jordan 分解得到

$$\nu = \nu_1 - \nu_2 + \mathrm{i}(\nu_3 - \nu_4), \tag{3.3.5}$$

其中, $\nu_j (1 \leqslant j \leqslant 4)$ 都是 Ω 上的有限正测度. 当需要用正测度来研究 $\mathbb{K}$ 值测度时, 应随时联想到分解式(3.3.4) 与式(3.3.5).

有趣的是,对任给 E 值测度 ν 及 $\varphi \in E^*$,有 $\varphi \circ \nu \in M(\Omega)$,因而

$$\sup\{|\varphi(\nu(A))|: A \in \mathscr{A}\} < \infty, \quad \forall \varphi \in E^*.$$

于是由命题 1.6.1 得出 $\sup\{\|\nu(A)\|: A \in \mathscr{A}\} < \infty$,这表明 $\nu(\cdot)$ 有有界值域. 但应注意,这并不意味着 ν 是有界测度!

以下总设 μ 是 Ω 上给定的正测度. 若 E 值测度 ν 有性质 $\mu A = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0 (A \in \mathscr{A})$,则说 ν 对 μ **绝对连续**或 μ 绝对连续,记作 $\nu \ll \mu$. 易验证 $\nu \ll \mu \Leftrightarrow |\nu| \ll \mu$;当 $\nu \in M(\Omega,\mathbb{R})$ 时 $\nu \ll \mu \Leftrightarrow \nu^{\pm} \ll \mu$. 以下命题使绝对连续的意义更显直观:

命题 3.3.2 设 ν 是 Ω 上的 E 值测度,则 $\nu \ll \mu$ 的充要条件是 $\lim\limits_{\mu e \to 0} \nu(e) = 0$,即

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当} \mu e < \delta \text{时} \ \|\nu(e)\| < \varepsilon. \tag{3.3.6}$$

证 显然只要证必要性. 设 $\nu \ll \mu$. 首先设 ν 是有限正测度. 若条件(3.3.6) 不满足,则有 $\varepsilon > 0, \{e_n\} \subset \mathscr{A}$,使得 $\mu e_n < 2^{-n}$,而 $\nu(e_n) \geqslant \varepsilon$. 令 $A = \overline{\lim} e_n$,则 $\mu A = 0$,而 $\nu(A) \geqslant \varepsilon$,得出矛盾. 已证结论结合分解式(3.3.5) 得出,当 $\nu \in M(\Omega)$ 时条件(3.3.6) 满足. 其次设 ν 是任一 E 值测度. 若条件(3.3.6) 不满足,则有 $\varepsilon > 0$, $\{e_n\} \subset \mathscr{A}$,使得 $\mu e_n < 2^{-n}$, $\|\nu(e_n)\| > 2\varepsilon$. 令 $A_n = \bigcup\limits_{n}^{\infty} e_k$,则 $\mu A_n \to 0 (n \to \infty)$. 取 $\varphi \in E^*$,使 $\|\varphi\| = 1, |\varphi(\nu(e_1))| > 2\varepsilon$. 因 $\varphi \circ \nu$ 满足条件(3.3.6),故有 $n_1 > 1$, 使得对任给 $B \subset A_{n_1}, B \in \mathscr{A}$,有 $|\varphi(\nu(B))| < \varepsilon$,因而 $B_1 \triangleq e_1 \backslash A_{n_1}$ 满足

$$\|\nu(B_1)\| \geqslant |\varphi(\nu(B_1))| \geqslant |\varphi(\nu(e_1))| - |\varphi(\nu(e_1 \cap A_{n_1}))| > \varepsilon.$$

以 e_{n_1} 取代 e_1 重复以上论证,可得 $B_2 \in \mathscr{A}$,使得 $\|\nu(B_2)\| > \varepsilon, B_1 \cap B_2 = \varnothing$. 如此继续将得到一列互不相交的集 B_n,使得 $\|\nu(B_n)\| > \varepsilon (\forall n \in \mathbb{N})$, 而这与命题 3.3.1(iii)矛盾. 故条件(3.3.6)必满足. □

任给 $f \in L^1(\Omega,E,\mu)$,定义

$$\nu_f(A) = \int_A f \mathrm{d}\mu, \quad A \in \mathscr{A}, \tag{3.3.7}$$

则 ν_f 是一个 E 值测度且显然 $\nu_f \ll \mu$. 引入记号

$$M_\mu(\Omega,E) = \{\nu \in M(\Omega,E): \nu \ll \mu\}. \tag{3.3.8}$$

直接看出, $M_\mu(\Omega,E)$ 是 $M(\Omega,E)$ 的一个闭子空间,因而也是一个 Banach 空间.

定理 3.3.1 设 ν_f 依式(3.3.7),则有等距嵌入

$$L^1(\Omega,E,\mu) \to M_\mu(\Omega,E), \quad f \to \nu_f. \tag{3.3.9}$$

证 取定 $f \in L^1(\Omega, E, \mu)$，记 $\nu = \nu_f$. 对 Ω 的任一分解 $\{A_i\}$ 有

$$\sum_i \|\nu(A_i)\| = \sum_i \left\| \int_{A_i} f \mathrm{d}\mu \right\| \leqslant \sum_i \int_{A_i} |f| \mathrm{d}\mu = \|f\|_1,$$

这得出 $\|\nu\| \leqslant \|f\|_1$, $\nu \in M_\mu(\Omega, E)$. $\forall \varepsilon > 0$，由定义 3.2.2 有可数值函数 $g = \sum a_i \xi_{e_i}$, $\{a_i\} \subset E$, $\{e_i\}$ 是 Ω 的一个分解，使得 $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. 于是

$$\begin{aligned} \|\nu\| &\geqslant \sum_i \|\nu(e_i)\| = \sum_i \left\| \int_{e_i} f \mathrm{d}\mu \right\| \\ &\geqslant \sum_i \left[\left\| \int_{e_i} g \mathrm{d}\mu \right\| - \left\| \int_{e_i} (f - g) \mathrm{d}\mu \right\| \right] \\ &\geqslant \sum_i \|a_i\| \mu e_i - \|f - g\|_1 \\ &> \|g\|_1 - \varepsilon > \|f\|_1 - 2\varepsilon, \end{aligned}$$

这推出 $\|\nu\| \geqslant \|f\|_1$. 因此 $\|\nu\| = \|f\|_1$. 映射(3.3.9) 显然是线性的，因此它是一个等距嵌入. □

由定理 3.3.1 有 $|\nu|(\Omega) = \|f\|_1$, $\nu = \nu_f$. 将此等式用到 $A \in \mathscr{A}$ 上得出

$$|\nu|(A) = \int_A |f| \mathrm{d}\mu. \tag{3.3.10}$$

下面将多次用到此式.

鉴于测度 ν_f 具有良好的性质，我们当然希望式(3.3.9)是一个等距同构，可惜这并非总是事实，结论与空间 E 的性质有关. 若对任何有限完备测度 μ，式(3.3.9)都是等距同构，则称 E 为 **RNP 空间**(即具 Radon-Nikodym 性质的空间). 本节稍后将证明，Hilbert 空间就是 RNP 空间. 而关于一般 RNP 空间的讨论则远不是一个简单问题，非本节所能深入(见(俞鑫泰，1992)).

$\nu = \nu_f$(由式(3.3.7))这一事实通常写作 $\mathrm{d}\nu = f \mathrm{d}\mu$. 而这又引出一个极富启发性的形式记号 $f = \mathrm{d}\nu / \mathrm{d}\mu$. 通常称 f 为 ν 对 μ 的 **Radon-Nikodym 导数**，简称为 **R-N 导数**. $\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}\mu$ 似乎纯属记号上的形式约定，居然引出某种可严格证明的"微分规则"，以至使 R-N 导数看起来更像一个真正的导数，确是一件很有趣的事情. 下面就来建立关于 R-N 导数的"微分规则".

定理 3.3.2 设 $\nu \in M(\Omega, E)$.

(i) 链规则：若 λ, μ 是 Ω 上的正测度，$\mathrm{d}\lambda = g \mathrm{d}\mu$, $\mathrm{d}\nu = f \mathrm{d}\lambda$，则 $\mathrm{d}\nu = fg \mathrm{d}\mu$，因而

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\mu}; \tag{3.3.11}$$

(ii) 若 $\mathrm{d}\nu = h \mathrm{d}|\nu|$，则 $|h| = 1$, $|\nu|$-a.e..

证 (i) 要证的与其说是"导数等式"(3.3.11)，不如说是以下积分等式：

$$\int_A f \mathrm{d}\lambda = \int_A fg \mathrm{d}\mu, \quad A \in \mathscr{A}. \tag{3.3.12}$$

形式上,这似乎只是以 $\mathrm{d}\lambda = g\mathrm{d}\mu$ 代入左端积分,但如此代入的合理性正是要证明的. 以下证法循从特殊到一般的思考路线,颇具典型性,在类似情况下将多次使用. 当 f 是简单函数时式(3.3.12)显然成立. 用推论 3.2.3(ii)推出 $g \geqslant 0$,μ-a. e.. 若 φ 是 Ω 上的非负可测函数, 则有简单函数列 $\{\varphi_n\}$, 使得 $0 \leqslant \varphi_n \nearrow \varphi$, 因而 $0 \leqslant \varphi_n g \nearrow \varphi g$. 于是由 Levi 定理有

$$\int_A \varphi \mathrm{d}\lambda = \lim_n \int_A \varphi_n \mathrm{d}\lambda = \lim_n \int_A \varphi_n g \mathrm{d}\mu = \int_A \varphi g \mathrm{d}\mu.$$

取简单函数列 $\{f_n\}$,使得 $\|f_n - f\|_1 \to 0$(在 $L^1(\Omega, E, \lambda)$ 中,下同. 这种 $\{f_n\}$ 存在可由定义 3.2.2 直接推出,或用定理 3.5.1). 于是

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_A f \mathrm{d}\lambda - \int_A f g \mathrm{d}\mu \right\| \\
\leqslant &\left\| \int_A f \mathrm{d}\lambda - \int_A f_n \mathrm{d}\lambda \right\| + \left\| \int_A f_n g \mathrm{d}\mu - \int_A f g \mathrm{d}\mu \right\| \\
\leqslant &\|f - f_n\|_1 + \int_A |f_n - f| g \mathrm{d}\mu \\
= &2\|f - f_n\|_1 \to 0, \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

这表明式(3.3.12)成立.

(ii) 任给 $A \in \mathscr{A}$,有

$$\left\| \int_A h \mathrm{d}|\nu| \right\| = \|\nu(A)\| \leqslant |\nu|(A),$$

这推出 $|h| \leqslant 1$, $|\nu|$-a. e. (由推论 3.2.3(i)). 由式(3.3.10)有

$$0 = |\nu|(\Omega) - \int_\Omega |h| \mathrm{d}|\nu| = \int_\Omega (1 - |h|) \mathrm{d}|\nu|,$$

这推出 $|h| = 1$, $|\nu|$-a. e. (由命题 3.1.2(vi)). □

若 $\nu \in M(\Omega, \mathbb{C})$, $\mathrm{d}\nu = h\mathrm{d}|\nu|$, 则由定理 3.3.2(ii)不妨设 $h = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,因而

$$\mathrm{d}\nu = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}|\nu|. \tag{3.3.13}$$

这称为 ν 的极分解,它可与复数的极分解 $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 类比.

寻求测度的各种形式的分解,是测度理论的主要课题之一. 对于实测度而言,由式(3.3.4)所给的 Jordan 分解就是一种常用的分解. 对于一般的 $\nu \in M(\Omega)$, 下面考虑另一种分解,即所谓 Lebesgue 分解. 首先准备若干相关概念. 设 ν 是 Ω 上的 E 值测度(或正测度), $\varnothing \neq M \in \mathscr{A}$, $\mathscr{A}_M = \{A \in \mathscr{A}: A \subset M\}$,则 ν 在 $\mathscr{A}_M$ 上的限制是 $(M, \mathscr{A}_M)$ 上的一个 E 值测度(或正测度),称之为 ν 在 M 上的限制,记作 ν_M 或 $\nu|M$,或仍记作 ν. 用式(3.3.1) 可直接验证 $|\nu_M| = |\nu|_M$. 若 $\nu_M = 0$,则称 M 为 ν 的**零集**,此时可认为 ν 集中在 M^c 上. 若 μ 与 ν 是 Ω 上的 E 值测度或正测度,存在分解 $\Omega = A \cup B$,使得 A 与 B 分别为 μ 与 ν 的零集,则说 μ 与 ν 互奇,记作 $\mu \perp \nu$. 若

μ 是正测度,A 是 μ 的零集($\Leftrightarrow \mu A = 0$),$\nu \ll \mu$,$A \supset Q \in \mathscr{A}$,则 Q 必为 μ 与 ν 的零集.

下面是本节的中心结果——**Lebesgue-Nikodym 定理**:

定理 3.3.3 设 μ 是 Ω 上的 σ 有限正测度,$\nu \in M(\Omega)$. 则存在唯一分解 $\nu = \nu_a + \nu_s$,使得 $\nu_a \ll \mu, \mu \perp \nu_s$ 且 $\mathrm{d}\nu_a/\mathrm{d}\mu$ 存在.

如上的分解 $\nu = \nu_a + \nu_s$ 称为 ν 关于 μ 的 **Lebesgue 分解**,ν_a 与 ν_s 分别称为 ν 关于 μ 的绝对连续部分与奇异部分,必定 $\nu_a \perp \nu_s$.

下面这个证明是 von Neumann 于 1940 年给出的.

证 不妨设 ν 是有限正测度(否则用分解式(3.3.5)). 因 μ 是 σ 有限的,不妨设 $\mu\Omega < \infty$(否则用一极限程序过渡). 令 $\lambda = \mu + \nu$,

$$H = L^2(\Omega,\lambda) = \{f: f \text{是} \Omega \text{上的实可测函数}, |f|^2 \in L^1(\Omega,\lambda)\},$$

则 H 依内积

$$\langle f,g \rangle = \int_\Omega fg\mathrm{d}\lambda$$

是一个实 Hilbert 空间(关于 L^p 空间的系统讨论见 3.5 节). 定义

$$F(f) = \int_\Omega f\mathrm{d}\nu, \quad f \in H.$$

由 $\nu \leqslant \lambda$ 有

$$|F(f)| \leqslant \int_\Omega |f| \mathrm{d}\lambda \leqslant \sqrt{\lambda(\Omega)}\,\|f\|,$$

此处用了 Schwarz 不等式,$\|f\|$ 记 H 中的范数. 可见 $F \in H^*$,于是有 $g \in H$ 使

$$\int_\Omega f\mathrm{d}\nu = \langle f,g \rangle = \int_\Omega fg\mathrm{d}(\mu + \nu),$$

$$\int_\Omega f(1-g)\mathrm{d}\nu = \int_\Omega fg\mathrm{d}\mu, \quad f \in H. \tag{3.3.14}$$

因对任给 $A \in \mathscr{A}$ 有

$$\int_A g\mathrm{d}\lambda = \int_\Omega g\xi_A\mathrm{d}\lambda = \int_\Omega \xi_A\mathrm{d}\nu = \nu(A) \leqslant \lambda(A),$$

故不妨设 $0 \leqslant g \leqslant 1$(由推论 3.2.3(iv)). 令 $P = \{g < 1\}, Q = P^c$,则 $\{P,Q\}$ 是 Ω 的一个分解. 定义

$$\nu_a(A) = \nu(A \cap P), \quad \nu_s(A) = \nu(A \cap Q), \quad A \in \mathscr{A},$$

则 $\nu = \nu_a + \nu_s$,P 是 ν_s 的零集. 用式(3.3.14)得

$$\mu Q = \int_\Omega \xi_Q g\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \xi_Q(1-g)\mathrm{d}\nu = 0,$$

故 $\mu \perp \nu_s$. 由 Levi 定理与式(3.3.14)有

$$\nu_a(A) = \lim_n \int_A (1-g^n)\mathrm{d}\nu$$

$$= \lim_n \int_\Omega (1-g)(1+g+\cdots+g^{n-1})\xi_A \mathrm{d}\nu$$

$$= \lim_n \int_A (g+g^2+\cdots+g^n)\mathrm{d}\mu = \int_A h\mathrm{d}\mu,$$

其中，$h = \sum_1^\infty g^n$. 上式表明 $0 \leqslant h \in L^1(\Omega,\mu)$, $\mathrm{d}\nu_a = h\mathrm{d}\mu$，因而 $\nu_a \ll \mu$.

唯一性. 若 $\nu = \nu_a' + \nu_s'$ 是另一个 Lebesgue 分解，这意味着有 Ω 的分解 $\{P', Q'\}$，使得 $\mu Q' = 0$，P' 是 ν_s' 的零集，则对任给 $A \in \mathscr{A}$ 有

$$\begin{aligned}\nu_a'(A) &= \nu(A\cap P'\cap P) + \nu(A\cap P'\cap Q)\\ &= \nu_a(A\cap P') + \nu_a'(A\cap Q)\\ &= \nu_a(A\cap P') + \nu_a(A\cap Q') = \nu_a(A),\end{aligned}$$

其中用了 $\nu_a'(A\cap Q) = 0 = \nu_a(A\cap Q')$. 于是 $\nu_a' = \nu_a$, $\nu_s' = \nu_s$. □

注意，在定理条件下若附设 $\nu \ll \mu$，则 $\nu = \nu + 0$ 已是 ν 的 Lebesgue 分解，因而 $\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}\mu$ 必存在. 这一结论表明，$\mathbb{K}$ 是 RNP 空间. 这个结果的一个远为一般的推广是，Hilbert 空间也是 RNP 空间，这由以下定理推出：

定理 3.3.4　设 μ 是 Ω 上的 σ 有限正测度，E 是一个 Hilbert 空间，则映射(3.3.9)是一个等距同构，因而对于 $\nu \in M(\Omega,E)$，$\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}\mu$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\nu \ll \mu$. 特别地，任给 $\nu \in M(\Omega,E)$，$\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}|\nu|$ 必存在.

证　取定 $\nu \in M_\mu(\Omega,E)$，今要构成 $\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}\mu \in L^1(\Omega,\mu)$. 关键的一步是由 $|\nu| \ll \mu$，用定理 3.3.3 推出存在 $g = \mathrm{d}|\nu|/\mathrm{d}\mu \in L^1(\Omega,\mu)$. 从等式(3.3.11)看来（以 $|\nu|$ 取代 λ），还需构成 $\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}|\nu|$，这基于 Hilbert 空间技术. 定义

$$T(\varphi) = \sum_i \langle a_i, \nu(e_i)\rangle,$$

其中，$\varphi = \sum a_i\xi_{e_i}: \Omega \to E$ 是简单函数. $H \triangleq L^2(\Omega,E,|\nu|)$ 依内积

$$\langle f,h\rangle = \int_\Omega \langle f(x),h(x)\rangle \mathrm{d}|\nu|,\quad f,h \in H$$

是一个 Hilbert 空间. 由 Schwarz 不等式有

$$\begin{aligned}|T(\varphi)| &\leqslant \sum_i \|a_i\|\,\|\nu(e_i)\| \leqslant \sum_i \|a_i\|\,|\nu|(e_i)\\ &\leqslant \left(\sum_i \|a_i\|^2|\nu|(e_i)\right)^{1/2}\left(\sum_i |\nu|(e_i)\right)^{1/2}\\ &= \|\varphi\|\sqrt{\|\nu\|},\end{aligned}$$

其中，$\|\varphi\|$ 是 H 中的范数. 于是存在 $h \in H$ 使 $T(\varphi) = \langle\varphi,h\rangle$. 任给 $a \in E, A \in \mathscr{A}$，有

$$\begin{aligned}\langle a,\nu(A)\rangle &= T(a\xi_A) = \langle a\xi_A, h\rangle\\ &= \int_A \langle a,h(x)\rangle \mathrm{d}|\nu| = \left\langle a, \int_A h\mathrm{d}|\nu|\right\rangle,\end{aligned}$$

这得出$\nu(A) = \int_A h\mathrm{d}|\nu| \ (A \in \mathscr{A})$,因而$h = \mathrm{d}\nu/\mathrm{d}|\nu|$. 由定理3.3.2(ii),不妨设$|h| = 1$,于是$hg \in L^1(\Omega,E,\mu)$. 由定理3.3.2(i),有$\mathrm{d}\nu = hg\mathrm{d}\nu$, 这表明$\dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} = hg$存在,如所要证. □

实际上,RNP 也包括那些多少接近于 Hilbert 空间的空间,如自反空间. 在文献(俞鑫泰, 1992)中有不少这方面的结果. 下面仅举一个较简单的结果以作说明.

定理 3.3.5(Dunford) 设μ是Ω上的σ有限正测度,则当E具有以下性质时,定理 3.3.4 的结论成立:

(i) E有一个 Schauder 基$\{e_n: n \in \mathbb{N}\}$;

(ii) $\{e_n\}$是有界完备的,即对任何序列$\{\alpha_n\} \subset \mathbb{K}$,从$\sup\limits_n \| \sum\limits_1^n \alpha_i e_i \| < \infty$恒推出$\sum\limits_1^\infty \alpha_i e_i$收敛.

证 如定理3.3.4之证,只要对给定的$\nu \in M_\mu(\Omega,E)$求出$g = \mathrm{d}\nu/\mathrm{d}\mu$. 下面仅给出证明的一个梗概. 由条件(i)推出每个$x \in E$可表为$x = \sum f_n(x)e_n, f_n \in E^*(n \in \mathbb{N})$. 可验证

$$\|x\|^* \triangleq \sup_n \left\| \sum_{i=1}^n f_i(x)e_i \right\|, \quad x \in E$$

是E上的一个等价范数,因而有正常数C,使$\|x\|^* \leqslant C\|x\| \ (\forall x \in E)$. $\forall n \in \mathbb{N}$,有$f_n \circ \nu \in M(\Omega)$且$f_n \circ \nu \ll \mu$,于是存在$g_n = \mathrm{d}(f_n \circ \nu)/\mathrm{d}\mu \in L^1(\Omega,\mu)$. 令$G_n = \sum_1^n g_i e_i, \mathrm{d}\nu_n = G_n \mathrm{d}\mu$,则

$$\|\nu_n(A)\| \leqslant \|\nu(A)\|^* \leqslant C\|\nu(A)\| \leqslant C|\nu|(A), \quad A \in \mathscr{A}.$$

这推出$|\nu_n| \leqslant C|\nu| \ (n \in \mathbb{N})$. 易验知$\|G_n(\omega)\|^*$对$n$单调增,故

$$\begin{aligned}\int_\Omega \lim_n \|G_n(\omega)\|^* \mathrm{d}\mu &= \lim_n \int_\Omega \|G_n(\omega)\|^* \mathrm{d}\mu \leqslant \overline{\lim_n} C \int_\Omega \|G_n(\omega)\| \mathrm{d}\mu \\ &= \overline{\lim_n} C\|\nu_n\| \leqslant C^2\|\nu\| < \infty,\end{aligned}$$

这推出$\sup\limits_n \|G_n(\omega)\| < \infty$, a.e.. 于是由条件(ii)有$G_n \to g$, a.e.. 易看出$g \in L^1(\Omega,E,\mu)$, 用控制收敛定理推出

$$\nu(A) = \lim_n \int_A G_n \mathrm{d}\mu = \int_A g\mathrm{d}\mu, \quad A \in \mathscr{A}.$$

这正表明$\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}\mu = g$, 如所要证. □

由定理3.3.5直接推出空间$l^p(1 \leqslant p < \infty)$是 RNP 空间.

现在转向考虑关于向量值测度的积分. 引进此种积分并非纯出于对逻辑完美性的追求,而有其实际的需要. 对此,只要举出算子谱分解定理中的谱积分就够了.

给定 $\nu \in M(\Omega,E)$，可以用类似于定义 3.2.2 的方法定义关于 ν 的积分. 不过，下面仅考虑基于 R-N 导数的方法，此方法虽不普遍适用，但更简便易行. 设有正测度 μ，使得 $h = \mathrm{d}\nu/\mathrm{d}\mu$ 存在，则定义

$$\int_\Omega f\mathrm{d}\nu = \int_\Omega fh\mathrm{d}\mu,$$

只要右端积分存在. 这样，对于 ν 的积分被定义为对某个正测度的积分，因而可沿用前两节所建立的种种结果. 特别对于 RNP 空间 E，取 $\mu = |\nu|$ 即使以上方法可行.

定义 3.3.2　(i) 设 $\nu \in M(\Omega)$，$h = \mathrm{d}\nu/\mathrm{d}|\nu|$. 对任给 $f \in L^1(\Omega,E,|\nu|)$，令

$$\int_\Omega f\mathrm{d}\nu = \int_\Omega fh\mathrm{d}|\nu|; \tag{3.3.15}$$

(ii) 设 E 为 RNP 空间，$\nu \in M(\Omega,E)$，$h = \mathrm{d}\nu/\mathrm{d}|\nu|$，任给 $f \in L^1(\Omega,|\nu|)$，令

$$\int_\Omega f\mathrm{d}\nu = \int_\Omega fh\mathrm{d}|\nu|. \tag{3.3.16}$$

对于定义 3.3.2 中的 h，总可设 $|h| = 1$. 直接看出式(3.3.15)、式(3.3.16)右端的积分均存在. 鉴于式(3.3.15)、式(3.3.16)右端都是对正测度的积分，将 3.1 节与 3.2 节中的积分性质以适当形式推广于定义 3.3.2 中的积分，是一件自然而又平凡的工作，甚至没有必要逐一写出推广后的结论. 如果一定要举一例说明的话，不妨考虑最值得重视的控制收敛定理：

定理 3.3.6　设 E 是一个 RNP 空间，$\nu \in M(\Omega,E)$，$\{f_n\}$ 是 Ω 上的 $\mathbb{K}$ 值可测函数列. 若 $f_n \to f$，$|\nu|$-a.e.，$|f_n| \leqslant g \in L^1(\Omega,|\nu|)$ $(n \in \mathbb{N})$，则

$$\lim_n \int_\Omega f_n\mathrm{d}\nu = \int_\Omega f\mathrm{d}\nu.$$

证　设 $h = \mathrm{d}\nu/\mathrm{d}|\nu|$，$|h| = 1$，则直接看出

$$f_nh \to fh,\ |\nu|\text{-a.e.},\ |f_nh| = |f_n| \leqslant g \in L^1(\Omega,|\nu|).$$

于是由定理 3.2.3(ii) 有

$$\lim_n \int_\Omega f_n\mathrm{d}\nu = \lim_n \int_\Omega f_nh\mathrm{d}|\nu| = \int_\Omega fh\mathrm{d}|\nu| = \int_\Omega f\mathrm{d}\nu. \qquad \square$$

此外，对于 $\nu \in M(\Omega)$，$f \in L^1(\Omega,E,|\nu|)$，易直接验证不等式

$$\left\| \int_\Omega f\mathrm{d}\nu \right\| \leqslant \int_\Omega |f|\mathrm{d}|\nu|. \tag{3.3.17}$$

唯一可能成为疑问的是，如果 $\nu \in M(\Omega,E)$ 可用多种方式表为正测度，那么是否可能定义出不同的积分？在适当限定条件下，回答是否定的. 这基于以下引理：

引理 3.3.3　设 $\nu \in M(\Omega)$，$\mathrm{d}\nu = h\mathrm{d}|\nu| = \sum h_j\mathrm{d}\mu_j$，$h_j$ 是 Ω 上的有界可测函数，μ_j 是 Ω 上的正测度，$\mu_j \leqslant C|\nu|$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$，$C$ 是正常数. 则对任给 $f \in L^1(\Omega,E,|\nu|)$ 有

$$\int_\Omega fh\mathrm{d}|\nu| = \sum_j \int_\Omega fh_j\mathrm{d}\mu_j. \tag{3.3.18}$$

当 $\nu \in M(\Omega,E)$, $f \in L^1(\Omega,|\nu|)$ 时有类似结果.

证 任给 $A \in \mathscr{A}$,有

$$\int_\Omega \xi_A h\mathrm{d}|\nu| = \nu(A) = \int_A \sum_j h_j\mathrm{d}\mu_j$$

$$= \sum_j \int_\Omega \xi_A h_j\mathrm{d}\mu_j.$$

由此推出:当f是简单函数时式(3.3.18)成立. 今设$f \in L^1(\Omega,E,|\nu|)$. $\forall \varepsilon > 0$,取简单函数 φ,使得在 $L^1(\Omega,E,|\nu|)$ 中 $\|f-\varphi\|_1 < \varepsilon$. 不妨设 $|h_j| \leqslant C$, 则

$$\left\| \int_\Omega fh\mathrm{d}|\nu| - \sum_j \int_\Omega fh_j\mathrm{d}\mu_j \right\|$$

$$\leqslant \left\| \int_\Omega fh\mathrm{d}|\nu| - \int_\Omega \varphi h\mathrm{d}|\nu| \right\| + \left\| \sum_j \left[\int_\Omega \varphi h_j\mathrm{d}\mu_j - \int_\Omega fh_j\mathrm{d}\mu_j \right] \right\|$$

$$\leqslant \|f-\varphi\|_1 + C^2 m \|f-\varphi\|_1 < \varepsilon(1+C^2 m),$$

这表明式(3.3.18)成立. □

若 $\nu \in M(\Omega,\mathbb{R})$, $\nu = \nu^+ - \nu^-$ 是 Jordan 分解,则 $\nu^\pm \leqslant |\nu|$. 对任给$f \in L^1(\Omega,E,|\nu|)$,由引理 3.3.3 有

$$\int_\Omega f\mathrm{d}\nu = \int_\Omega f\mathrm{d}\nu^+ - \int_\Omega f\mathrm{d}\nu^-, \tag{3.3.19}$$

其中, 左端依(3.3.15). 若 $\nu = \nu_1 + \mathrm{i}\nu_2$, $\nu_1,\nu_2 \in M(\Omega,\mathbb{R})$,则由引理 3.3.3 有

$$\int_\Omega f\mathrm{d}\nu = \int_\Omega f\mathrm{d}\nu_1^+ - \int_\Omega f\mathrm{d}\nu_1^- + \mathrm{i}\int_\Omega f\mathrm{d}\nu_2^+ - \mathrm{i}\int_\Omega f\mathrm{d}\nu_2^-. \tag{3.3.20}$$

与式(3.3.15)不同,式(3.3.19)与式(3.3.20)中不出现那个并不确知的函数 $h = \mathrm{d}\nu/\mathrm{d}|\nu|$,似乎更具优势.

本节所采用的"向量值测度"概念不能涵盖可能取无限值的实测度(如定义 3.1.1 意义下的正测度),这是一个缺陷. 现在来填补这一缺陷.

定义 3.3.3 若集函数 $\nu: A \to [-\infty,\infty]$ 满足以下条件:

(i) $\nu(\varnothing) = 0$;

(ii) 对任一分解 $A = \cup A_i$ 有 $\nu(A) = \sum \nu(A_i)$,

则称 ν 为 Ω(或$(\Omega,\mathscr{A})$) 上的一个**广义实测度**.

广义实测度也称为符号测度,它显然涵盖了正测度与有限实测度.

以下设 ν 是 Ω 上一给定的广义实测度. 除了 ν 可能取值 $\pm\infty$ 之外,ν 与有限实测度满足同样的条件,因而必可沿用关于有限实测度的各种概念与结论,只要它们不与 ν 的无限性发生抵触. 凡属可顺利过渡到广义实测度的内容,都略而不提,只是强调对于广义实测度应作的修正.

首先指出，ν 至多取到 $\pm\infty$ 之一. 若 $\nu(A)=\infty,\nu(B)=-\infty$，则从

$$\nu(A\cap B)+\nu(A\backslash B)=\infty,\quad \nu(A\cap B)+\nu(B\backslash A)=-\infty$$

推出 $\nu(A\backslash B)=\infty,\nu(B\backslash A)=-\infty$，而这使 $\nu(A\Delta B)$ 无定义. 其次，若 $A,B\in\mathscr{A},A\supset B$，则由 $\nu(A)=\nu(B)+\nu(A\backslash B)$ 推出当 $\nu(A)$ 有限时 $\nu(B)$ 必有限，因而 ν 在 A 上的限制是一有限实测度. 特别地，ν 是有限实测度 $\Leftrightarrow \nu(\Omega)$ 有限. 仍可用式(3.3.1)定义 ν 的变差 $|\nu|$，只是将式(3.3.1)中出现的 $\|\nu(A_i)\|$ 换成 $|\nu(A_i)|$. 任给 $A\in\mathscr{A}$，$|\nu|(A)<\infty\Leftrightarrow\nu(A)$ 有限，$|\nu|$ 是有限正测度 $\Leftrightarrow\nu(\Omega)$ 有限.

如同对有限实测度一样，关于广义实测度的最重要的问题是其 Jordan 分解与 Lebesgue 分解. 首先考虑 Jordan 分解，为此需定义 ν 的正负变差 $\nu^{\pm}$. 若 $|\nu|(A)=\infty$，则 $|\nu(A)|=\infty$，因而不能再用式(3.3.3)来定义 $\nu^{\pm}(A)$. 下面考虑定义 $\nu^{\pm}$ 的新途径，这依赖于所谓 Hahn 分解. 设 $A\in\mathscr{A}$. 若 ν 限制在 A 上为正测度，则称 A 为 ν 的**正集**；若 A 是 $-\nu$ 的正集，则称 A 为 ν 的**负集**. 若有分解 $\Omega=P\cup N$，其中，P 与 N 分别为 ν 的正集与负集，则称它为 ν 的 **Hahn 分解**.

定理 3.3.7　关于广义实测度 ν 必存在 Hahn 分解. 若 $\Omega=P_i\cup N_i(i=1,2)$ 是 ν 的两个 Hahn 分解，则对任给 $A\in\mathscr{A}$ 有

$$\nu(A\cap P_1)=\nu(A\cap P_2),\quad \nu(A\cap N_1)=\nu(A\cap N_2).\qquad(3.3.21)$$

证　(i) 构成分解 $\Omega=P\cup N$. 不妨设 $-\infty\leqslant\nu<\infty$. 令

$$\beta=\sup\{\nu(A):A\text{ 是 }\nu\text{ 的正集}\}.$$

取一列正集 $\{P_n\}$，使 $\nu(P_n)\to\beta$，可设 $\{P_n\}$ 为升列 $\left(\text{否则以 }\bigcup_1^n P_i\text{ 取代 }P_n\right)$，令 $P=\bigcup_1^\infty P_n$，则 $\nu(P)=\beta<\infty$，P 是 ν 的正集. 令 $N=P^c$，则 $\Omega=P\cup N$ 是一分解.

(ii) 证 N 是 ν 的负集，这是难点. 用反证法. 设有 $A\subset N$，使 $\nu(A)>0$，因 A 非正集(否则 $P\cup A$ 是正集，但 $\nu(P\cup A)>\beta$!)，故有最小的 $n_1\in\mathbb{N}$，使得有 $A_1\subset A$，$\nu(A_1)<-1/n_1$. 又 $\nu(A\backslash A_1)=\nu(A)-\nu(A_1)>0$. 同理，有最小的 $n_2\in\mathbb{N}$，使得有 $A_2\subset A\backslash A_1,\nu(A_2)<-1/n_2$. 一般地，有最小的 $n_k\in\mathbb{N}$，使得有 $A_k\subset A\backslash\bigcup_{i<k}A_i$，$\nu(A_k)<-1/n_k(k>1)$. 令 $A_0=\bigcup_1^\infty A_k$，则

$$\nu(A\backslash A_0)>\nu(A)+\sum_k n_k^{-1}>0.$$

因 $\nu(A)$ 有限，故 $\sum n_k^{-1}<\infty,n_k\to\infty$. $A\backslash A_0$ 亦不能为正集，故有 $D\subset A\backslash A_0$ 使 $\nu(D)<0$. 取 k 充分大使 $n_k>2,\nu(D)<-1/n_k$，则 $D\cup A_k\subset A\backslash\bigcup_{i<k}A_i$，

$$\nu(D\cup A_k)=\nu(D)+\nu(A_k)<-(n_k-1)^{-1},$$

这与 n_k 的选择相矛盾.

(iii) 证式(3.3.21). 任给 $A\in\mathscr{A}$，有

$$\nu(A\cap P_1)=\nu(A\cap P_1\cap P_2)+\nu(A\cap P_1\cap N_2)$$

$$= \nu(A \cap P_1 \cap P_2) = \nu(A \cap P_2),$$

其中，用到 $P_1 \cap N_2$ 是 ν 的零集. 同理，可证 $\nu(A \cap N_1) = \nu(A \cap N_2)$. □

设 $\Omega = P \cup N$ 是 ν 的 Hahn 分解. 定义

$$\nu^+(A) = \nu(A \cap P), \quad \nu^-(A) = -\nu(A \cap N), \quad A \in \mathscr{A}. \qquad (3.3.22)$$

由式(3.3.21)，$\nu^\pm$ 的定义与 Hahn 分解的选择无关. 直接看出 ν^+ 与 ν^- 均为正测度且 $\nu = \nu^+ - \nu^-$，这就是 ν 的 Jordan 分解(对照式(3.3.4)). 令 $\lambda = \nu^+ + \nu^-$. 直接看出 $|\nu(A)| \leqslant \lambda(A)(A \in \mathscr{A})$，因而 $|\nu| \leqslant \lambda$(注意引理 3.3.1 仍可用). 其次有

$$\lambda(A) = |\nu(A \cap P)| + |\nu(A \cap N)|$$
$$\leqslant |\nu|(A \cap P) + |\nu|(A \cap N) = |\nu|(A),$$

其中，$A \in \mathscr{A}$，这推出 $\lambda \leqslant |\nu|$，因而 $\lambda = |\nu|$，即 $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$. 可见式(3.3.4)仍然成立. 若 $|\nu| < \infty$，则由式(3.3.4) 解出 $\nu^\pm = 2^{-1}(|\nu| \pm \nu)$，这恰与式(3.3.3)一致. 因此，由式(3.3.22) 引出的 Jordan 分解涵盖了有限实测度的 Jordan 分解.

设 μ 是 Ω 上的正测度，f 是 Ω 上的实可测函数，$\int_\Omega f d\mu$ 有定义，则

$$\nu(A) = \int_A f d\mu, \quad A \in \mathscr{A} \qquad (3.3.23)$$

是 Ω 上的广义实测度. 令 $P = \{f \geqslant 0\}$，$N = P^c$，则 $\Omega = P \cup N$ 是 ν 的一个 Hahn 分解. 结合式(3.3.22)与式(3.3.23)易验证

$$\nu^+(A) = \int_A f^+ d\mu, \quad \nu^-(A) = \int_A f^- d\mu,$$

$$|\nu|(A) = \int_A |f| d\mu, \quad A \in \mathscr{A}.$$

最后一式恰与式(3.3.10)一致，但此处并不排除 $|\nu|(A) = \infty$. 当 ν 由式(3.3.23) 定义时写作 $d\nu = f d\mu$，也称 $f = d\nu / d\mu$ 为 ν 对 μ 的 R-N 导数.

现在考虑 Lebesgue 分解，有了定理 3.3.3 之后，这件事已不很困难了. 首先指出，前面定义的关系 $\mu \perp \nu$ 与 $\nu \ll \mu$ 亦可用于广义实测度. 当 $d\nu = f d\mu$ 时必 $\nu \ll \mu$；$\nu \ll \mu \Leftrightarrow |\nu| \ll \mu \Leftrightarrow \nu^\pm \ll \mu$. 若 $|\nu|$ 是 σ 有限测度，则说 ν 是 σ 有限的.

定理 3.3.8 设 ν 是 Ω 上的 σ 有限广义实测度，μ 是 Ω 上的 σ 有限正测度，则存在唯一分解 $\nu = \nu_a + \nu_s$(ν 的 Lebesgue 分解)，ν_a 与 ν_s 都是 Ω 上的 σ 有限广义实测度，$\mu \perp \nu_s$，$d\nu_a = f d\mu$，f 是 Ω 上的实可测函数.

证 唯一性的证法与定理 3.3.3 一样，只需考虑分解的存在性. 因有 Jordan 分解可用，不妨设 ν 是 σ 有限正测度. 取分解 $\Omega = \cup A_n$，使 $\nu(A_n) < \infty (n \in \mathbb{N})$. 在每个 A_n 上应用定理 3.3.3 得出

$$\nu | A_n = f_n d\mu + \nu_{sn}, \quad (\mu | A_n) \perp \nu_{sn}, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad (3.3.24)$$

其中，$0 \leqslant f_n \in L^1(A_n, \mu)$，$\nu_{sn}$ 是 A_n 上的有限正测度. 约定 $f_n | A_n^c = 0$，A_n^c 为 ν_{sn} 的零集，则可以认为 $f_n \in L^1(\Omega, \mu)$，ν_{sn} 是 Ω 上的有限正测度. 令 $f = \sum_n f_n$，$d\nu_a = f d\mu$，$\nu_s =$

$\sum_n \nu_{sn}$，则 ν_a 与 ν_s 均为 Ω 上 σ 有限正测度. 利用式(3.3.24)，容易验证 $\nu = \nu_a + \nu_s$，$\mu \perp \nu_s$，$\nu_a + \nu_s$ 就是所要的 Lebesgue 分解. □

如同定理3.3.3一样，由定理3.3.8直接推出：若 ν 是 Ω 上的 σ 有限广义实测度，μ 是 Ω 上 σ 有限正测度，$\nu \ll \mu$，则必 $\mathrm{d}\nu = f\mathrm{d}\mu$. 特别 $\mathrm{d}\nu = h\mathrm{d}|\nu|$ 且不难由定理3.3.8(ii)推出 $|h| = 1$，$|\nu|$-a.e..

任给 $f \in L^1(\Omega, E, |\nu|)$，仍可用式(3.3.19)来定义积分 $\int_\Omega f\mathrm{d}\nu$；若 ν 是 σ 有限的，则式(3.3.19)仍与式(3.3.15)一致. 这些都不必详述.

3.4　LCH 上的测度与积分

在前两节中，积分的两个要素——被积函数与测度，均已被推广到无限维向量值的情形. 沿以上两个方向继续前行，已经难有作为. 强有力的推动应当来自新的结构的加入，这就是测度与之关联的拓扑结构. 本节中要考虑 LCH 上的正则测度. 这种测度由于受制于空间的拓扑结构而具有较一般测度更良好的性质，因而关于它的积分能达到更深入的结论. 关键的事实是在 LCH 上，函数的连续性与对正则测度的积分之间存在某种关联，而就一般测度空间上的积分论而言，连续性是完全不予考虑的.

本节中设 (Ω, τ) 是给定的 LCH，即局部紧的 Hausdorff 空间，以 $\mathscr{B}$ 记 Ω 中的 Borel 集族. 在3.1节中已将 Borel 测度界定为定义于 $\mathscr{B}$ 上且使紧集有有限测度的正测度. 最有价值的是那些具有一定"正则性质"的 Borel 测度，正则性定义如下：

定义3.4.1　设 μ 是 Ω 上的一个 Borel 测度. 若 μ 满足以下条件：

(R_1) μ 在每个 Borel 集 A 上是**外正测**的，这意味着

$$\mu A = \inf\{\mu V: A \subset V \in \tau\}; \tag{3.4.1}$$

(R_2) μ 在每个开集 A 上是**内正则**的，这意味着

$$\mu A = \sup\{\mu K: K \subset A, K \text{ 是紧集}\}, \tag{3.4.2}$$

则称 μ 为**正则测度**①.

若 ν 是 $(\Omega, \mathscr{B})$ 上的 E 值测度或广义实测度，$|\nu|$ 是正则的，则说 ν 是正则的.

简单地说，正则性是一种逼近性质. Borel 集的测度可用开集的测度"从外面"逼近；开集的测度可用紧集的测度"从内部"逼近. 如从经典实分析中所熟知的，Lebesgue 测度就具有这些逼近性质. 不妨说，正则测度正是一种接近于 Lebesgue 测度的测度，自然可以指望，关于正则测度的积分论将更接近于 Lebesgue 积分论.

---

① 对于正则测度有多种互有差异的定义. 例如，Folland(1984)将此处所定义的正则测度称为 Radon 测度，而将正则测度定义为在 Borel 集上同时外正则与内正则的 Borel 测度.

由条件(R_1)(R_2)(依定义 3.4.1,下同)所刻画的性质还可以进一步细化,有关的结论汇集于下:

命题 3.4.1 设μ是Ω上的正则测度,$A \in \mathscr{B}$,A(关于μ)有σ有限测度,则以下结论成立:

(i) $\forall \varepsilon > 0$,存在A的开邻域V,使得$\mu(V\backslash A) < \varepsilon$;

(ii) μ在A上是内正则的(依条件(3.4.2));

(iii) 设μ是σ有限测度,$\varepsilon > 0$. 则存在开集G与闭集F,使得$F \subset A \subset G$且$\mu(G\backslash F) < \varepsilon$. 存在$F_\sigma$集$F_0$与$G_\delta$集$G_0$,使得$F_0 \subset A \subset G_0$且$\mu(G_0\backslash F_0) = 0$.

证 (i) 设$A = \bigcup\limits_1^\infty A_n$, $\mu A_n < \infty\ (n \in \mathbb{N})$. 由条件($R_1$)有开集$V_n \supset A_n$,使得$\mu(V_n\backslash A_n) < \varepsilon 2^{-n}\ (n \in \mathbb{N})$. 于是$A \subset V \triangleq \bigcup\limits_1^\infty V_n$,

$$\mu(V\backslash A) \leqslant \sum_n \mu(V_n\backslash A_n) < \varepsilon.$$

(ii) 可设$\mu A < \infty$. $\forall \varepsilon > 0$,取开集$U \supset A$,使得$\mu(U\backslash A) < \varepsilon$. 然后取开集$V \supset U\backslash A$,使得$\mu V < \varepsilon$. 由条件($R_2$),有紧集$K \subset U$,使得$\mu(U\backslash K) < \varepsilon$. 令$B = K\backslash V$,则$B$是紧集,$B \subset A$,

$$\begin{aligned}\mu B = \mu(K\backslash(K \cap V)) &\geqslant \mu K - \mu V \\ &> \mu U - \mu(U\backslash K) - \varepsilon \geqslant \mu A - 2\varepsilon,\end{aligned}$$

这表明μ在A上是内正则的.

(iii) 分别对A与A^c用已证的结论(i),得出开集G与V,使得$A \subset G$,$A^c \subset V$,$\mu(G\backslash A) \vee \mu(V\backslash A^c) < \varepsilon/2$. 令$F = V^c$,则$F$是闭集,$F \subset A$,

$$\mu(G\backslash F) = \mu(G\backslash A) + \mu(A\backslash F) < \varepsilon.$$

最后的结论是明显的. □

所证结论表明,σ有限正则测度在 Borel 集上同时是外正则的与内正则的;有限 Borel 测度μ是正则测度的充要条件是:任给$A \in \mathscr{B}$,$\varepsilon > 0$,存在紧集K与开集V,使得$\mu(V\backslash K) < \varepsilon$. 若$\mu$已完备化为某个$\sigma$代数$\mathscr{A}$上的测度,则命题 3.4.1 的结论亦适用于$A \in \mathscr{A}$.

看几个正则测度的简单例子.

例 3.4.1 (i) 设Ω是一个离散拓扑空间(这意味着Ω的任何子集是开集,这样的Ω显然为 LCH),μ是Ω上的计数测度,则直接看出μ是正则测度.

(ii) 设Ω是任给 LCH,$a \in \Omega$,δ_a是a处的 Dirac 测度(由例 3.1.1(ii)). 任给$A \subset \Omega$. 若$a \in A$,则δ_a在A上显然是外正则的. 若$a \notin A$,则$\forall x \in A$,存在x的开邻域V_x,使得$a \notin V_x$. 令$V = \bigcup\limits_{x \in A} V_x$,则$V$是开集,$A \subset V$,$a \notin V$,从而$\delta_a(V) = \delta_a(A) = 0$. 这表明$\delta_a$在$A$上也是外正则的. 其次设$A \subset \Omega$是一开集. 若$a \notin A$,则对任何紧集$K \subset A$,有$a \notin K$;若$a \in A$,则必有$a$的紧邻域$K$使$K \subset A$(由命题 1.3.1(i)),因

而 $\delta_a(K) = \delta_a(A) = 1$. 这表明 δ_a 在 A 上是内正则的. 因此, δ_a 是 Ω 上的正则测度.

(iii) 设 Ω 是 LCH, μ 是 Ω 上的正则测度, A 是 Ω 的开子空间, 则 A 亦为 LCH 易. 验证 μ 在 A 上的限制亦是正则测度.

如果 Ω 是第二可数的 LCH, 则正则性条件 (R_1) 与 (R_2) 的验证是平凡的.

定理 3.4.1 设 (Ω,τ) 是第二可数的 LCH, μ 是 Ω 上的 Borel 测度, 则 μ 是 σ 有限的正则测度, 对于它命题 3.4.1 的结论均成立.

证 因 Ω 是 σ 紧的(由定理 1.3.7), 故 μ 是 σ 有限的. 将定理 1.3.7 用于 Ω 中任一非空开集 (它亦为第二可数的 LCH) 得出条件 (R_2) 满足. 难点在于验证条件 (R_1), 下面分两种情况考虑.

(i) 设 $\mu\Omega < \infty$. 令 $\mathscr{A}$ 由如下的 Borel 集 A 组成:

$$\mu A = \inf\{\mu V: A \subset V \in \tau\} = \sup\{\mu F: A^c \subset F^c \in \tau\}.$$

显然 $\tau \subset \mathscr{A}$, 故只要证 $\mathscr{A}$ 为 σ 代数(如此则 $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$, 从而条件 (R_1) 满足). 易见 $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}$. 其次假设 $A = \bigcup A_n, A_n \in \mathscr{A} (n \in \mathbb{N})$. $\forall \varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$, 取开集 V_n 与闭集 F_n, 使得 $F_n \subset A_n \subset V_n, \mu(V_n \setminus F_n) < \varepsilon 2^{-n}$, 则

$$B_n \triangleq \bigcup_{i=1}^{n} F_i \subset A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i \triangleq V,$$

$$\mu(V \setminus B_n) < \varepsilon + \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \Big\backslash \bigcup_{i=1}^{n} F_i\right),$$

由此看出 $A \in \mathscr{A}$, $\mathscr{A}$ 是 σ 代数, 如所要证.

(ii) 设 $\mu\Omega = \infty$. 可设 $\Omega = \bigcup_1^\infty U_n$, U_n 是相对紧开集 (由命题 1.3.1(ii)). μ 在 U_n 上的限制是正则的(由例 3.4.1(iii)). 设 $A \subset \Omega$ 是 Borel 集, $\varepsilon > 0$, 则有开集 V_n, 使得 $A \cap U_n \subset V_n \subset U_n, \mu(V_n \setminus A) < \varepsilon 2^{-n} (n \in \mathbb{N})$. 于是 $A \subset V \triangleq \bigcup_1^\infty V_n$,

$$\mu(V \setminus A) \leqslant \sum_n \mu(V_n \setminus A) < \varepsilon,$$

这表明条件 (R_1) 满足. □

由定理 3.4.1 特别推出, $\mathbb{R}^n$ 及其任何非空开(或闭)子集上的 Borel 测度(如 Lebesgue 测度)是 σ 有限正则测度.

现在转向 Ω 上的 Borel 可测函数及其积分问题. 回忆一下在 3.1 节中已提到, $(\Omega, \mathscr{B})$ 上的可测函数称为 Borel 可测函数, $\mathscr{B}$ 是 Ω 中的 Borel 集族. 如已指出的, Ω 上的连续函数必为 Borel 可测函数. 一个自然的问题是: Borel 可测函数与连续函数的差距究竟有多大? 如下著名的 **Lusin 定理**回答了这一问题:

定理 3.4.2 设 μ 是 Ω 上的正则测度, f 是 Ω 上的 $\mathbb{K}$ 值 Borel 可测函数, $\mu\{f \neq 0\} < \infty$, 则以下结论成立:

(i) $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $g \in C_c(\Omega)$, 使得 $\mu\{f \neq g\} < \varepsilon$ 且 $\|g\|_0 \leqslant \|f\|_0$;

(ii) 存在序列 $\{g_n\} \subset C_c(\Omega)$，使得 $g_n \to f$, a. e. $(n \to \infty)$ 且 $\|g_n\|_0 \leqslant \|f\|_0 (n \in \mathbb{N})$.

证[①] (i) 不妨只考虑 f 为实函数的情形(否则分别考虑 f 的实部与虚部). 设已有 $g \in C_c(\Omega)$，使得 $\mu\{f \neq g\} < \varepsilon$，今将 g 改造为 $h \in C_c(\Omega)$，使得仍有 $\mu\{f \neq h\} < \varepsilon$ 且 $\|h\|_0 \leqslant \|f\|_0$. 可设 $\|f\|_0 < \infty$，令

$$\varphi(r) = (r \wedge \|f\|_0) \vee (-\|f\|_0), \quad r \in \mathbb{R},$$

则 $\varphi \in C(\mathbb{R})$，$|\varphi(r)| \leqslant \|f\|_0$，当 $|r| \leqslant \|f\|_0$ 时 $\varphi(r) = r$. 令 $h = \varphi \circ g$，则 $h \in C_c(\Omega)$，$\|h\|_0 \leqslant \|f\|_0$. 当 $g(x) = f(x)$ 时 $h(x) = f(x)$，因此

$$\mu\{f \neq h\} \leqslant \mu\{f \neq g\} < \varepsilon.$$

现在证满足 $\mu\{f \neq g\} < \varepsilon$ 的 $g \in C_c(\Omega)$ 存在. 令 $A = \{f \neq 0\}$. 因 μ 在 A 上是内正则的(由命题3.4.1(ii))，不妨设 A 是紧集. 又因 $\mu\{|f| > n\} \to 0 (n \to \infty)$，故可设 f 有界，进而不妨设 $0 \leqslant f < 1$(否则用一变量代换). 设 $\{f_n\}$ 是定理3.1.2之证中所构成的简单函数序列，令 $e_n = \{f_n > f_{n-1}\}$ $(n \in \mathbb{N}$，约定 $f_0 = 0)$，则 $f = \sum_1^\infty 2^{-n} \xi_{e_n}$. 取相对紧开集 $V \supset A$. 由正则性，有紧集 K_n 与开集 V_n，使得

$$K_n \subset e_n \subset V_n \subset V, \quad \mu(V_n \backslash K_n) < \varepsilon 2^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

取 $g_n \in C(\Omega)$，使得 $K_n \prec g_n \prec V_n (n \in \mathbb{N})$. 令 $g = \sum_1^\infty 2^{-n} g_n$，则 $g \in C(\Omega)$，直接看出 $\operatorname{supp} g \subset \overline{V}$，因而 $g \in C_c(\Omega)$，

$$\begin{aligned} \mu\{f \neq g\} &\leqslant \sum_n \mu\{g_n \neq \xi_{e_n}\} \\ &\leqslant \sum_n \mu(V_n \backslash K_n) < \varepsilon. \end{aligned}$$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$，取 $g_n \in C_c(\Omega)$，使得 $\mu\{f \neq g_n\} < 2^{-n}$ 且 $\|g_n\|_0 \leqslant \|f\|_0$. 令 $A = \overline{\lim}\{f \neq g_n\}$，则 $\mu A = 0$，易验证在 A^c 上 $g_n(x) \to f(x) (n \to \infty)$. □

现在考虑关于正则测度的积分. 对于 3.1 节中所述的一般测度空间上的积分论，我们曾指出可积性与连续性无关是一个很大的优势，这使得积分的应用范围显著扩大. 另一方面，处理连续函数毕竟有特殊的方便，这就促使我们设想，连续函数关于正则测度的积分有其特殊价值. 下面将引述的基本结果表明，正则测度本身也完全由连续函数的某种积分决定. 设 μ 是 Ω 上的一个正则测度. 任给 $f \in C_c(\Omega)$，f 显然关于 μ 可积，这就可定义如下线性泛函:

---

① 这个别具一格的证明依据文献(Feldman, 1981).

$$L_\mu(f) = \int_\Omega f \mathrm{d}\mu, \quad f \in C_c(\Omega). \tag{3.4.3}$$

若$f \geqslant 0$,则$L_\mu(f) \geqslant 0$. 有后一性质的线性泛函称为**正线性泛函**. 一个深刻得多的事实是以上结论的逆成立,这就是如下著名的 **Riesz 表示定理**[①]：

定理 3.4.3　设L是$C_c(\Omega)$上的正线性泛函,则Ω上存在唯一正则测度μ,使得$L = L_\mu$,L_μ依式(3.4.3). μ是有限测度$\Leftrightarrow L$有界, 且当L有界时$\mu\Omega = \|L\|$.

以上结论意味着(3.4.3)是$C_c(\Omega)$上的正线性泛函的通式,即$C_c(\Omega)$上的每个正线性泛函可表为对某个正则测度的积分."表示定理"一词,盖出于此.

定理 3.4.3 的证明较长,可参见文献(Rudin, 1987). 基本思想是:设μ是满足定理要求的正则测度,则对任何紧集K与开集$V \supset K$,$K < f < V$,有

$$\mu K \leqslant L(f) = \int_\Omega f \mathrm{d}\mu \leqslant \mu V.$$

利用定理 1.3.6 及μ的正则性得出

$$\mu V = \sup\{L(f) : f \in C_c(\Omega), f < V\}, \tag{3.4.4}$$

$$\mu K = \inf\{L(f) : f \in C_c(\Omega), K < f\}. \tag{3.4.5}$$

这在一方面得出了μ的唯一性,另一方面提示了μ的构成. 以$\mu^* V$记式(3.4.4)右端,然后令

$$\mu^* A = \inf\{\mu^* V : A \subset V \in \tau\}, \quad A \subset \Omega,$$

则问题归于验证$\mu = \mu^* \mid \mathscr{B}$满足定理要求. 这件事颇具技术性因而有些繁冗,你未必对其感兴趣. 涉及有界性的结论倒是很简单的,你不妨自己给出其证明.

Riesz 表示定理是近代分析学中最有价值的成果之一,它为在 LCH 中建立积分论提供了一个强有力的一般方法. 就 LCH 上的积分而言,定理 3.4.3 提供了一个全新的观点:本质上,积分不过是一定函数空间上的线性泛函而已. 至于这个线性泛函最初以什么形式给出,则只是一个表现形式问题,具有广泛选择的可能性,包括一些初看起来似乎很难认同为积分的形式. 但不论最初的表述形式如何,都可以归结到一个共同的表达形式,即关于某个正则测度的积分.

上述关于积分的新观点在方法上带来了革命性的改变. 让我们对照一下引入积分的两条看来互相对立的途径:

(A) 在Ω上直接构成某个正则测度μ, 然后循 3.1 节与 3.2 节的方法展开关于测度μ的积分论. 这是一条更传统的路线,比较合于常规的思路,它的起点是测度μ的构成. 问题在于这种构成往往不易(试回想一下 Lebesgue 测度的构成),以至成为建立积分论的难以逾越的门槛.

(B) 首先在Ω中的"好函数"空间$C_c(\Omega)$上构成某个正线性泛函L, 然后由

---

① 实际上,F. Riesz 只是考虑了$X = [a,b]$的情况且仅用到 RS 积分而不涉及测度. 更一般的结果由 Kakutani 与 Bourbaki 于 20 世纪 40 年代初得到.

Riesz 表示定理断定存在一个正则测度 μ，使得所构成的正线性泛函实际上就是关于 μ 的积分. 这就是现在要特别提倡的新路线，它的起点是正线性泛函 L 的构成，不能说这件事一定很容易，但在方法上可能具有更多样化的选择，尤其是可能利用一些已知的积分工具（如 Riemann 积分）.

以上两种方法的结果是一样的：一个正则测度 μ 及关于 μ 的积分论. 但方法（B）避开了测度 μ 的直接构成——这件事已由 Riesz 表示定理一劳永逸地完成了，不必再去重复它. 这就为在 LCH 上引入测度与积分提供了一个更简捷与更经济的方法，其价值实难估量. Riesz 表示定理的表述并未提到测度 μ 的实际构成，因而使这个仅仅被告知其存在的 μ 缺少直观性，或许是方法（B）的缺憾. 但这对于应用来说很少构成障碍. 需知，即使那些来自某个具体构造程序的测度——Lebesgue 测度可作为典型例子——实际运用过程中也是很少联系到它的具体构成的.

下面看几个应用 Riesz 表示定理的简单例子.

例 3.4.2 （i）设 Ω 是一个离散拓扑空间. 显然 Ω 上的任何 $\mathbb{K}$ 值函数均连续，Ω 上的紧集即有限集，因此 $C_c(\Omega) = \{f \in \mathbb{K}^{\Omega}: \{f \neq 0\}$ 是有限集$\}$. 定义

$$L(f) = \sum_{x \in \Omega} f(x), \quad f \in C_c(\Omega),$$

则 L 显然是 $C_c(\Omega)$ 上的正线性泛函. 由定理 3.4.3，L 唯一决定 Ω 上一正则测度 μ. 不消说，μ 正是 Ω 上的计数测度.

（ii）设 Ω 是任一 LCH，取定 $a \in \Omega$. 定义

$$L(f) = f(a), \quad f \in C_c(\Omega),$$

L 显然是 $C_c(\Omega)$ 上的正线性泛函. 于是 L 唯一决定 Ω 上一正则测度 μ，使得

$$\int_{\Omega} f \mathrm{d}\mu = f(a), \quad f \in C_c(\Omega).$$

这个 μ 就是熟知的 Dirac 测度 δ_a.

（iii）设 ν 是 Ω 上给定的 Borel 测度，f 是 Ω 上的非负 Borel 可测函数，任给紧集 $K \subset \Omega$，$\int_K f \mathrm{d}\nu < \infty$. 定义

$$L(\varphi) = \int_{\Omega} \varphi f \mathrm{d}\nu, \quad \varphi \in C_c(\Omega),$$

则 L 是 $C_c(\Omega)$ 上的正线性泛函. 设 μ 是由 L 决定的正则测度，则

$$\int_{\Omega} \varphi f \mathrm{d}\nu = \int_{\Omega} \varphi \mathrm{d}\mu, \quad \varphi \in C_c(\Omega),$$

自然就记 $\mathrm{d}\mu = f \mathrm{d}\nu$.

（iv）设 Γ 是 $\mathbb{R}^3$ 中一紧光滑曲面，定义

$$L(f) = \iint_{\Gamma} f \mathrm{d}S, \quad f \in C(\Gamma),$$

其中，$\mathrm{d}S$ 是曲面 Γ 的面积元. L 是 $C(\Gamma)$ 上的正线性泛函，于是有 Γ 上的正则测度

μ,使得

$$\iint_{\Gamma} f\mathrm{d}S = \int_{\Gamma} f\mathrm{d}\mu,\quad f \in C(\Gamma).$$

可见,通常的曲面积分无非是对测度μ的积分. 上述的μ就称为Γ上的 Lebesgue 测度,$\mu\,\Gamma$正是Γ的面积.

以上例子固然有趣,但远不足以表现 Riesz 定理的强大力量. Riesz 表示定理的价值主要体现于那些难以直接描述的测度的引入. 本书中将有多次机会接触到这类问题,下面就是一个例子.

设Ω与Γ是两个 LCH,μ与ν分别为Ω与Γ上的正则测度. 因μ,ν未必是σ有限的,故不能由定理 3.1.5 说到积测度$\mu\times\nu$. 另一方面,易见$\Omega\times\Gamma$亦为 LCH,定义

$$L(f) = \int_{\Omega}\mathrm{d}\mu(x)\int_{\Gamma} f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y),\quad f \in C_c(\Omega\times\Gamma)$$

不成问题且L是$C_c(\Omega\times\Gamma)$上的正线性泛函. 于是由 Riesz 表示定理有$\Omega\times\Gamma$上的正则测度η,使得

$$\int_{\Omega\times\Gamma} f\mathrm{d}\eta = \int_{\Omega}\mathrm{d}\mu(x)\int_{\Gamma} f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y),\quad f \in C_c(\Omega\times\Gamma). \tag{3.4.6}$$

上述的η称为μ与ν的正则 Borel 积,记作$\mu\otimes\nu$. 若Ω与Γ均为第二可数的 LCH,则$\Omega\times\Gamma$亦为第二可数的 LCH,因而积测度$\mu\times\nu$(由定理 3.1.5)是$\Omega\times\Gamma$上的正则测度(用定理 3.4.1). 结合 Fubini 定理与式(3.4.6)有

$$\int_{\Omega\times\Gamma} f\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \int_{\Omega\times\Gamma} f\mathrm{d}(\mu\times\nu),\quad f \in C_c(\Omega\times\Gamma).$$

于是由定理 3.4.3 中的唯一性结论得出$\mu\times\nu = \mu\otimes\nu$.

在一般情况下,关于测度$\mu\otimes\nu$有如下 Fubini 定理:

定理 3.4.4　设Ω与Γ是两个 LCH,μ与ν分别为Ω与Γ上的正则测度,$\mu\otimes\nu$是它们的正则 Borel 积. $f \in L^1(\Omega\times\Gamma,\mu\otimes\nu)$,$\{f\neq 0\}\subset A\times B$,$A$与$B$分别对$\mu$与$\nu$是$\sigma$有限的,则成立

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times\Gamma} f\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) &= \int_{\Omega}\mathrm{d}\mu(x)\int_{\Gamma} f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\\ &= \int_{\Gamma}\mathrm{d}\nu(y)\int_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

关于定理 3.4.4 可参见文献(Folland, 1984).

最后讨论一下$\nu \in M(\Omega)$的正则性. 首先,结合定义 3.4.1 与命题 3.4.1 容易得出如下正则性条件:

命题 3.4.2　设μ是Ω上的σ有限 Borel 测度,则μ是正则的$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$,$\forall A \in \mathscr{B}$,当$\mu A < \infty$时存在开集$V$与紧集$K$,使得$K\subset A\subset V$且$\mu(V\backslash K) < \varepsilon$. 因此,若$\mu,\nu$是$\Omega$上的$\sigma$有限 Borel 测度,$\nu\leqslant\mu$,$\mu$是正则的,则$\nu$亦是正则的.

现在设ν是$(\Omega,\mathscr{B})$上的广义实测度,则由 Jordan 分解有

$$\nu^+ \vee \nu^- \leqslant |\nu| = \nu^+ + \nu^-. \tag{3.4.7}$$

若 $\nu = u + \mathrm{i}v$ 是$(\Omega,\mathscr{B})$ 上的复测度,则易推出

$$|u| \vee |v| \leqslant |\nu| \leqslant |u| + |v|. \tag{3.4.8}$$

于是结合命题3.4.2与不等式(3.4.7),式(3.4.8)得到

推论3.4.1 若ν是$(\Omega,\mathscr{B})$ 上的σ有限广义实测度,则ν是正则的 $\Leftrightarrow \nu^+$ 与ν^-是正则的. 若ν是$(\Omega,\mathscr{B})$ 上的复测度,则ν是正则的 $\Leftrightarrow$ Re ν 与 Im ν 是正则的. 若ν是$(\Omega,\mathscr{B})$ 上的正则复测度,则ν完全决定于ν在开集上的值.

证 只要证最后一个结论. 为此又只要证:若ν是$(\Omega,\mathscr{B})$ 上的正则复测度,任给开集 $V \subset \Omega$,有$\nu(V) = 0$,则$\nu = 0$. 不妨设ν是实测度,$\Omega = P \cup N$是其Hahn分解. 任给紧集$K \subset \Omega$,有$\nu(K) = \nu(\Omega) - \nu(K^c) = 0$. 因$\nu^+$是正则的,由命题3.4.1(ii)有

$$\nu^+(P) = \sup\{\nu(K) : K \subset P \text{ 是紧集}\} = 0.$$

同理,$\nu^-(N) = 0$. 于是$|\nu|(\Omega) = \nu^+(P) + \nu^-(N) = 0$,从而$\nu = 0$. □

最后,对正则测度及相关记号约定作点说明. 在LCH上,原则上并不排除使用正则测度以外的测度. 但毫无疑问,唯有正则测度能自然地体现空间拓扑结构的影响. 因此,凡同时涉及空间拓扑结构与测度的问题,使用正则测度必定是常见的选择. 鉴于此,今后说到LCH上的正测度与向量值测度时,不妨无例外地概指正则测度. 与此相应,当Ω为LCH时,约定$M(\Omega,E)$ 表示Ω上的有界正则E值测度的全体. 在这种理解下,$M(\Omega,E)$ 仍然是一个Banach空间,与$M(\Omega,E)$ 有关的命题3.3.2,定理3.3.2 ~ 定理3.3.4仍成立,只要其中用到的μ也是正则测度. 若Ω是第二可数的LCH,则正则性可不予考虑.

3.5 空 间 L^p

在第2章中我们看到,微分学导致考虑可微函数的空间 $\mathscr{E}^r$. 与此相呼应,积分学导致考虑一定的可积函数空间,主要是L^p,后者在分析中有同样重要(或许更大)的应用价值. 实际上,我们已多次接触到空间L^1与L^2了. 对于更一般的空间L^p,现在正是作系统考察的适当时机.

以下设$(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ 是给定的完备测度空间. 若Ω是LCH,则总以$\mathscr{B}$记Ω中的Borel集族且设μ是$(\Omega,\mathscr{B})$ 上的正则测度,它已扩张为$\mathscr{A}$上的完备测度(由定理3.1.1). 其次,设E是给定的($\mathbb{K}$上的) Banach空间,$1 \leqslant p = q/(q-1) \leqslant \infty$,当$p = 1$或$\infty$时$q = \infty$或1. 任给可测函数$f: \Omega \to E$,约定以$|f|$记函数$\|f(x)\|$ $(x \in \Omega)$,令

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_\Omega |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \inf\limits_{\mu A^c = 0} \|f\|_A, & p = \infty. \end{cases} \tag{3.5.1}$$

以 $L^p(\Omega,E,\mu)$ 记使 $\|f\|_p < \infty$ 的可测函数 $f:\Omega\to E$ 之全体，也简写作 L^p，其中，几乎处处相等的函数不加区别. 若 Ω 是 LCH，Ω 的非空开子集有正测度，$f\in C(\Omega,E)$，则必 $\|f\|_\infty = \|f\|_0$.

命题 3.5.1　$L^p(\Omega,E,\mu)(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 依范数(3.5.1)是一个 Banach 空间，其中，范数收敛序列必依测度 μ 收敛且含几乎处处收敛子列.

证　只考虑 $1\leqslant p<\infty$ 的情况($p=\infty$ 的情况证明更简单些). 直接从式(3.5.1)看出 $\|f\|_p$ 满足范数公理(N_1)与(N_3)(由定义 1.2.1). 用初等方法易建立如下 **Hölder 不等式**：

$$\int_\Omega |f||g|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \|f\|_p\|g\|_q,\quad f\in L^p, g\in L^q. \tag{3.5.2}$$

若 $f,g\in L^p$，则分别以 $|f|$ 与 $|f+g|^{p-1}$ 取代 $|f|$ 与 $|g|$，应用式(3.5.2)得

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f||f+g|^{p-1}\mathrm{d}\mu &\leqslant \|f\|_p\,\big\||f+g|^{p-1}\big\|_q\\ &= \|f\|_p\,\|f+g\|_p^{p/q}.\end{aligned}$$

同理，

$$\int_\Omega |g||f+g|^{p-1}\mathrm{d}\mu \leqslant \|g\|_p\,\|f+g\|_p^{p/q}.$$

于是

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^p &\leqslant \int_\Omega(|f|+|g|)|f+g|^{p-1}\mathrm{d}\mu\\ &\leqslant (\|f\|_p+\|g\|_p)\|f+g\|_p^{p/q},\end{aligned}$$

这得出 $\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p$. 这就验证了范数公理($N_1$) ~ ($N_3$).

设 $\{f_n\}\subset L^p$ 满足 $\sum\|f_n\|_p<\infty$. 令 $g=\sum|f_n|$，则由 Levi 定理有

$$\|g\|_p = \lim_n\left\|\sum_{i=1}^n|f_i|\right\|_p \leqslant \sum_{i=1}^\infty\|f_i\|_p<\infty.$$

这推出 $g<\infty$, a. e. (由命题 3.1.2(i))，因而 $\sum f_n$ 几乎处处收敛于某个可测函数 f. 显然 $|f|\leqslant g$，因而 $f\in L^p$. 因由控制收敛定理有

$$\begin{aligned}\left\|f-\sum_{i=1}^n f_i\right\|_p^p &= \int_\Omega\Big|\sum_{i>n}f_i\Big|^p\mathrm{d}\mu\\ &\leqslant\int_\Omega\Big(\sum_{i>n}|f_i|\Big)^p\mathrm{d}\mu\to 0,\quad n\to\infty,\end{aligned}$$

故 $\sum f_n$ 在 L^p 中收敛于 f. 由引理 1.2.1，空间 L^p 是完备的.

若 $f,f_n\in L^p(n\in\mathbb{N})$，$\|f_n-f\|_p\to 0$，则 $\forall\varepsilon>0$，有

$$\varepsilon^p\mu\{|f_n-f|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\|f_n-f\|_p^p\to 0,\quad n\to\infty,$$

这表明 $f_n\xrightarrow{\mu}f$. 然后用定理 3.1.3 得出 $\{f_n\}$ 有几乎处处收敛子列. □

与空间 $L^p(\Omega,E,\mu)$ 有关的一些术语与记号说明如下：$\|f\|_p$ 称为 **L^p 范数**，当必要标明测度 μ 时写作 $\|f\|_{L^p(\mu)}$. 空间 $L^p(\Omega,E,\mu)$ 也简写作 $L^p(\Omega,E)$ 或 $L^p(\mu)$，其中的函数称为 L^p 函数，亦称为 p 次可积函数(若 $p<\infty$) 或本性有界函数(若 $p=\infty$). 约定 $L^p(\Omega)=L^p(\Omega,\mathbb{K})$，$L^p(\Omega)$ 也写作 $L^p(\Omega,\mu)$. 当 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 而未特别说明时认定 $L^p(\Omega)=L^p(\Omega,m)$，$m$ 是 n 维 Lebesgue 测度. 空间 L^p 中的范数收敛称为 **L^p 收敛**，当 $\|f_n-f\|_p\to 0$ 时记作 $f_n\xrightarrow{L^p}f(n\to\infty)$. 若 $1\leqslant p<\infty$，则 L^p 收敛也称为 **p 次平均收敛**；L^1 收敛与 L^2 收敛分别称为**平均收敛**与**均方收敛**. 当 $f_n\xrightarrow{L^p}f$ 时也说 $\{f_n\}$ **L^p 逼近**于 f，或说 f_n 是 f 的 L^p 近似. 在近代分析学中，这些术语已如此通行，应成为常识中不言自明的一部分.

若 μ 是计数测度，则约定 $l^p(\Omega,E)=L^p(\Omega,E,\mu)$，$l^p(\Omega)=l^p(\Omega,\mathbb{K})$，$l^p=l^p(\mathbb{N})$. 空间 l^p 已见于例 1.2.1(iii). 任给 $x\in l^p(\Omega,E)$，结合式(3.5.1)与式(3.1.16)得

$$\|x\|_p=\begin{cases}\left(\sum_{\omega\in\Omega}\|x(\omega)\|^p\right)^{1/p}, & 1\leqslant p<\infty,\\ \sup_{\omega\in\Omega}\|x(\omega)\|=\|x\|_0, & p=\infty.\end{cases}\tag{3.5.3}$$

特别地，对于 $x=(x_n)\in l^p(\mathbb{N},E)$，有

$$\|x\|_p=\begin{cases}\left(\sum_n\|x_n\|^p\right)^{1/p}, & 1\leqslant p<\infty,\\ \sup_n\|x_n\|, & p=\infty.\end{cases}\tag{3.5.4}$$

将 Hölder 不等式(3.5.2)用于 $x\in l^p$，$y\in l^q$ 得出

$$\sum_n|x_ny_n|\leqslant\|x\|_p\|y\|_q.\tag{3.5.5}$$

若 E 是 Hilbert 空间，则 $L^2(\Omega,E)$ 与 $l^2(\mathbb{N},E)$ 均为 Hilbert 空间，其中，内积分别定义为

$$\langle f,g\rangle=\int_\Omega\langle f(x),g(x)\rangle\mathrm{d}\mu,\quad f,g\in L^2(\Omega,E),\tag{3.5.6}$$

$$\langle x,y\rangle=\sum_n\langle x_n,y_n\rangle,\quad x,y\in l^2(\mathbb{N},E).\tag{3.5.7}$$

尤其值得注重的是形如 $l^2(\Omega)$ 的 Hilbert 空间，在完全严格的意义上，它穷尽了所有 Hilbert 空间.

命题 3.5.1 所确立的完备性表明空间 L^p 足够大，致使它能在 L^p 收敛的极限运算下保持封闭. 这对于涉及 L^p 收敛的存在性论证无疑是重要的. 另一方面，我们就要确立一个似乎恰好相反的结论：空间 L^p 包含某些足够小的基本集(见定义 1.2.3)，因而空间 L^p 可看成某些“好函数”空间的完备化，这就使得在运用空间 L^p 时可充分利用其中的“好函数”所能带来的方便.

定理 3.5.1 设 $1\leqslant p<\infty$，则以下结论成立：

(i) $\{a\,\xi_A: a \in E, A \in \mathscr{A}, \mu A < \infty\}$ 是空间 $L^p(\Omega,E)$ 的基本集，因而每个 $f \in L^p(\Omega,E)$ 可用简单函数 L^p 逼近；

(ii) 若 Ω 是 LCH，则 $C_c(\Omega,E)$ 在 $L^p(\Omega,E)$ 中稠密；

(iii) 若 Ω 是第二可数的 LCH，E 可分，则 $L^p(\Omega,E)$（特别是 $L^p(\Omega)$）可分.

证 (i) 只需证每个 $f \in L^p(\Omega,E)$ 可用简单函数 L^p 逼近. 取可数值函数列 $\{f_n\}$，使得 $f_n \to f$, a. e. $(n \to \infty)$ 且 $|f_n| \leqslant 2|f|$（由推论 3.2.1(iii)），从而

$$|f_n - f|^p \leqslant \text{const}\,|f|^p \in L^1.$$

将控制收敛定理用到 $|f_n - f|^p$ 得到 $\|f_n - f\|_p \to 0 (n \to \infty)$.

其次设 $f = \sum_1^\infty a_n \xi_{e_n} \in L^p$ 是可数值函数，令 $f_n = \sum_1^n a_i \xi_{e_i}$，则 f_n 是简单函数，由 $\|f\|_p^p = \sum \|a_n\|^p \mu e_n < \infty$ 推出

$$\|f_n - f\|_p^p = \sum_{i>n} \|a_i\|^p \mu e_i \to 0, \quad n \to \infty.$$

(ii) 显然 $C_c(\Omega,E) \subset L^p$. 由已证的(i)，只要证每个 $f = a\xi_A (a \in E, A \in \mathscr{A}, \mu A < \infty)$ 可用 $C_c(\Omega,E)$ 中的函数 L^p 逼近. $\forall \varepsilon > 0$. 取紧集 K 与开集 V，使得 $K \subset A \subset V$, $\mu(V\backslash K) < \varepsilon^p$（由命题3.4.1）. 取 $\varphi \in C_c(\Omega)$，使得 $K \prec \varphi \prec V$（由定理1.3.6），则 $g = a\varphi \in C_c(\Omega,E)$，

$$\|f - g\|_p = \left(\int_{V\backslash K} \|a\|^p |\xi_A - \varphi|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \leqslant \varepsilon\|a\|.$$

(iii) 取可数个相对紧开集构成 Ω 的一个拓扑基 β（由命题 1.3.1(ii)），取 E 中的可数稠集 B. 取定 $f = a\xi_A (a \in E, A \in \mathscr{A}, \mu A < \infty)$. $\forall \varepsilon > 0$，设 K, V 依结论(ii)之证. 取有限个集 $U_1, \cdots, U_n \in \beta$，使得 $K \subset U = \cup U_i \subset V$. 取 $b \in B$，使 $\|a - b\| < \varepsilon$. 令 $g = b\,\xi_U$，则

$$\begin{aligned}\|f - g\|_p &\leqslant \|a\xi_A - b\xi_A\|_p + \|b\xi_A - b\xi_U\|_p \\ &\leqslant \varepsilon(\mu A)^{1/p} + \varepsilon\|b\| \leqslant \varepsilon[(\mu A)^{1/p} + \|a\| + \varepsilon].\end{aligned}$$

因此形如 $b\xi_U$ 的函数构成 $L^p(\Omega,E)$ 的基本集. 因 $b \in B$ 与 $U = \bigcup_1^n U_i$ 都只有可数种选择，故 $L^p(\Omega,E)$ 是可分的. □

定理证明中用到以下事实：若 B 是赋范空间 X 的基本集，$A \subset X$，每个 $b \in B$ 可用 A 中的元任意逼近，则 A 亦是 X 的基本集. 这是处理逼近问题的一般方法，在本书中还要多次用到，值得细加体会. 此外还应注意，在定理 3.5.1 中 $p < \infty$ 是重要的. 一般来说，在空间族 $L^p (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 中，L^∞ 颇显另类，它缺少空间 $L^p (1 \leqslant p < \infty)$ 的一些重要性质，因而常常被排除在一些重要结果之外.

下面转向 L^p 空间的对偶问题. 首先对所面对的问题作一点一般说明. 对于给定的函数空间 X，若能找到某个已知的 Banach 空间 Y，使得存在某个“自然的”等

距同构

$$Y \cong X^*, \quad y \to L_y,$$

则只要等同 y 与 L_y,就不妨认为 Y 就是 X 的对偶空间,或者说 Y 是 X^* 的一个表示. 这样的结果也就称为**表示定理**,它用一个已知的、通常有明晰结构的空间 Y 来表示仅抽象地给定而结构未明的空间 X^*,其价值是不言而喻的. 定理 1.7.4 就是一个这样的表示定理(它就被称为 Riesz 表示定理),它使我们能以 Hilbert 空间 H 自身去取代 H^*. 对于函数空间建立适当的表示定理往往不易,仅在某些特殊情况下可获得成功. 在这样做时,通常要利用一些已知的表示定理,如定理 1.7.4 与定理 3.4.3,注意二者在最初形式上都属于令人敬仰的 Riesz.

现在考虑空间 $L^p(\Omega,E)$ 的对偶空间,其中,$1 \leqslant p = q/(q-1) < \infty$,限定 E 为 Hilbert 空间. 任给 $g \in L^q(\Omega,E)$,定义

$$L_g(f) = \int_\Omega \langle f,g\rangle \mathrm{d}\mu, \quad f \in L^p(\Omega,E), \tag{3.5.8}$$

其中,$\langle f,g\rangle$ 是函数 $\langle f(x),g(x)\rangle$ 的简写. 由 Schwarz 不等式与 Hölder 不等式有

$$|L_g(f)| \leqslant \int_\Omega |f||g| \mathrm{d}\mu \leqslant \|f\|_p \|g\|_q,$$

由此得出 $L_g \in L^p(\Omega,E)^*$ 且 $\|L_g\| \leqslant \|g\|_q$. 实际上,这已为得到以下结果走完了第一步:

定理 3.5.2 设 μ 是 Ω 上的 σ 有限测度,E 是 Hilbert 空间,$1 \leqslant p = q/(q-1) < \infty$,则

$$L^q(\Omega,E) \to L^p(\Omega,E)^*, \quad g \to L_g \tag{3.5.9}$$

是一等距的共轭线性同构,其中,L_g 依式(3.5.8) 定义.

证 易看出映射(3.5.9)是共轭线性的单射. 下面要做的只是对任给 $L \in L^p(\Omega,E)^*$,找到 $g \in L^q(\Omega,E)$,使得 $L = L_g$ 且 $\|g\|_q \leqslant \|L\|$. 分两种情况考虑.

(i) 设 $\mu\Omega < \infty$. 任给 $A \in \mathscr{A}$,$a \to L(a\xi_A)$ $(a \in E)$ 显然是 E 上的有界线性泛函. 由定理 1.7.4,有 $\nu(A) \in E$,使得

$$L(a\xi_A) = \langle a,\nu(A)\rangle, \quad a \in E, A \in \mathscr{A}. \tag{3.5.10}$$

这就得到一个集函数 ν: $\mathscr{A} \to E$. 利用式(3.5.10) 及 $\mu\Omega < \infty$ 易验知 ν 具有完全可加性,因此 ν 是一个 E 值测度(依定义 3.3.1). 若 $\{A_i\}$ 是 Ω 的一个分解,$a_i \in E$,$\|a_i\| = 1$ $(i \in \mathbb{N})$,则

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |\langle a_i,\nu(A_i)\rangle| &= \sum_{i=1}^n \langle \varepsilon_i a_i,\nu(A_i)\rangle \quad (|\varepsilon_i| = 1) \\
&= \sum_{i=1}^n L(\varepsilon_i a_i \xi_{A_i}) = L\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i \xi_{A_i}\right) \\
&\leqslant \|L\| \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i \xi_{A_i} \right\|_p = \|L\| (\mu\Omega)^{1/p}.
\end{aligned}$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n} \| \nu(A_i) \| = \sum_{i=1}^{n} \sup_{\|a_i\|=1} | \langle a_i, \nu(A_i) \rangle |$$

$$= \sup_{\|a_1\|=\cdots=\|a_n\|=1} \sum_{i=1}^{n} | \langle a_i, \nu(A_i) \rangle |$$

$$\leqslant \|L\| (\mu\Omega)^{1/p},$$

这推出 $\|\nu\| \leqslant \|L\|(\mu\Omega)^{1/p} < \infty$. 其次由式(3.5.10)直接看出$\nu \ll \mu$,因此$\nu \in M_{\mu}(\Omega,E)$. 由定理3.3.4,存在 $\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}\mu = g \in L^1(\Omega,E)$. 余下只要证

$$L(f) = \int_{\Omega} \langle f, g \rangle \mathrm{d}\mu, \quad f \in L^p(\Omega,E) \tag{3.5.11}$$

且 $\|g\|_q \leqslant \|L\|$. 任给 $a \in E, A \in \mathscr{A}$, 由式(3.5.10)与 $g = \mathrm{d}\nu/\mathrm{d}\mu$ 有

$$L(a\xi_A) = \left\langle a, \int_A g \mathrm{d}\mu \right\rangle = \int_{\Omega} \langle a\xi_A, g \rangle \mathrm{d}\mu.$$

由此推出,当f是简单函数时式(3.5.11)成立. 其次设$f: \Omega \to E$是有界可测函数. 依推论3.2.1(iii)有简单函数序列$\{\varphi_n\}$,使得$|\varphi_n| \leqslant 2|f|$,$\varphi_n \to f$,a.e. $(n \to \infty)$. 于是$|f - \varphi_n| \leqslant \mathrm{const}$, 由控制收敛定理有

$$\left| L(f) - \int_{\Omega} \langle f, g \rangle \mathrm{d}\mu \right|$$

$$\leqslant | L(f) - L(\varphi_n) | + \left| \int_{\Omega} \langle \varphi_n - f, g \rangle \mathrm{d}\mu \right|$$

$$\leqslant \|L\| \, \|f - \varphi_n\|_p + \int_{\Omega} |\varphi_n - f| |g| \mathrm{d}\mu \to 0, \quad n \to \infty,$$

可见式(3.5.11)亦成立. 若能证 $\|g\|_q \leqslant \|L\|$,从而 $g \in L^q$, 则利用定理3.5.1(i)即可证式(3.5.11)对任何$f \in L^p(\Omega,E)$ 成立.

今证 $\|g\|_q \leqslant \|L\|$. 首先设$p > 1$. 令 $A_n = \{|g| \leqslant n\}$, $h = g/|g|$, 当 $g(x) = 0$ 时约定 $h(x) = 0$. 则 $\xi_{A_n} |g|^{q-1} h \in L^{\infty}$,

$$\int_{A_n} |g|^q \mathrm{d}\mu = \int_{\Omega} \xi_{A_n} |g|^{q-1} \langle h, g \rangle \mathrm{d}\mu = L(\xi_{A_n} |g|^{q-1} h)$$

$$\leqslant \|L\| \, \|\xi_{A_n} |g|^{q-1} h\|_p = \|L\| \left(\int_{A_n} |g|^q \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}.$$

这推出 $\|g | A_n\|_q \leqslant \|L\|$,从而 $\|g\|_q \leqslant \|L\|$. 若$p = 1$, 则

$$\int_A |g| \mathrm{d}\mu = L(h\,\xi_A) \leqslant \|L\| \mu A,$$

这推出 $\|g\|_{\infty} \leqslant \|L\|$ (用推论3.2.3(i)). 因此 $\|g\|_q \leqslant \|L\| \ (1 \leqslant p < \infty)$, 如所要证.

(ii) 设$\mu\Omega = \infty$. 取升列$\{A_n\}$,使得$\Omega = \bigcup_1^{\infty} A_n$, $\mu A_n < \infty \ (n \in \mathbb{N})$. 每个$L^p(A_n,$

E) 可自然地嵌入 $L^p(\Omega,E)$,只要对每个 $f\in L^p(A_n,E)$ 补充定义 $f|A_n^c=0$. 将已证的结论用到 $L^p(A_n,E)$ 得出:存在 $g_n\in L^q(A_n,E)$,使得 $\|g_n\|_q\leqslant\|L\|$ 且

$$L(f)=\int_{A_n}\langle f,g_n\rangle\mathrm{d}\mu,\quad f\in L^p(A_n,E).$$

必定 $g_k|A_n=g_n$,a. e. $(k>n\in\mathbb{N})$,因此有函数 $g:\Omega\to E$,使得 $g|A_n=g_n$,a. e. $(n\in\mathbb{N})$,因而 $g_n\to g$,a. e.,$|g_n|\nearrow|g|$. 于是由 Levi 定理有 $\|g\|_q=\lim\limits_n\|g_n\|_q\leqslant\|L\|$. 任给 $f\in L^p(\Omega,E)$,有 $f\xi_{A_n}\xrightarrow{L^p}f$, 因而

$$L(f)=\lim_n\int_{A_n}\langle f,g\rangle\mathrm{d}\mu=\int_\Omega\langle f,g\rangle\mathrm{d}\mu.$$

这表明 $L=L_g$, 如所要证. □

在定理 3.5.2 的条件下,不妨认为 $L^p(\Omega,E)^*=L^q(\Omega,E)$. 特别地,$L^p(\Omega)^*=L^q(\Omega)$. 由此又推出,当 $1<p<\infty$ 时, $L^p(\Omega,E)$(特别是 $L^p(\Omega)$)是自反空间,而 $L^2(\Omega,E)$ 是自对偶空间. 这些结论构成空间 L^p 相对于其他函数空间的主要优势. 通常认为,空间 L^p 拥有很"坏"的函数(对连续性与有界性均无限制),但恰恰是这种空间具有良好的空间结构.

与空间 L^p 形成鲜明对照的是,由"好函数"构成的空间 $\mathscr{E}^r$,其空间结构反逊一筹. 且不说作为 F 空间的 $\mathscr{E}^r(\Omega)$, 即使 Banach 空间 $\mathscr{E}^r(D)$ $(0\leqslant r<\infty, D\subset\mathbb{R}^n$ 是有界闭区域,见 2.2 节),要描述其对偶空间就很不易,更不要指望它们成为自反空间. 不过,至少对于 $\mathscr{E}^0(D)$,即连续函数空间, Riesz 表示定理已提示出解决其对偶问题的某种线索. 实际上,正是有赖于 Riesz 表示定理,得以建立下一个堪称优美的表示定理.

设 Ω 是一个 LCH, $C_0(\Omega)$(由式(1.3.6))依 sup 范数是一个 Banach 空间. 初看起来远非显然的是, $C_0(\Omega)$ 的对偶空间竟然是 $M(\Omega)$:Ω 上的正则 $\mathbb{K}$ 值测度的空间. 为达到这一结论,采用类似于建立等距同构(3.5.9)的程序. 首先,对任给 $\nu\in M(\Omega)$,定义线性泛函

$$L_\nu(f)=\int_\Omega f\mathrm{d}\nu,\quad f\in C_0(\Omega),\tag{3.5.12}$$

其中, 积分依式(3.3.15). 结合式(3.5.12)与式(3.3.17)有

$$|L_\nu(f)|\leqslant\int_\Omega|f|\,\mathrm{d}|\nu|\leqslant\|f\|_0\|\nu\|,$$

这得出 $L_\nu\in C_0(\Omega)^*$ 且 $\|L_\nu\|\leqslant\|\nu\|$. 在此基础上可建立

定理 3.5.3 设 Ω 是一个 LCH,则

$$M(\Omega)\to C_0(\Omega)^*,\quad \nu\to L_\nu\tag{3.5.13}$$

是一个等距同构,其中, L_ν 依式(3.5.12).

证 类似于定理 3.5.2 之证,只要对给定的 $L\in C_0(\Omega)^*$,找到 $\nu\in M(\Omega)$,使

得 $L = L_\nu$ 且 $\|\nu\| \leqslant \|L\|$. 这基于 Riesz 表示定理 3.4.3 与定理 3.5.2.

(i) 构作 $C_0(\Omega)$ 上的正线性泛函 T,这是主要步骤. 令 $C_0^+(\Omega) = C_0(\Omega, \mathbb{R}_+)$, 首先在 $C_0^+(\Omega)$ 上定义

$$T(f) = \sup\{|L(\varphi)| : \varphi \in C_0(\Omega), |\varphi| \leqslant f\}, \quad f \in C_0^+(\Omega). \tag{3.5.14}$$

显然 $0 \leqslant T(f) \leqslant \|L\| \|f\|_0$ 且 T 是正齐次的. 若 $\varphi_i \in C_0(\Omega)$, $|\varphi_i| \leqslant f_i \in C_0^+(\Omega)$, $|L(\varphi_i)| = \varepsilon_i L(\varphi_i)$, $|\varepsilon_i| = 1 (i = 1,2)$,则

$$|L(\varphi_1)| + |L(\varphi_2)| = L(\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_2) \leqslant T(f_1 + f_2),$$

这推出 $T(f_1) + T(f_2) \leqslant T(f_1 + f_2)$. 另一方面,若 $\varphi \in C_0(\Omega)$, $|\varphi| \leqslant f_1 + f_2$, 令 $\varphi = \varepsilon|\varphi|$, $\varphi_1 = |\varphi| \wedge f_1$, $\varphi_2 = |\varphi| - \varphi_1$,则 $0 \leqslant \varphi_i \leqslant f_i (i = 1,2)$,

$$|L(\varphi)| \leqslant |L(\varepsilon\varphi_1)| + |L(\varepsilon\varphi_2)| \leqslant T(f_1) + T(f_2),$$

这推出 $T(f_1 + f_2) \leqslant T(f_1) + T(f_2)$. 可见 T 在 $C_0^+(\Omega)$ 上是可加的.

其次将 T 扩张到 $C_0(\Omega, \mathbb{R})$ 上:

$$T(f) = T(f^+) - T(f^-), \quad f \in C_0(\Omega, \mathbb{R}). \tag{3.5.15}$$

任给 $f, g \in C_0(\Omega, \mathbb{R})$,用式(3.1.2) 易得

$$f^+ + g^+ + (f+g)^- = f^- + g^- + (f+g)^+,$$

然后用 T 在 $C_0^+(\Omega)$ 上的可加性及式(3.5.15) 得出 $T(f+g) = T(f) + T(g)$. 其次, 注意 $(\alpha f)^\pm = \alpha f^\pm$ $(\alpha > 0)$, $(-f)^\pm = f^\mp$,利用 T 在 $C_0^+(\Omega)$ 上的正齐次性推出 T 在 $C_0(\Omega, \mathbb{R})$ 上是齐次的,因而是线性的.

进一步, T 自然地扩张为 $C_0(\Omega)$ 上的线性泛函,它显然为正线性泛函.

(ii) 应用 Riesz 表示定理,得出 Ω 上的正则测度 λ,使得

$$T(f) = \int_\Omega f \mathrm{d}\lambda, \quad f \in C_c(\Omega). \tag{3.5.16}$$

$\forall f \in C_0(\Omega)$,有

$$\begin{aligned} |T(f)| &= \varepsilon T(f) = T(\varepsilon f) = T(\mathrm{Re}(\varepsilon f)) \quad (|\varepsilon| = 1) \\ &\leqslant T((\mathrm{Re}(\varepsilon f))^+) \leqslant \|L\| \|f\|_0, \end{aligned}$$

这表明 $T \in C_0(\Omega)^*$ 且 $\|T\| \leqslant \|L\|$. 于是由定理 3.4.3 有 $\lambda(\Omega) \leqslant \|L\|$.

(iii) 确定所需的 ν. $\forall f \in C_c(\Omega)$,结合式(3.5.14) 与式(3.5.16) 有

$$|L(f)| \leqslant T(|f|) = \int_\Omega |f| \mathrm{d}\lambda = \|f\|_{L^1(\lambda)}.$$

由 Hahn-Banach 定理,可认为 $L \in L^1(\Omega, \lambda)^*$ 且其范数 $\leqslant 1$. 于是由定理 3.5.2 有 $g \in L^\infty(\Omega, \lambda)$,使得

$$L(f) = \int_\Omega fg \mathrm{d}\lambda, \quad f \in C_c(\Omega). \tag{3.5.17}$$

可设 $|g| \leqslant 1$. 令 $\mathrm{d}\nu = g\mathrm{d}\lambda$,则由定理 3.3.1 有

$$\|\nu\| = \|g\|_{L^1(\lambda)} \leqslant \lambda(\Omega) \leqslant \|L\|.$$

同理，有 $|\nu| \leqslant \lambda$，因而 ν 是正则的，$\nu \in M(\Omega)$. 因 $L, L_\nu \in C_0(\Omega)^*$，在 $C_c(\Omega)$ 上 $L = L_\nu$（用式(3.5.17)），而 $C_c(\Omega)$ 在 $C_0(\Omega)$ 中稠密，故必 $L = L_\nu$，如所要证. □

由于有定理3.5.3，不妨认为 $C_0(\Omega)^* = M(\Omega)$. 因 $C_c(\Omega)$ 在 $C_0(\Omega)$ 中稠密，故亦有 $C_c(\Omega)^* = M(\Omega)$. 特别地，当 Ω 是紧 Hausdorff 空间时有 $C(\Omega)^* = M(\Omega)$.

对于前面提到的 $\mathscr{E}^r(D)$ 至少当 $r = 0$ 时有 $\mathscr{E}^0(D)^* = M(D)$. 进一步可得到

推论3.5.1 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是有界闭区域，$0 \leqslant r < \infty$，则 $f \in \mathscr{E}^r(D)^*$ 有通式

$$f(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leqslant r} \int_D \partial^\alpha \varphi \mathrm{d}\nu_\alpha, \quad \varphi \in \mathscr{E}^r(D), \tag{3.5.18}$$

其中，$\{\nu_\alpha : |\alpha| \leqslant r\} \subset M(D)$ 与 φ 无关.

证 以 k 记满足 $|\alpha| \leqslant r$ 的 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ 之个数，在 $C(D)$ 中采用 sup 范数，而在积空间 $[C(D)]^k$ 中采用如下积范数：

$$\|(\varphi_\alpha)\| = \max_{|\alpha| \leqslant r} \|\varphi_\alpha\|_0, \quad \varphi_\alpha \in C(D).$$

在 $\mathscr{E}^r(D)$ 中采用范数 $\|\varphi\|_{(r)}$（依式(2.2.13)），则

$$\mathscr{E}^r(D) \to [C(D)]^k, \quad \varphi \to (\partial^\alpha \varphi)_{|\alpha| \leqslant r}$$

是一等距嵌入，因而 $\mathscr{E}^r(D)$ 可看成 $[C(D)]^k$ 的子空间. 任给 $f \in \mathscr{E}^r(D)^*$，由 Hahn-Banach 定理，可以认为 $f \in \{[C(D)]^k\}^* \cong [C(D)^*]^k \cong [M(D)]^k$. 于是有 $\nu_\alpha \in M(D)$（$|\alpha| \leqslant r$），使得对任给 $\varphi \in \mathscr{E}^r(D)$ 有式(3.5.18)成立. □

稍细致的分析可得出，对于式(3.5.18)中的 f 与 ν_α（$|\alpha| \leqslant r$）的范数成立公式

$$\|f\| = \sum_{|\alpha| \leqslant r} \|\nu_\alpha\|. \tag{3.5.19}$$

仍设 Ω 是 LCH，今考虑与空间 L^p 相关联的空间 L^p_{loc} 与 L^p_c，二者分别定义为

$$L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega, E) = \{f: 任给紧集 K \subset \Omega, f|K \in L^p(K, E)\}, \tag{3.5.20}$$

$$L^p_c(\Omega, E) = \{f \in L^p(\Omega, E): \operatorname{supp} f 为紧集\}. \tag{3.5.21}$$

因 $f \in L^p$ 可在某个零集上不确定，对支集 $\operatorname{supp} f$ 的定义需作修正：

$$(\operatorname{supp} f)^c = \cup \{U: U \subset \Omega 为开集, \mu(U \cap \{f \neq 0\}) = 0\}, \tag{3.5.22}$$

或等价地，$(\operatorname{supp} f)^c$ 是 f 在其中几乎处处为零的最大开集. 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$. 易见 $L^p(\Omega, E) \subset L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega, E) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega, E)$. 若 Ω 是紧空间，则 $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega, E)$ 与 $L^p_c(\Omega, E)$ 均重合于 $L^p(\Omega, E)$，不必置论. 因此下面设 Ω 是非紧的. 任给紧集 $K \subset \Omega$，令

$$\|f\|_{K,p} = \|f|K\|_p, \quad f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega, E), \tag{3.5.23}$$

若 Ω 是第二可数的 LCH，则 $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega, E)$ 依半范族 $\{\|f\|_{K,p} : K \subset \Omega 为紧集\}$ 是一个 F 空间，其中，收敛意味着在 Ω 上"局部 L^p 收敛". 相关的讨论接近于 2.2 节中的作法，不必详述. $L^p_c(\Omega, E)$ 显然是 $L^p(\Omega, E)$ 的一个稠密子空间.

下面的简单命题后面将要用到.

命题3.5.2 设 Ω 是 σ 紧的 LCH，$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega, E)$. 若 $\forall \varphi \in C_c(\Omega)$，有 $\int_\Omega \varphi f \mathrm{d}\mu =$

0,则 $f = 0$,a.e..

证　不妨设 $f \in L^1$, $\mu\Omega < \infty$(否则以任给紧集 $K \subset \Omega$ 取代 Ω). 只要对任给 $A \in \mathscr{B}$,证 $\int_A f\mathrm{d}\mu = 0$(由推论3.2.3(i)). 由定理3.5.1(ii)之证看出,存在 $\{\varphi_n\} \subset C_c(\Omega,[0,1])$,使得 $\varphi_n \to \xi_A$,a.e.$(n \to \infty)$. 于是由控制收敛定理有

$$\int_A f\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \xi_A f\mathrm{d}\mu = \lim_n \int_\Omega \varphi_n f\mathrm{d}\mu = 0,$$

如所要证.　□

3.6　Lebesgue 测度与积分

对于 Lebesgue 测度你当然不会陌生,它可见于任何一本实分析教材. 现在感兴趣的是在本章所采用的颇具一般性的理论构架中,Lebesgue 测度与积分处于什么地位. 当然,也希望看到一些超出传统实分析教材的新结果,虽然并不打算过分深入. 对于 Lebesgue 测度与积分给予足够的重视是很自然的. 这不仅是因为,Lebesgue 的开创性工作毕竟是近代积分论的开端;而且也因为,在近代分析学及其应用中,Lebesgue 测度及其衍生物(如有限维流形上的测度),仍然具有最重要的价值.

本章所持的观点使我们对于 Lebesgue 测度与积分有一个不同于传统看法的新视角,即立足于 LCH 上的正则测度一般理论的基础上加以考虑. 在 3.4 节中提到的在 LCH 上导入积分的方法(A)与(B),均可用来在 $\mathbb{R}^n$ 上导入 Lebesgue 积分.

若用方法(A),则应首先**直接**构成 n 维 Lebesgue 测度 m. 要点是:规定任一 n 维方体 $C = \prod[a_i,b_i)$ 的测度为其 n 维体积 $\prod(b_i - a_i)$;然后规定开集 $V \subset \mathbb{R}^n$ 的测度为 $mV = \sum mC_k$, V 是方体 C_k 的不交并. 任给 $A \subset \mathbb{R}^n$,定义

$$m^* A = \inf\{mV:\ V\text{为开集且}A \subset V\},$$

然后以 $\mathscr{L}$ 记满足如下 Caratheodory 条件的集 $L \subset \mathbb{R}^n$ 的全体:

$$m^* A = m^*(A \cap L) + m^*(A \backslash L),\quad \forall A \subset \mathbb{R}^n,$$

则 m^* 在 $\mathscr{L}$ 上的限制即为所要的 Lebesgue 测度 m.

若用方法(B),则应首先对任何 $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 定义其 n 重 Riemann 积分

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

并说明 $L(f)$ 是 $C_c(\mathbb{R}^n)$ 上的一个正线性泛函. 由于函数 $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 的特殊性,这件事比初看起来要容易一些,并不涉及一般 n 维区域的体积概念. 一旦做好了这件事,就由 Riesz 表示定理立得由 L 决定的正则测度,将其完备化之后就是所要的 Lebesgue 测度 m.

以上两种导入法都不免有一些烦琐的细节,方法(A)尤其如此,这些细节都不

太有吸引力,本书概不详述.必要时可参看有关的实分析著作.下面只是用一条定理概述有关 Lebesgue 测度的基本结论.从字面上看,这些结论并无不同寻常的深刻之处,似乎更像一些平凡的常识,以至难以置疑.而实际上,数学家为严格确立这些结论作出了艰巨的努力,所经历的漫长而曲折的探索过程则已记入历史.

定理 3.6.1 $\mathbb{R}^n$ 上存在唯一完备正则测度 m,它定义在一个 σ 代数 $\mathscr{L}$ 上,具有以下性质:

(i) $\mathscr{L}$ 包含 $\mathbb{R}^n$ 中的 Borel 集族 $\mathscr{B}$, $L \in \mathscr{L} \Leftrightarrow$ 存在 $A,B \in \mathscr{B}$,使得 $A \subset L \subset B$ 且 $m(B\backslash A) = 0$;

(ii) 任给 n 维方体 $C = \prod [a_i, b_i)$,有 $m\,C = \prod (b_i - a_i)$;

(iii) m 是平移不变的: $m(x + A) = m\,A(x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathscr{L})$.

m 作为一种完备正则测度当然具有由命题 3.1.1 与命题 3.4.1 所述的性质,无需复述.但平移不变性则是一个新的性质,它未必为一般正则测度或正测度所具有.

定理 3.6.1 中所述的测度 m 就称为 n 维 Lebesgue 测度或简称为 Lebesgue 测度,每个 $A \in \mathscr{L}$ 称为 n 维 Lebesgue 可测集或简称为 Lebesgue 可测集;关于 m 的积分称为 **Lebesgue 积分**.只要未另加说明,在 $\mathbb{R}^n$ 及其子集上总使用 Lebesgue 测度与 Lebesgue 积分,而且,如文献中已通行的,在记号上并不区别 Lebesgue 积分与 Riemann 积分.例如,就用

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{3.6.1}$$

表示 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 积分,其中, $\mathrm{d}x$ 就表示 Lebesgue 测度.这种作法唯有方便而很少带来误解.实际上,如在实分析中已严格证明的,若式(3.6.1)作为 n 重 Riemann 积分(看成广义积分)存在, $n > 1$,则它与 Lebesgue 积分一致.在 $n = 1$ 时有以下结论:若实函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上(常义)Riemann 可积,则 Riemann 积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 就是 Lebesgue 积分.若 $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$,实函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上在广义积分意义上**绝对**可积,则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 也是 Lebesgue 积分.

本节的主要任务是对 Lebesgue 积分建立经典的 Newton-Leibniz 公式的某种推广,并由此引出 R-N 导数的一个较具直观性的表示.为得到主要结果而引入的一些概念与工具,在 Fourier 分析等领域中将起重要作用.在本节中,除了用到测度论的一般结论之外,Lebesgue 测度的平移不变性将起重要作用,与此有关的一些论证在第 6 章中将大大发挥并被一般化.

任给球 $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n (x \in \mathbb{R}^n, r > 0)$,令 $V(r) = mB_r(x)$.实际上,不难准确地算出 $V(r) = c_n r^n$, c_n 是决定于维数 n 的正常数.不过此处并不需要 c_n 的表达式.

定义 3.6.1　设 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, E)$，$r > 0$，$x \in \mathbb{R}^n$. 令

$$A_r f(x) = \frac{1}{V(r)} \int_{B_r(x)} f(y)\,\mathrm{d}y, \tag{3.6.2}$$

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{V(r)} \int_{B_r(x)} \| f(y) \|\,\mathrm{d}y. \tag{3.6.3}$$

这就得到函数 $A_r f$: $\mathbb{R}^n \to E$ 与 Mf: $\mathbb{R}^n \to [0, \infty]$，二者分别称为 f 的均值函数与**极大函数**. 若

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{V(r)} \int_{B_r(x)} \| f(y) - f(x) \|\,\mathrm{d}y = 0, \tag{3.6.4}$$

则称 x 为 f 的 **Lebesgue 点**，简称为 **L 点**，其全体构成 f 的 Lebesgue 集，记作 L_f.

$A_r f(x)$ 正是 $f(y)$ 在球 $B_r(x)$ 内的平均值，函数 $A_r f$ 实际上是 f 的一种移动平均；而 Mf 则可看成函数 $|f|$ 的移动平均的某种最小上界. 利用积分作成的各种“移动平均”，已被证明是研究函数的一个有力工具，这一思想在第 6 章中将被系统发展. 一维情况下的极大函数概念首先由 Hardy-Littewood 于 1930 年引进，其后由 Wiener 于 1939 年移植到 $\mathbb{R}^n$ 中. 定义 3.6.1 实际上定义出两个算子：$A_r: f \to A_r f$ 与 $M: f \to Mf$，后者也称为极大算子，对于它有大量精细的研究（周民强，1999）. 不过这些已属于专题的内容，本节只是将极大函数当作“一次性工具”，用以得出主要定理 3.6.3. 我们特别感兴趣的是 Lebesgue 点，它在第 6 章中将发挥重要作用.

若 $x \in L_f$，则结合式(3.6.2) 与式(3.6.4) 立得

$$\lim_{r\to 0} A_r f(x) = f(x). \tag{3.6.5}$$

当 $n = 1$ 时式(3.6.5) 相当于

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} f(y)\,\mathrm{d}y = f(x),$$

而这又密切联系着经典的微积分学公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y = f(x). \tag{3.6.6}$$

鉴于此，不妨将式(3.6.5)解释为“$f(x)$ 是积分 $\int f(y)\,\mathrm{d}y$ 在 x 的导数”. 本节的主要结果断定：式(3.6.5)对几乎所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 成立，这可看成是如下经典结果的推广：若 $f \in L^1[a,b]$，则式(3.6.6) 在 $[a,b]$ 上几乎处处成立. 本节将建立的这一辉煌结果基于极大函数的一个不等式，而为证明后者又需要一条覆盖引理，该引理的作用大致相当于熟知的 Vitali 覆盖引理. 实分析的经验似乎表明，在应用 Lebesgue 测度论证函数的某种“几乎处处”性质时，常不免要处理适当的覆盖问题.

引理 3.6.1　设 $A \subset \mathbb{R}^n$，$c < mA$，$\mathscr{U}$ 是覆盖 A 的一个球族，则存在有限个互不相交的球 $B_i \in \mathscr{U}$，使得 $c < 3^n \sum mB_i$.

证　取紧集 $K \subset A$，使得 $c < mK$（由命题 3.4.1(ii)）；取 $\mathscr{U}$ 的一个有限子族

$\mathscr{U}_1$ 覆盖 K. 取 $B_1 \in \mathscr{U}_1$,使其半径最大. 若 $\mathscr{U}_1$ 中有不交于 B_1 的球,则取一个这样的球 B_2,使其半径最大;…. 这一过程必经有限步后终止,设所得的球为 $B_1, B_2, \cdots, B_k$,它们互不相交. 若 $B \in \mathscr{U}_1 \setminus \{B_1, B_2, \cdots, B_k\}$,则必有最小的 $i(1 \leqslant i \leqslant k)$,使得 $B \cap B_i \neq \varnothing$. 于是 $B \subset B_i^*$, B_i^* 记与 B_i 同心但半径扩大到 3 倍的球. 于是

$$c < mK \leqslant \sum_i mB_i^* = 3^n \sum_i mB_i. \qquad \square$$

定理 3.6.2 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n, E)$,则对任给 $\beta > 0$,成立

$$\beta\, m\{Mf > \beta\} \leqslant 3^n \|f\|_1. \tag{3.6.7}$$

特别地,由式(3.6.7)推出 $Mf < \infty$,a. e..

文献中通常称定理 3.6.2 为**极大定理**,当 $n = 1$ 时它由 Hardy-Littewood 于 1930 年证明,一般情形是 N. Wiener 于 1939 年证明的.

证 取定 $\beta > 0$,令 $A_\beta = \{Mf > \beta\}$,只要对任给 $c < mA_\beta$ 证 $\beta c < 3^n \|f\|_1$. $\forall x \in A_\beta$,由 $Mf(x) > \beta$ 及式(3.6.3),必有 $r_x > 0$, $B_x = B_{r_x}(x)$ 使得

$$\int_{B_x} \|f(y)\|\, \mathrm{d}y > \beta\, V(r_x). \tag{3.6.8}$$

由引理 3.6.1 有有限个互不相交的球 B_{x_i},使得 $c < 3^n \sum V(r_{x_i})$. 于是

$$\beta c < 3^n \sum_i \beta V(r_{x_i}) < 3^n \sum_i \int_{B_{x_i}} \|f(y)\|\, \mathrm{d}y \leqslant 3^n \|f\|_1,$$

如所要证. $\square$

利用极大定理,现在已可建立本节的如下主要结果:

定理 3.6.3 设 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, E)$,则式(3.6.4) 与式(3.6.5) 都几乎处处成立. 因此,$\mathbb{R}^n$ 中几乎每点是 f 的 L 点.

证 在逻辑上,只要证式(3.6.4)几乎处处成立就够了,然而在方法上却难以独立做到这一点,即式(3.6.4)的证明有赖于式(3.6.5). 因此,不免要走以下两步:

(i) 证式(3.6.5)几乎处处成立. 因只要证式(3.6.5)在每个有界集上几乎处处成立,故不妨设 $f \in L^1$. 直接看出当 f 是连续函数时式(3.6.5)必处处成立. $\forall \varepsilon > 0$,取 $g \in C_c(\mathbb{R}^n, E)$,使得 $\|f - g\|_1 < \varepsilon$(由定理 3.5.1). 任给 $\beta > 0$,令

$$A_\beta = \{M(f-g) > \beta\}, \quad B_\beta = \{|f - g| > \beta\},$$

$$C_\beta = \{x : \overline{\lim_{r\to 0}} \|A_r f(x) - f(x)\| > \beta\}.$$

由定理 3.6.2 有 $\beta m A_\beta < 3^n \varepsilon$, 直接看出 $\beta m B_\beta < \varepsilon$,

$$\text{式 (3.6.5) 不成立} \Leftrightarrow \exists \beta > 0 : x \in C_\beta \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\beta > 0} C_\beta.$$

因此只要证 $mC_\beta = 0(\beta > 0)$,这有赖于建立 C_β 与 A_β, B_β 的联系. 由

$$\overline{\lim_{r\to 0}} \|A_r f(x) - f(x)\|$$

$$\leqslant \overline{\lim_{r\to 0}}[\ \|A_rf(x)-A_rg(x)\| + \|A_rg(x)-g(x)\|\ ] + \|g(x)-f(x)\|$$

$$\leqslant \|M(f-g)(x)\| + \|g(x)-f(x)\|$$

推出 $C_{2\beta}\subset A_\beta\cup B_\beta$，从而 $\beta m\, C_{2\beta}\leqslant \varepsilon(3^n+1)$. 这得出 $mC_\beta=0(\ \forall\beta>0)$，如所要证.

(ii) 证式(3.6.4)几乎处处成立. 不妨设 $f(\mathbb{R}^n)\subset\overline{\{a_i\}}$，$\{a_i\}\subset E$ 是一可数集(依定理 3.2.1). 由已证结论，$\forall i\in\mathbb{N}$，有

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{V(r)}\int_{B_r(x)}\|f(y)-a_i\|\,\mathrm{d}y = \|f(x)-a_i\|,\text{a. e.}.$$

于是，对几乎所有 $x\in\mathbb{R}^n$ 有

$$\overline{\lim_{r\to 0}}\frac{1}{V(r)}\int_{B_r(x)}\|f(y)-f(x)\|\,\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \inf_i\left[\overline{\lim_{r\to 0}}\frac{1}{V(r)}\int_{B_r(x)}\|f(y)-a_i\|\,\mathrm{d}y + \|a_i-f(x)\|\right]$$

$$= \inf_i 2\|f(x)-a_i\| = 0,$$

这正表明式(3.6.4)几乎处处成立. □

定理 3.6.3 的结论可稍作变通使用.

推论 3.6.1　设 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n,E)$，集 $B_r(r>0)$ 满足条件

$$B_r\subset\bar{B}_r(0)\subset\mathbb{R}^n,\qquad \sup_{r>0}V(r)/mB_r<\infty,\tag{3.6.9}$$

则对几乎所有 $x\in\mathbb{R}^n$ 成立

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{mB_r}\int_{x+B_r}\|f(y)-f(x)\|\,\mathrm{d}y = 0,\tag{3.6.10}$$

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{mB_r}\int_{x+B_r}f(y)\,\mathrm{d}y = f(x).\tag{3.6.11}$$

特别地，取 $n=1$，$B_r=[0,r)$ 与 $B_r=(-r,0]$ 得出：若 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},E)$，则式(3.6.6)几乎处处成立.

任给 Lebesgue 可测集 $A\subset\mathbb{R}^n$，将式(3.6.11)用于 $f=\xi_A$ 得出

$$\lim_{r\to 0}\frac{m(A\cap B_r(x))}{mB_r(x)} = \xi_A(x),\text{a. e.}.\tag{3.6.12}$$

式(3.6.12)左端称为 A 在点 x 的**度量密度**. 由此可见，A 在几乎每点 $x\in A$ 的度量密度为 1. 这在直观上未必是显然的.

现在利用定理 3.6.3 来给出 R-N 导数的某种表示.

定理 3.6.4　设 $\nu\in M(\mathbb{R}^n)$，$\nu=\nu_a+\nu_s$ 是 ν 关于 Lebesgue 测度 m 的 Lebesgue 分解(由定理 3.3.3)，集 $B_r(r>0)$ 满足条件(3.6.9)，则对几乎所有 $x\in\mathbb{R}^n$ 有

$$\frac{\mathrm{d}\nu_a}{\mathrm{d}m}(x) = \lim_{r\to 0}\frac{\nu(x+B_r)}{mB_r}.\tag{3.6.13}$$

特别地,取 $n = 1, B_r = [0,r)$ 与 $B_r = [-r,0)$ 得出

$$\frac{\mathrm{d}\nu_a}{\mathrm{d}m}(x) = \frac{\mathrm{d}\nu([0,x))}{\mathrm{d}x}, \text{a. e. .} \tag{3.6.14}$$

证 取 $f = \mathrm{d}\nu_a/\mathrm{d}m$ 从式(3.6.11)得出

$$\frac{\mathrm{d}\nu_a}{\mathrm{d}m}(x) = \lim_{r\to 0}\frac{\nu_a(x+B_r)}{mB_r}, \text{a. e. ,}$$

余下只要证

$$\lim_{r\to 0}\frac{\nu_s(x+B_r)}{mB_r} = 0, \text{a. e. .}$$

可设 $\nu_s \geqslant 0$(否则代以 $|\nu_s|$)且 $B_r = B_r(0)$. 令

$$W_k = \left\{x \in B_k(0) : \overline{\lim_{r\to 0}}\frac{\nu_s(x+B_r)}{mB_r} > \frac{1}{k}\right\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

只要证 $mW_k = 0(k \in \mathbb{N})$. 由定理3.3.3,存在 $A \subset \mathbb{R}^n$,使得 $\nu_s(A) = mA^c = 0$. $\forall \varepsilon > 0$,取开集 $U \supset A$,使 $\nu_s(U) < \varepsilon$. $\forall x \in A \cap W_k$,取 $r_x > 0$,使得 $B_x \triangleq B_{r_x}(x) \subset U, V(r_x) < k\nu_s(B_x)$. 因

$$mW_k - \varepsilon = m(A \cap W_k) - \varepsilon < m(A \cap W_k),$$

故由引理3.6.1有有限个互不相交的球 B_{x_i},使得

$$mW_k - \varepsilon < 3^n \sum_i V(r_{x_i}) < 3^n k \sum_i \nu_s(B_{x_i})$$

$$= 3^n k\nu_s(\bigcup_i B_{x_i}) \leqslant 3^n k\nu_s(U) < 3^n k\varepsilon,$$

这得出 $mW_k = 0$,如所要证. □

由定理3.6.4推出:若 $\nu \in M(\mathbb{R}^n)$ 且 $\nu \ll m$,则

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m}(x) = \lim_{r\to 0}\frac{\nu(B_r(x))}{mB_r(x)}, \text{a. e. .}$$

由此看来, $\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}m$ 还真像 ν 对 m 的某种导数了.

3.7 Stieltjes 积分

在本章中,从一般测度空间上的积分开始,依次考虑了 LCH 上的积分、$\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 积分,经历了一个从一般到特殊的有点冗长的过程,现在就要进入区间上的积分了. 最后这个特殊的情况看似平淡无奇,但恰好在这里可以进行最精细的讨论,形成一些在其他情况下无法考虑的概念与结论. 顺便指出,Lebesgue 所创立的积分论,当初就是对区间上的实函数建立的.

本节考虑互有联系的如下3项内容:有界变差函数、RS 积分与 LS 积分. 为此设定记号如下: $J = [a,b] \subset \mathbb{R}, f: J \to E, g: J \to \mathbb{K}$. 以 $P = \{x_i\}$ 记 J 的分划

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \tag{3.7.1}$$

约定 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta f(x_i) = f(x_i) - f(x_{i-1}), |P| = \max\limits_i \Delta x_i$,

$$V(f,P) = \sum_1^n \| \Delta f(x_i) \|.$$

首先定义以有界变差函数为中心的一串概念.

定义 3.7.1　(i) 令 $\mathrm{V}(f) = \sup\{V(f,P): P$ 是形如(3.7.1)的分划$\}$,称 $\mathrm{V}(f)$ 为 f 在 J 上的全变差,$\mathrm{V}(f)$ 也写作 $\mathrm{V}_a^b(f)$. 对于 $f: \mathbb{R} \to E$ 规定

$$\mathrm{V}(f) = \mathrm{V}_{-\infty}^{\infty}(f) = \lim_{a\to-\infty, b\to\infty} \mathrm{V}_a^b(f). \tag{3.7.2}$$

(ii) 若 $\mathrm{V}(f) < \infty$,则称 f 为 J 上的**有界变差函数**,此种函数之全体记作 BV 或 BV (J,E).

(iii) 设 $J \subset \mathbb{R}$ 是任一区间(不必限定为$[a,b]$). 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,对任一列内部互不相交的区间$[\alpha_i,\beta_i] \subset J$,

$$\sum_i (\beta_i - \alpha_i) < \delta \Rightarrow \sum_i \| f(\beta_i) - f(\alpha_i) \| < \varepsilon, \tag{3.7.3}$$

则称 f 为 J 上的**绝对连续函数**,这种函数之全体记作 AC 或 AC (J,E).

(iv) 若 $\forall \varphi \in E^*$,有 $\varphi \circ f \in$ BV(或 $\varphi \circ f \in$ AC),则称 f 为**弱有界变差函数**(或**弱绝对连续函数**),这种函数之全体记作 WBV(或 WAC).

粗略地说,$\mathrm{V}(f)$ 汇总了 f 在 J 上的变动或振动,$\mathrm{V}(f)$ 越大,f 的变动就越剧烈,反之则越平缓. $f \in$ BV 体现了 f 的某种平稳性,它导致一系列较强的结论(见定理 3.7.1). 若 $f \in$ AC,则 f 的变动更加平缓.

已提到的几个函数类有如下关系:

$$\mathrm{AC} \Rightarrow \mathrm{BV} \Rightarrow \mathrm{WBV}, \quad C^1 \Rightarrow \mathrm{Lip} \Rightarrow \mathrm{AC} \Rightarrow \mathrm{WAC},$$

其中, Lip 表示 Lipschitz 连续函数类, $C^1 \Rightarrow$ Lip 用于紧区间上的函数. AC $\Rightarrow$ BV 的理由如下:设 $f \in$ AC, ε,δ 依条件(3.7.3),取 J 的分划 P 如(3.7.1),使 $|P| < \delta$,则由条件(3.7.3)推出 $\mathrm{V}_{x_{i-1}}^{x_i}(f) \leqslant \varepsilon (1 \leqslant i \leqslant m)$. 于是

$$\mathrm{V}_a^b(f) = \sum_{i=1}^n \mathrm{V}_{x_{i-1}}^{x_i}(f) \leqslant n\,\varepsilon < \infty.$$

定义 3.7.1 中的条件可作某些形式上的放松,这将有助于条件的验证. 首先易看出,条件(3.7.3)中的区间族 $\{[\alpha_i,\beta_i]\}$ 为有限族或可数族并无区别. 表面上合理性并不明显的改动是

命题 3.7.1　(i) $f \in \mathrm{WBV} \Leftrightarrow M \triangleq \sup \| \sum [f(\beta_i) - f(\alpha_i)] \| < \infty$, sup 是对 J 中所有互不相交区间的有限组$\{(\alpha_i,\beta_i)\}$ 取的;

(ii) $f \in \mathrm{WBV} \Rightarrow \mathrm{V}(\varphi \circ f) \leqslant c \| \varphi \|, c > 0$ 与 $\varphi \in E^*$ 无关;

(iii) $g \in \mathrm{AC} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,对任一列内部互不相交的区间$[\alpha_i,\beta_i] \subset J$,当 $\sum (\beta_i - \alpha_i) < \delta$ 时 $|\sum [g(\beta_i) - g(\alpha_i)]| < \varepsilon$.

证 (i) 取定 $\varphi \in E^*$,设区间 J 的分划 P 依式(3.7.1),令 $\delta_i = \varphi(\Delta f(x_i))$, 则

$$\begin{aligned}\sum_i |\operatorname{Re}\delta_i| &= \left|\sum{}^+\operatorname{Re}\delta_i\right| + \left|\sum{}^-\operatorname{Re}\delta_i\right| \\ &= \left|\operatorname{Re}\sum{}^+\delta_i\right| + \left|\operatorname{Re}\sum{}^-\delta_i\right| \\ &\leqslant \left|\sum{}^+\delta_i\right| + \left|\sum{}^-\delta_i\right| \\ &\leqslant \|\varphi\|\left[\left\|\sum{}^+\Delta f(x_i)\right\| + \left\|\sum{}^-\Delta f(x_i)\right\|\right] \leqslant 2M\|\varphi\|,\end{aligned}$$

其中, $\sum^+$ 与 $\sum^-$ 中分别汇集使 $\operatorname{Re}\delta_i > 0$ 与 $\operatorname{Re}\delta_i < 0$ 的项. 同理, $\sum|\operatorname{Im}\delta_i| \leqslant 2M\|\varphi\|$, 因而

$$V(\varphi\circ f, P) = \sum_i |\delta_i| \leqslant 4M\|\varphi\|.$$

于是 $\mathrm{V}(\varphi\circ f) \leqslant 4M\|\varphi\|$,$M < \infty \Rightarrow f \in \mathrm{WBV}$. 逆命题由一致有界原理推出.

(ii) 由已得的不等式 $\mathrm{V}(\varphi\circ f) \leqslant 4M\|\varphi\|$ 看出.

(iii) 可用类似于证(i) 的方法证明. □

看一个应用命题 3.7.1 的简单例子. 取 $E = B(J)$,f: $J \to E$ 定义为 $f(x) = \xi_{[a,x]}(x \in J)$. 若 (α_i,β_i) 是 J 的互不相交的子区间,则

$$\left\|\sum_i[f(\beta_i) - f(\alpha_i)]\right\|_0 = \left\|\sum_i \xi_{(\alpha_i,\beta_i]}\right\|_0 = 1.$$

可见 $f \in \mathrm{WBV}$. 另一方面,若 $P = \{x_i\}$ 是如式(3.7.1) 的分划,则 $\sum\|\Delta f(x_i)\| = n$,因而 $f \notin \mathrm{BV}$.

下面的定理汇集了有界变差函数的主要性质.

定理 3.7.1 设 $f \in \mathrm{BV}, v(x) = \mathrm{V}_a^x(f)$, 则以下结论成立:

(i) $\|\Delta f(x,\delta)\| \leqslant \Delta v(x,\delta)(a \leqslant x < x+\delta \leqslant b)$, $v(x)$ 是增函数, 实有界变差函数是两个增函数之差, 复有界变差函数几乎处处可微;

(ii) $\forall x \in J, f(x^{\pm}) = \lim\limits_{\delta\to 0^{\pm}} f(x+\delta)$ 存在;

(iii) f 在 $x \in J$ 左连续(或右连续) $\Leftrightarrow$ v 在 x 左连续(或右连续),因而 f 如 v 一样至多有可数多个间断点.

(iv) 存在唯一的 $\eta \in E$ 与 $h \in \mathrm{BV}$,使得 h 右连续,$h(a) = 0, \mathrm{V}(h) \leqslant \mathrm{V}(f)$, 在 f 的右连续点 x 有 $f(x) = \eta + h(x)$.

证 (i) 首先指出全变差有可加性: $\mathrm{V}_a^b = \mathrm{V}_a^c + \mathrm{V}_c^b(a < c < b)$. 因此 $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \mathrm{V}_x^y(f) = v(y) - v(x)(x < y)$. 余下结论由增函数的性质推出.

(ii) 由不等式 $\|\Delta f(x,\delta)\| \leqslant \Delta v(x,\delta)(\delta > 0)$ 及增函数 $v(x)$ 的性质推出.

(iii) 若 v 在 x 左(或右)连续,则用(i)中的不等式立得 f 在 x 左(或右) 连续. 今证其逆,不妨只证 $f(a) = f(a^+) \Rightarrow v(a^+) = 0$. $\forall\varepsilon > 0$,取 J 的分划 $P = \{x_i\}$,

使得 $V(f,P) > v(b) - \varepsilon$, $\|\Delta f(x_1)\| < \varepsilon$,则

$$v(x_1) = v(b) - \mathrm{V}_{x_1}^b(f) < \|\Delta f(x_1)\| + \varepsilon < 2\varepsilon,$$

这得出 $v(a^+) = 0$.

(iv) 若 η 与 h 如所求,则必 $h(y) = f(y) - \eta$,a. e.. 令 $y \to x^+$ 得 $h(x) = f(x^+) - \eta$,$\eta = f(a^+)$,可见 h 与 η 由 f 唯一确定. 令 $h(x) = f(x^+) - f(a^+)$,则 $h \in \mathrm{BV}$,h 右连续且 $h(a) = 0$. 设 $P = \{x_i\}$ 如式(3.7.1),则

$$V(h,P) = \lim_{\delta \to 0^+} \sum_i \|f(x_i + \delta) - f(x_{i-1} + \delta)\| \leqslant \mathrm{V}(f),$$

这推出 $\mathrm{V}(h) \leqslant \mathrm{V}(f)$. 可见 h 与 $\eta = f(a^+)$ 合于所求. □

绝对连续函数介于 C^1 函数与连续函数之间 . 从经典实分析中知道,引进绝对连续函数的主要目的是建立 Newton-Leibniz 公式

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in J. \tag{3.7.4}$$

现在要指明,在 f 是 E 值绝对连续函数的情况下,式(3.7.4)"几乎" 保持成立.

定理 3.7.2 (i) 设 $f \in \mathrm{AC}$. 若 f 几乎处处可微,则式(3.7.4) 成立;

(ii) 若 $f(x) = f(a) + \int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t\,(x \in J)$,$h \in L^1(J,E)$,则 $f \in \mathrm{AC}$,$f' = h$,a. e. , 因而式(3.7.4) 成立; $\mathrm{V}_a^b(f) = \|h\|_1$.

证 (i) 不妨设 $J = [0,1]$,令 $e_{ni} = [(i-1)2^{-n}, i2^{-n}]$,

$$f_n = \sum_{i=1}^{2^n} 2^n \left[f\left(\frac{i}{2^n}\right) - f\left(\frac{i-1}{2^n}\right) \right] \xi_{e_{ni}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

如同初等微分学中一样容易验证:若 $f'(x)$ 存在,则

$$\lim_{\alpha \to x^-, \beta \to x^+} \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(x).$$

用此得出 $f_n \to f'$,a. e. $(n \to \infty)$. 由 Fatou 定理有

$$\int_0^1 \|f'(x)\|\,\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_n \int_0^1 \|f_n(x)\|\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{V}(f),$$

可见 $f' \in L^1$. $\forall \varphi \in E^*$,对 $\varphi \circ f$ 应用经典实分析中的已知结果得

$$\varphi(f(x)) = \varphi(f(a)) + \int_a^x \varphi(f'(t))\,\mathrm{d}t, \quad x \in J,$$

然后用推论 1.6.1 得出式(3.7.4)成立.

(ii) 由定义 3.7.1(iii) 及命题 3.1.2(vii)知 $f \in \mathrm{AC}$;由推论 3.6.1 有 $f' = h$, a. e. , 故式(3.7.4)成立. 往下证 $\mathrm{V}_a^b(f) = \|h\|_1$. 容易看出 $\mathrm{V}_a^b(f) \leqslant \|h\|_1$. 另一方面,不难由定理 3.5.1 推出 J 上的阶梯函数在 $L^1(J,E)$ 中稠密. $\forall \varepsilon > 0$,取 $\varphi = \sum a_i \xi_{\Delta_i}$,$a_i \in E$,$\Delta_i = [x_{i-1}, x_i)\,(1 \leqslant i < n)$,$\Delta_n = [x_{n-1}, x_n]$,$\{x_i\}$ 是 J 的形如式(3.7.1) 的分划,使得 $\|\varphi - h\|_1 < \varepsilon$, 则

$$\begin{aligned} V_a^b(f) &\geqslant \sum_i \| \Delta f(x_i) \| = \sum_i \left\| \int_{\Delta_i} h \mathrm{d}t \right\| \\ &\geqslant \sum_i \left[\left\| \int_{\Delta_i} \varphi \mathrm{d}t \right\| - \int_{\Delta_i} | \varphi - h | \mathrm{d}t \right] \\ &= \| \varphi \|_1 - \| \varphi - h \|_1 \geqslant \| h \|_1 - 2\varepsilon, \end{aligned}$$

这得出 $V_a^b(f) \geqslant \| h \|_1$,因而 $V_a^b(f) = \| h \|_1$. □

定理3.7.2(i)中需要预设"f 几乎处处可微",这当然不能令人满意. 不过,如 Gelfand 所指出的,若 E 是自反空间(特别若 $E = \mathbb{K}$)则可免去此假设. 当 $E = \mathbb{K}$ 时也可直接用定理3.7.1(i)得出 f 几乎处处可微. 若 E 非自反空间,则 $f \in AC(J,E)$ 可以处处不可微,以下就是一个简单例子:取 $E = L^1(J)$,$f(x) = \xi_{[a,x]}(x \in J)$,则对任给 $(\alpha,\beta) \subset J$,有 $\| f(\beta) - f(\alpha) \|_1 = (\beta - \alpha)$,由此看出 $f \in AC(J,E)$. 取定 $x \in [a,b]$,设 $x < x + l = x + 2h \leqslant b$,则

$$\begin{aligned} &\| h^{-1}\Delta f(x,h) - l^{-1}\Delta f(x,l) \|_1 \\ &= \| (h^{-1} - l^{-1})\xi_{(x,x+h]} - l^{-1}\xi_{(x+h,x+l]} \|_1 = 1, \end{aligned}$$

这表明 $f'(x)$ 不存在.

下面转向 RS 积分,它是 Riemann 积分的一个直接推广. 以 $P = \{x_i, \xi_i\}$ 记 J 的如下分划:

$$a = x_0 \leqslant \xi_1 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant \xi_n \leqslant x_n = b. \tag{3.7.5}$$

仍设 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$,$| P | = \max\limits_i \Delta x_i$. 令

$$\begin{cases} S_P(f,g) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta g(x_i), \\ S_P(g,f) = \sum\limits_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta f(x_i). \end{cases} \tag{3.7.6}$$

定义3.7.2 若以下极限存在:

$$\int_a^b f \mathrm{d}g = \lim_{|P| \to 0} S_P(f,g), \tag{3.7.7}$$

$$\int_a^b g \mathrm{d}f = \lim_{|P| \to 0} S_P(g,f), \tag{3.7.8}$$

则二者分别称为函数对 (f,g) 与 (g,f) 的 **Riemann-Stieltjes 积分**,简称为 RS 积分.

设 $\mathscr{P}$ 是形式(3.7.5) 的分划的全体. 任给 $P,P' \in \mathscr{P}$,约定 $P \leqslant P' \Leftrightarrow | P | \geqslant | P' |$,则 $(\mathscr{P}, \leqslant)$ 是一个有向集,因而 $\{S_P(f,g)\}$ 与 $\{S_P(g,f)\}$ 是 E 中的两个网,而积分 $\int_a^b f \mathrm{d}g$ 与 $\int_a^b g \mathrm{d}f$ 都是作为网的极限而定义的. 若取 $g(x) \equiv x$,则由式(3.7.7) 定义的 $\int_a^b f \mathrm{d}g = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x$ 就是 Riemann 积分(见式(2.1.22)). 由此可见,即使描述 Riemann 积分,网的极限概念也是不可缺少的,只是通常未正式提到罢了.

若令 $\xi_0 = a, \xi_{n+1} = b, \Delta f(\xi_i) = f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})$，则可验证恒等式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta g(x_i) + \sum_{i=1}^{n+1} g(x_{i-1})\Delta f(\xi_i) = fg\Big|_a^b.$$

可见只要积分 $\int_a^b f\mathrm{d}g$ 与 $\int_a^b g\mathrm{d}f$ 之一存在，另一个亦必存在且成立**分部积分公式**

$$\int_a^b f\mathrm{d}g = fg\Big|_a^b - \int_a^b g\mathrm{d}f. \tag{3.7.9}$$

形式上，这与微积分学中的分部积分公式并无不同. 但要强调的一个区别是，式(3.7.9)完全不涉及函数 f 与 g 的微分，其中，$\mathrm{d}f$ 与 $\mathrm{d}g$ 只不过是一个记号而已. 式(3.7.9) 的意义在于，它使得积分 $\int_a^b f\mathrm{d}g$ 与 $\int_a^b g\mathrm{d}f$ 可互相转化，因而关于其中任一个积分的结论自动导致对另一个积分的相应结论. 因此，关于 RS 积分的命题往往是成对出现的.

判定 RS 积分的存在性，无疑是一个首要问题. 因 RS 积分是作为网的极限定义的，故需要一个判定网收敛的一般准则，它是熟知 Cauchy 收敛准则的推广.

引理 3.7.1　设 $\{S_t\}$ 是 Banach 空间 E 中的网，则 $\{S_t\}$ 收敛当且仅当它满足如下 Cauchy 条件(对照条件(1.2.1))：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists t_0, \forall s,t \geqslant t_0, \text{有 } \|S_s - S_t\| < \varepsilon. \tag{3.7.10}$$

证　对于 $\{S_t\}$ 收敛，条件(3.7.10) 显然是必要的. 反之，设条件(3.7.10) 满足，则可依次取出下标 $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots$，使得

$$\|S_t - S_{t_n}\| < \frac{1}{n}, \quad \forall t \geqslant t_n, n \in \mathbb{N}. \tag{3.7.11}$$

由式(3.7.11)显然推出 $\{S_{t_n}\}$ 是一个 Cauchy 序列. 由 E 的完备性，必 $S_{t_n} \to S \in E(n \to \infty)$，然后用条件(3.7.11)易推出 $S_t \to S$，故 $\{S_t\}$ 是一收敛网. □

满足条件(3.7.10)的网称为 **Cauchy 网**. 显然，Cauchy 序列是 Cauchy 网的特例. 引理 3.7.1 无非是说，Banach 空间中的一个网收敛的充要条件是它是 Cauchy 网. 下面用此结论来判定 RS 积分的存在性.

定理 3.7.3　当以下两条件之一满足时，定义 3.7.2 中的两积分均存在：

(i) $f \in C(J,E), g \in \mathrm{BV}$；

(ii) $f \in \mathrm{WBV}, g \in C(J)$.

证　只要考虑条件(ii)满足的情况(f 与 g 换位，即转化为条件(i)满足的情况)，且只要证 $S_P(g,f)$ (由式(3.7.6))满足 Cauchy 条件. $\forall \varepsilon > 0$，由 g 连续有 $\delta > 0$，使当 $x, y \in J, |x - y| < \delta$ 时有 $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$. 设 $P, P' \in \mathscr{P}, P = \{x_i, \xi_i\}, P' = \{y_j, \eta_j\}, |P| \vee |P'| < \delta$. 令 $P'' = \{z_k, \zeta_k\}$，其中，$\{z_k\} = \{x_i\} \cup \{y_j\}$，$\zeta_k = z_k$. 令 $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i], \Delta_k'' = [z_{k-1}, z_k]$. $\forall \varphi \in E^*$，有

$$|\varphi(S_P(g,f) - S_{P''}(g,f))|$$

$$
\begin{aligned}
&= | S_P(g,\varphi\circ f) - S_{P''}(g,\varphi\circ f) | \\
&= \left| \sum_i \sum_{\Delta_k''\subset\Delta_i} [g(\xi_i) - g(z_k)]\varphi(\Delta f(z_k)) \right| \\
&\leqslant \varepsilon \sum_k | \Delta(\varphi\circ f)(z_k) | \\
&\leqslant \varepsilon \mathrm{V}(\varphi\circ f) \leqslant \varepsilon c \| \varphi \| ,
\end{aligned}
$$

最后一步用了命题3.7.1(ii)，$c > 0$ 与 ε,φ 无关. 这就得到

$$\| S_P(g,f) - S_{P''}(g,f) \| \leqslant c\,\varepsilon$$

(由式(1.6.9)). 同理，$\| S_{P'}(g,f) - S_{P''}(g,f) \| \leqslant c\,\varepsilon$,因此

$$\| S_P(g,f) - S_{P'}(g,f) \| \leqslant 2c\,\varepsilon.$$

这表明 Cauchy 条件满足,如所要证. □

下面的命题汇集了 RS 积分的一些常用性质.

命题3.7.2 RS 积分有以下性质:

(i) 双线性性: $\int_a^b f\mathrm{d}g$ 分别对 f 与 g 是线性的;

(ii) 可加性:若 $\int_a^b f\mathrm{d}g$ 存在(注意这是前提!),$a < c < b$,则

$$\int_a^b f\mathrm{d}g = \int_a^c f\mathrm{d}g + \int_c^b f\mathrm{d}g;$$

(iii) 若 $f \in C(J,E)$,$g \in \mathrm{BV}$,则

$$\left\| \int_a^b f\mathrm{d}g \right\| \leqslant \|f\|_0 \mathrm{V}(g); \tag{3.7.12}$$

(iv) 化为 Lebesgue 积分:若 f 连续(或 $f \in \mathrm{BV}$),$g \in \mathrm{AC}$,则

$$\int_a^b f\mathrm{d}g = \int_a^b fg'\mathrm{d}x. \tag{3.7.13}$$

鉴于 RS 积分与 Riemann 积分构成上的类似性,性质(i)与(ii)是很自然的. 性质(iii)与(iv)则体现出 RS 积分的特殊性. 交换 f 与 g 的地位,命题3.7.2 中的结论(i)~(iv)仍保持有效,只是对于(iv)要补充假定 f 几乎处处可微,除非 E 是自反空间.

证 利用定义式(3.7.7),结论(i)~(iii)的证明是直接的. 下面只证(iv). 在(iv)的条件下,式(3.7.13)两边的积分均存在. 首先设 f 连续,任取形如(3.7.1)的分划 $P = \{x_i\}$,则

$$
\begin{aligned}
I &\triangleq \left\| \sum_i f(x_i)\Delta g(x_i) - \int_a^b fg'\mathrm{d}x \right\| \\
&= \left\| \sum_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x_i) - f(x)]g'(x)\mathrm{d}x \right\| \\
&\leqslant \max_{x\in\Delta_i, 1\leqslant i\leqslant n} \|f(x_i) - f(x)\| \int_a^b | g'(x) | \mathrm{d}x \to 0, \quad | P | \to 0,
\end{aligned}
$$

其中，$\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$. 若改设 $f\in \mathrm{BV}$，则

$$I\leqslant\sum_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}\mathrm{V}_x^{x_i}(f)\mid g'(x)\mid \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \mathrm{V}(f)\max_i\int_{\Delta_i}\mid g'(x)\mid \mathrm{d}x\to 0,\quad \mid P\mid\to 0,$$

最后一步用了 Lebesgue 积分的绝对连续性(见命题 3.1.2(vii)). 可见，在以上两种情况下式(3.7.13)均成立. □

式(3.7.13)将 RS 积分与 Lebesgue 积分联系起来，因而可能将 Lebesgue 积分论的丰富结论用于 RS 积分，这无疑是有意义的. 但要求 $g\in \mathrm{AC}$ 并不易满足.

RS 积分与本章前面建立的积分论少有联系而自成一体，这似乎不能令人满意. 现在就要来消除这种表面上的隔离. 关键步骤是建立 $\mathbb{R}$ 上的$\mathbb{K}$ 值测度与有界变差函数的联系. 任给 $\nu\in M(\mathbb{R})$，令

$$g_\nu(x)=\nu((-\infty,x]),\quad x\in\mathbb{R},\tag{3.7.14}$$

则 g_ν 是$\mathbb{R}$ 上的有界$\mathbb{K}$ 值函数. g_ν 有以下性质:

$$g_\nu(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}g_\nu(x)=\nu(\varnothing)=0,$$

$$g_\nu(\infty)=\lim_{x\to\infty}g_\nu(x)=\nu(\mathbb{R})\in\mathbb{K},$$

$$g_\nu(x^+)=\lim_{y\to x^+}g_\nu(y)=g_\nu(x).$$

以上结论均依据的 ν 的连续性(见命题 3.3.1(v)). 例如，设实数列 $x_n\searrow x$，则

$$\lim_n g_\nu(x_n)=\lim_n\nu((-\infty,x_n])=\nu(\bigcap_n(-\infty,x_n])$$

$$=\nu((-\infty,x])=g_\nu(x).$$

任给形如(3.7.1)的分划，有

$$\sum_i\mid \Delta g_\nu(x_i)\mid=\sum_i\mid\nu((x_{i-1},x_i])\mid\leqslant\|\nu\|$$

(由式(3.3.1))，故 $\mathrm{V}_a^b(g_\nu)\leqslant\|\nu\|$，从而 $\mathrm{V}(g_\nu)=\mathrm{V}_{-\infty}^{\infty}(g_\nu)\leqslant\|\nu\|$. 以上事实促使我们考虑函数类

$$\mathrm{NBV}=\{g: g\text{ 是}\mathbb{R}\text{ 上右连续的}\mathbb{K}\text{ 值函数，有有限极限 }g(\infty)$$
$$\text{与 }g(-\infty)=0,\mathrm{V}(g)=\mathrm{V}_{-\infty}^{\infty}(g)<\infty\}.\tag{3.7.15}$$

作了以上准备之后，现在来建立如下基本定理:

定理 3.7.4　设 NBV 依(3.7.15)，g_ν 依式(3.7.14)，则以下结论成立:

(i) NBV 以 $\mathrm{V}(g)$ 作为范数是一个 Banach 空间，且

$$M(\mathbb{R})\to\mathrm{NBV},\quad \nu\to g_\nu\tag{3.7.16}$$

是一个等距同构;

(ii) $\nu\ll m\Leftrightarrow g_\nu\in\mathrm{AC}\Leftrightarrow \mathrm{d}\nu=g_\nu'\mathrm{d}m,\nu\perp m\Leftrightarrow g_\nu'=0$, a. e. ;

(iii) ν 是实测度 $\Leftrightarrow g_\nu$ 是实函数，ν 是正测度 $\Leftrightarrow g_\nu$ 是增函数.

证　(i) 易验知 $\nu\to g_\nu$ 是一线性单射且已确立 $\mathrm{V}(g_\nu)\leqslant\|\nu\|$. 如同已熟知的

类似结果的证明(如定理3.5.2，定理3.5.3)，只要对给定的$g \in \mathrm{NBV}$，找到$\nu \in M(\mathbb{R})$，使得$g = g_\nu$且$\|\nu\| \leqslant \mathrm{V}(g)$. 为此拟用定理3.5.3. 定义

$$L(\varphi) = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b}\varphi \mathrm{d}g, \quad \varphi \in C_0(\mathbb{R}). \tag{3.7.17}$$

取定$\varphi \in C_0(\mathbb{R})$，任给$J = [a,b] \subset \mathbb{R}$，由定理3.7.3知$\int_a^b \varphi \mathrm{d}g$存在. 由式(3.7.12)有

$$\left|\int_a^b \varphi \mathrm{d}g\right| \leqslant \|\varphi\|_J \mathrm{V}_a^b(g) \leqslant \|\varphi\|_J \mathrm{V}(g),$$

其中，$\|\varphi\|_J = \sup\limits_{x\in J}|\varphi(x)|$. 因当$a,b \to -\infty$或$a,b\to\infty$时均有$\|\varphi\|_J \to 0$，从而$\int_a^b \varphi \mathrm{d}g \to 0$，故由传统的 Cauchy 收敛判别法知式(3.7.17)右端之极限存在. $L(\varphi)$显然是线性的(由命题3.7.2(i))且$|L(\varphi)| \leqslant \|\varphi\|_0 \mathrm{V}(g)$，故$L \in C_0(\mathbb{R})^*$且$\|L\| \leqslant \mathrm{V}(g)$. 由定理3.5.3，存在$\nu \in M(\mathbb{R})$，使得

$$\int_{\mathbb{R}}\varphi \mathrm{d}\nu = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b}\varphi \mathrm{d}g, \quad \varphi \in C_0(\mathbb{R}) \tag{3.7.18}$$

且$\|\nu\| = \|L\| \leqslant \mathrm{V}(g)$. 余下说明$g = g_\nu$，即

$$\nu((-\infty,x]) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.7.19}$$

取定$x \in \mathbb{R}$. 作$\varphi_n \in C_0(\mathbb{R})$，使$\varphi_n | [-n,x] = 1$，在区间$[-n-n^{-1}, x+n^{-1}]$之外$\varphi_n = 0$，在$[-n-n^{-1}, -n]$与$[x, x+n^{-1}]$上$\varphi_n$是线性函数，则依点态收敛有$\varphi_n \to \varphi \triangleq \xi_{(-\infty,x]}(n\to\infty)$. 于是

$$\nu((-\infty,x]) = \int_{\mathbb{R}}\varphi \mathrm{d}\nu = \int_{\mathbb{R}}(\varphi - \varphi_n)\mathrm{d}\nu + \int_{\mathbb{R}}\varphi_n \mathrm{d}\nu \triangleq I_1 + I_2.$$

首先由控制收敛定理3.3.6推出$I_1 \to 0(n\to\infty)$. 其次，取$b > 0$充分大，则由式(3.7.18)与分部积分有

$$I_2 = \int_{-b}^{b}\varphi_n \mathrm{d}g = -n\int_{-n-n^{-1}}^{-n} g(t)\mathrm{d}t + n\int_{x}^{x+n^{-1}} g(t)\mathrm{d}t,$$

然后用g右连续及$g(-\infty) = 0$，即得$I_2 \to g(x)(n\to\infty)$. 于是证得式(3.7.19).

一旦验证了式(3.7.16)为同构且$\|\nu\| = \mathrm{V}(g_\nu)$，$\mathrm{V}(g)$就必定为 NBV 上的范数且 NBV 依此范数为 Banach 空间，而不必另外单独验证.

(ii) 设$\nu = \nu_a + \nu_s$是ν的 Lebesgue 分解(由定理3.3.3)，则$g = g_\nu$相应地有分解$g = g_a + g_s$. 由定理3.6.4，对几乎所有$x \in \mathbb{R}$，有

$$\frac{\mathrm{d}\nu_a}{\mathrm{d}m}(x) = \lim_{y\to x^+}\frac{\nu_a((x,y])}{y-x} = g_a'(x),$$

而 $g_s'(x) = 0$, a. e.. 因此 $g' = g_a'$, a. e. , $d\nu_a = g'dm$. 这就得出 $\nu \ll m \Leftrightarrow d\nu = g'dm$, $\nu \perp m \Leftrightarrow \nu_a = 0 \Leftrightarrow g' = 0$, a. e.. 若 $\nu \ll m$,则

$$g(x) = \nu((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} g'(t)dt,$$

这推出 $g \in AC$. 反之,若 $g \in AC$,则对任给 $a, b \in \mathbb{R}, a < b$,有

$$\nu((a,b)) = g(b) - g(a) = \int_a^b g'(x)dx.$$

这又推出:对任何开集 $U \subset \mathbb{R}$,有 $\nu(U) = \int_U g'dm$. 于是由推论3.4.1推出 $d\nu = g'dm$.

(iii) 若 ν 是实测度(或正测度),则 g_ν 显然是实函数(或增函数). 反之,设 g_ν 是增函数. 定义 $\mu(a,b) = g_\nu(b^-) - g_\nu(a)\ (a < b)$, 则用一个标准的程序构成 $\mathbb{R}$ 上的有限 Borel 测度 μ,对任何开集 $V \subset \mathbb{R}$ 有 $\mu V = \nu(A)$. 因由推论3.4.1有 $\mu = \nu$,故 ν 是正测度. 若 g_ν 是实函数,则它可表为两增函数之差,这就说明 ν 为实测度. □

任给 $g \in NBV$,由式(3.7.19)唯一地决定一个测度 $\nu \in M(\mathbb{R})$,使得 $g = g_\nu$. 称 ν 为由函数 g 生成的 **Lebesgue-Stieltjes 测度**,简称为 LS 测度,记作 $d\nu = dg$ 或 $d\nu = dg(x)$. 进而可考虑对测度 ν 的积分. 任给 $f \in L^1(\mathbb{R}, E, |\nu|)$,令

$$\int_{-\infty}^{\infty} f dg = \int_{\mathbb{R}} f d\nu, \tag{3.7.20}$$

其中,右端依(3.3.15)有定义, $d\nu = dg$. 如上所定义的 $\int_{-\infty}^{\infty} f dg$ 称为函数对 (f,g) 的 **Lebesgue-Stieltjes 积分**,简称为 LS 积分.

LS 积分与定义3.7.2所描述的 RS 积分的关系,颇类似于 Lebesgue 积分与 Riemann 积分的关系. LS 积分有明显的优势,值得强调如下两点:首先,式(3.7.20)中的积分存在的条件宽松得多,完全不涉及 f 的连续性(对照定理3.7.3);而且, LS 积分实际上是对测度的积分,因而可应用关于测度积分的种种结论,如完全可加性、控制收敛定理等,而这是 RS 积分所不能考虑的.

以上所述可转换成有限区间 $J = [a, b]$ 上的相应内容,后者在应用上有其特殊需要. 任给 $\nu \in M(J)$,将 ν 扩张到 $\mathbb{R}$ 上使 J^c 为其零集,就可以认为 $\nu \in M(\mathbb{R})$. 在这种意义上,有自然的等距嵌入 $M(J) \to M(\mathbb{R})$,不妨就认为 $M(J) \subset M(\mathbb{R})$. 然后结合定理3.7.4得出:在等距同构(3.7.16)之下, $M(J)$ 等距同构于 NBV(由式(3.7.15))的某个子空间,现在要弄清后者的结构如何. 约定以 NBV (J) 记 J 上右连续 $\mathbb{K}$ 值有界变差函数之全体. 任给 $\nu \in M(J)$,设 g_ν 依式(3.7.14),因而

$$g_\nu(x) = \nu([a, x]), \quad x \in J. \tag{3.7.21}$$

注意 $g_\nu(x) = 0\ (x < a)$, $g_\nu(a) = \nu(\{a\})$, $g_\nu(y) = g_\nu(b)\ (y > b)$. 于是

$$\|\nu\| = V_{-\infty}^{\infty}(g_\nu) = |g_\nu(a)| + V_a^b(g_\nu).$$

反之,任给 $g \in \mathrm{NBV}(J)$,补充定义 $g(x) = 0(x < a)$ 与 $g(y) = g(b)(y > b)$,则 $g \in \mathrm{NBV}$(由式(3.7.15)),因而 $g = g_\nu, \nu \in M(\mathbb{R})$,易见必 $\nu \in M(J)$. 给定 $\varphi \in C(J)$,将其扩张为 $\varphi_n \in C_0(\mathbb{R})$,使得它在区间$[a - n^{-1}, b + n^{-1}]$之外为零,在区间$[a - n^{-1}, a]$与$[b, b + n^{-1}]$上为线性函数,则

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n \mathrm{d}\nu = \int_{a-n^{-1}}^{a} \varphi_n \mathrm{d}g + \int_a^b \varphi \mathrm{d}g + \int_b^{b+n^{-1}} \varphi_n \mathrm{d}g$$

$$\to \varphi(a)g(a) + \int_a^b \varphi \mathrm{d}g, \quad n \to \infty.$$

因此有

$$\int_a^b \varphi \mathrm{d}\nu = \varphi(a)g(a) + \int_a^b \varphi \mathrm{d}g, \quad \varphi \in C(J). \tag{3.7.22}$$

这就得出

定理 3.7.5 设 NBV (J) 记 J 上右连续的$\mathbb{K}$ 值有界变差函数之全体,则 NBV(J) 依范数 $\|g\| = |g(a)| + V(g)$ 是一个 Banach 空间且

$$M(J) \to \mathrm{NBV}(J), \quad \nu \to g_\nu \tag{3.7.23}$$

是一个等距同构,其中, g_ν 依式(3.7.21). $\nu \ll m \Leftrightarrow g_\nu \in \mathrm{AC} \Leftrightarrow \mathrm{d}\nu = g_\nu'\mathrm{d}m, \nu \perp m \Leftrightarrow g_\nu' = 0$, a.e. ,$\nu$ 是实测度 $\Leftrightarrow g_\nu$ 是实函数,ν 是正测度 $\Leftrightarrow g_\nu$ 是增函数. 当 $\nu \in M(J)$,$g = g_\nu$ 时式(3.7.22) 成立.

推论 3.7.1 设 $\mathrm{NBV}_0(J) = \{g \in \mathrm{BV}(J, \mathbb{K}) : g$ 在(a,b) 内右连续且 $g(a) = 0\}$,

$$L_g(\varphi) = \int_a^b \varphi \mathrm{d}g(\varphi \in \mathrm{d}g(\varphi \in C(J)),$$

则有等距同构

$$\mathrm{NBV}_0(J) \to C(J)^*, \quad g \to L_g,$$

其中, $\mathrm{NBV}_0(J)$ 中采用范数 $\|g\| = V(g)$.

证 设 NBV (J) 依定理 3.7.5. 任给 $g \in \mathrm{NBV}(J)$,令 $\tilde{g}(x) = g(x)(a < x \leqslant b)$,$\tilde{g}(a) = 0$,则 $\tilde{g} \in \mathrm{NBV}_0(J)$; $\forall \varphi \in C(J)$,不难验证

$$\int_a^b \varphi \mathrm{d}\tilde{g} = \varphi(a)g(a) + \int_a^b \varphi \mathrm{d}g,$$

$$V(\tilde{g}) = |g(a)| + V(g).$$

以上事实结合定理 3.5.3 与定理 3.7.5,即得所要结论. □

基于定理 3.7.5,又可以界定区间 J 上的 LS 测度与 LS 积分,就如同利用定理 3.7.4 在 $\mathbb{R}$ 上所作的一样:任给 $g \in \mathrm{NBV}(J)$,设 $g(a) = 0$,则存在唯一测度 $\nu \in$

$M(J)$，使得 $g = g_\nu$，g_ν 依式(3.7.21)，称 ν 为由 g 生成的 LS 测度，记作 $d\nu = dg$. 任给 $f \in L^1(J, E, |\nu|)$，定义

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f d\nu, \tag{3.7.24}$$

其中，右端依式(3.3.15)，称如此定义的 $\int_a^b f dg$ 为函数对 (f,g) 在 $[a,b]$ 上的 LS 积分.

第4章 解析函数

数学界大概有一种共识:解析函数论是最和谐的数学理论之一. 经典的解析函数论,或者如通常所说的复分析,无疑是经典分析学中最优美的部分,它深得大数学家, 如 Euler、Gauss、Cauchy、Riemann 等的特别喜爱. 它的方法与结论渗透到许多数学分支,且到处导致惊人地深刻的结果. 近代分析数学所经历的"无限维化"这一强劲冲击,亦未能使解析函数论例外. 各种领域的问题促成了解析函数概念到向量值函数的推广:矩阵分析与算子演算、Banach 代数理论、微分方程的解析理论等. 自然地,向量值的解析函数论成为近代分析数学中的重要篇章,它的理论因依然具有那些备受欣赏的传统特色而特别富有吸引力.

本章考虑的解析函数都取值于某个给定的复 Banach 空间 E, 而函数的变元则依次取为单复变量、多复变量乃至复 Banach 空间中的向量变量. E 为**复** Banach 空间这一设定是本质的,这使得基于它而展开的解析函数论仍然是某种复分析,可称为 Banach 空间上的复分析. 经典复分析不只是起引导思路的作用,而且也提供仍然富有推断力的现成结论. 为从向量值的复分析返回经典复分析,我们尽可能求助于两种归化法:基于 Hahn-Banach 定理的"弱方法"及将自变量单参数化的方法.

对本章所用记号作一简单交代: Ω 总记非空开集,它所属的空间是$\mathbb{C}$,$\mathbb{C}^n$ 或某个复 Banach 空间,具体由上下文判定. $\mathbb{C}$ 中的圆域用记号

$$D_r(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}, \quad \overline{D}_r(a) = \overline{D_r(a)},$$

其中, $a \in \mathbb{C}, r > 0$. 当圆周$L = \partial D_r(a)$ 作为积分路径使用时,总假定它是单重的且取反时针方向. 此外再重申已多次用到的老记号 $\|f\|_A = \sup_{z \in A} \|f(z)\|$.

4.1 单变量函数

本节中设 $\Omega \subset \mathbb{C}$. 若$f: \Omega \to E, z_0 \in \Omega$,则依式(2.1.3) 导数$f'(z_0)$ 定义为

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} h^{-1} \Delta f(z_0, h), \tag{4.1.1}$$

只要其中的极限存在. 不过,在 2.1 节中形如式(4.1.1)的导数是对 $\Omega \subset \mathbb{K}$ 统一处理的,当时并未注意到 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 与$\mathbb{C}$ 的区别. 现在正是要强调这一区别的时候了. 如同在经典复分析中一样,z 为复变量这一点使函数$f(z)$ 的可微性具有非同寻常的意义,大量出人意料的深刻结论将由之导出. 这就促使我们沿用一个老的术语:解析函数. 任何可微函数$f: \Omega \to E$都称为Ω内的E值**解析函数**或全纯函数,其全体记

作 $H(\Omega,E)$，$H(\Omega) \triangleq H(\Omega,\mathbb{C})$ 就是通常的解析函数类. 如通常一样，$\mathbb{C}$ 上的解析函数也称为**整函数**.

再强调一遍：解析性的唯一要求就是可微. 从形式上看，这一要求似乎已经够低了. 但依以下结果，上述要求甚至还可进一步降低.

引理 4.1.1 设 $f:\Omega\to E$，则 $f\in H(\Omega,E) \Leftrightarrow \forall\varphi\in E^*$，有 $\varphi\circ f\in H(\Omega)$.

依照通常的说法，以上结论意味着 f 解析 $\Leftrightarrow f$ 弱解析. 这一结论对于整个向量值解析函数论都有重大意义，它为将向量值解析函数问题归结为复解析函数问题（归化法）开辟了道路.

证 $f\in H(\Omega,E)\Rightarrow\varphi\circ f\in H(\Omega)$（$\forall\varphi\in E^*$）是平凡的，今证其逆. 设 $\varphi\circ f\in H(\Omega)$（$\forall\varphi\in E^*$）. 取定 $z_0\in\Omega$，今证 $f'(z_0)$（依式(4.1.1)）存在. 为此，只要证如下的 Cauchy 条件满足（参照条件(3.7.10)）：

$$\lim_{h,k\to 0}\left[h^{-1}\Delta f(x_0,h)-k^{-1}\Delta f(x_0,k)\right]=0.$$

关键的观察是以上条件蕴涵于一个有界性条件，即

$$J(f,h,k)\triangleq(h-k)^{-1}\left[h^{-1}\Delta f(z_0,h)-k^{-1}\Delta f(z_0,k)\right] \tag{4.1.2}$$

有界，其中，$h,k\in\mathbb{C}$ 异于零且互异，$|h|$ 与 $|k|$ 充分小. 由命题 1.6.1(i)，只要证 $J(f,h,k)$ 弱有界，即 $\forall\varphi\in E^*$，$g=\varphi\circ f$，$J(g,h,k)\triangleq\varphi(J(f,h,k))$ 有界，后者已完全是一个经典复分析问题. 取 $r>0$，使 $D_{3r}(z_0)\subset\Omega$，令 $L=\partial D_{2r}(z_0)$，则当 $0<|h|,|k|<r$ 且 $h\neq k$ 时，由 Cauchy 公式有

$$\begin{aligned}|J(g,h,k)| &= \frac{1}{2\pi|h-k|}\left|\frac{1}{h}\int_L g(z)\left(\frac{1}{z-z_0-h}-\frac{1}{z-z_0}\right)\mathrm{d}z\right.\\ &\qquad\left.-\frac{1}{k}\int_L g(z)\left(\frac{1}{z-z_0-k}-\frac{1}{z-z_0}\right)\mathrm{d}z\right|\\ &\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{|g(z)|}{|z-z_0-h||z-z_0-k||z-z_0|}|\mathrm{d}z|\\ &\leqslant r^{-2}\|g\|_L,\end{aligned}$$

这正表明 $J(g,h,k)$ 有界，如所要证. □

本节的目标是将经典复分析的基本结果推广于向量值解析函数. 一般的思路是：如果要对 $f\in H(\Omega,E)$ 建立的某个结果可表为等式 $T(f)=0$，而 T 与 $\varphi\in E^*$ 可交换，则问题归于验证 $T(\varphi\circ f)=0$（$\forall\varphi\in E^*$），后者作为一个经典复分析问题可能较容易解决，甚至可能是一个现成的结论. 但在作如上推理之前，首先要确认 $f\in H(\Omega,E)$，在这一点上正是引理 4.1.1 发挥作用的地方.

下面的讨论遵循复分析中的例行顺序：Cauchy 定理、Cauchy 公式、Taylor 级数与 Laurent 级数等. 这将是一次非常轻松愉快的行进，不会碰到任何严重的障碍.

为建立 Cauchy 定理，首先要描述向量值函数沿平面曲线的积分，这与通常的

复积分并无实质差别. 设 L 是 Ω 内由方程 $z = z(t)\,(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ 给定的曲线,假定它是连续可度的,这意味着 $z(t):[\alpha,\beta] \to \Omega$ 是连续有界变差函数,其全变差 l 就是 L 的长度(参考定义 3.7.1). 任给 $f \in C(\Omega,E)$,定义

$$\int_L f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f(z(t))\,\mathrm{d}z(t) \tag{4.1.3}$$

为 $f(z)$ 沿路径 L 的积分. 式(4.1.3)右端作为 RS 积分必存在(由定理 3.7.3). 如此定义的积分显然有如下性质:

$$T\int_L f(z)\,\mathrm{d}z = \int_L Tf(z)\,\mathrm{d}z, \tag{4.1.4}$$

$$\left\| \int_L f(z)\,\mathrm{d}z \right\| \leqslant l\,\|f\|_L, \tag{4.1.5}$$

其中, T 是定义在 E 上的任一有界线性算子. 式(4.1.5)由式(3.7.12)推出. 若 L 由 Ω 内有限条互不相交的连续可度曲线 L_j 组成,则自然规定

$$\int_L f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_j \int_{L_j} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

若 L 由 Ω 内有限条互不相交的简单闭曲线组成,则称 L 为 Ω 内的一条围道. 设 $K \subset \mathbb{C}$ 是某个非空集. 若

$$\int_L \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda - z} = \begin{cases} 0, & z \notin K, \\ 2\pi\mathrm{i}, & z \in K, \end{cases}$$

则说 L 环绕 K. 说到 Ω 中的围道 L 时,总假定它所环绕的每一点都属于 Ω 而不另加说明. 在充分简单的情况下(如对于矩形周界或圆周), L"取反时针方向"的意义是自明的. 本章中涉及积分路径时,我们总持朴素的观点,避开严格但繁琐的拓扑表述,以便集中精力于复分析基本思想的阐发.

作了以上准备之后,现在已可建立处于中心地位的 Cauchy 定理与 Cauchy 公式.

定理 4.1.1 设 $f \in C(\Omega,E)$.

(i) **Cauchy 定理**: $f \in H(\Omega,E) \Leftrightarrow \int_L f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, L 是 Ω 中的任一围道;

(ii) **Cauchy 公式**:若 $f \in H(\Omega,E)$, $z \in \Omega$,则成立

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{f(\lambda)}{(\lambda - z)^{n+1}}\mathrm{d}\lambda, \quad n \geqslant 0, \tag{4.1.6}$$

其中 L 是 Ω 中环绕点 z 的任一围道. 特别地,取 $L = L_\rho = \partial D_\rho(z)$ ($\rho > 0$ 使得 $\overline{D}_\rho(z) \subset \Omega$), 从式(4.1.6)得到 **Cauchy 不等式**

$$\|f^{(n)}(z)\| \leqslant n!M_\rho\,\rho^{-n}, \quad M_\rho = \|f\|_{L_\rho}. \tag{4.1.7}$$

证 (i) 直接由经典复分析中的 Cauchy 定理与引理 4.1.1 推出.

(ii) 首先用归纳法证 f 任意次可微. 设 $f^{(n)}(z)$ 在 Ω 内处处存在, $n \geqslant 1$ 是给定的. $\forall \varphi \in E^*$,有 $\varphi \circ f^{(n)} = (\varphi \circ f)^{(n)} \in H(\Omega)$,这就由引理 4.1.1 推出 $f^{(n)} \in H(\Omega,$

E),因而$f^{(n+1)}(z)$ 在 Ω 内处处存在. 这就归纳地证明了 f 任意次可微.

取定 $z \in \Omega, n \in \mathbb{Z}_+$. 设 L 是 Ω 中环绕点 z 的围道,则由复分析中的已知结果有

$$(\varphi \circ f)^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(f(\lambda))}{(\lambda - z)^{n+1}}d\lambda, \quad \forall \varphi \in E^*,$$

然后用推论 1.6.1 即得出式(4.1.6).

由式(4.1.6)推出不等式(4.1.7)是平凡的. □

其次考虑解析函数的幂级数表示.

定理 4.1.2　设 $a \in \mathbb{C}, 0 \leqslant r < \rho < R \leqslant \infty, L_\rho = \partial D_\rho(a)$.

(i) 设 $\Omega = \{z: r < |z - a| < R\}, f \in H(\Omega, E)$,则 f 可展开为在 Ω 内绝对并紧一致收敛的 **Laurent 级数**

$$\begin{cases} f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n, & z \in \Omega, \\ c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{L_\rho} \frac{f(\lambda)}{(\lambda - a)^{n+1}}d\lambda, & n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \tag{4.1.8}$$

(ii) 设 $\Omega = \{z: |z - a| < R\}, f \in H(\Omega, E)$,则 f 可展开为在 Ω 内绝对并紧一致收敛的 **Taylor 级数**

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(z - a)^n, \quad z \in \Omega; \tag{4.1.9}$$

(iii) 设 $\{c_n: n \in \mathbb{Z}_+\} \subset E, R = \left(\overline{\lim_n} \sqrt[n]{\|c_n\|}\right)^{-1} > 0$, 则

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \tag{4.1.10}$$

是 $\Omega = \{z: |z - a| < R\}$ 内的解析函数,且式(4.1.10)即为其 Taylor 级数.

证　(i) 设 c_n 依式(4.1.8),则类似于不等式(4.1.7)可建立

$$\|c_n\| \leqslant M_\rho / \rho^n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{4.1.11}$$

其中, $M_\rho = \|f\|_{L_\rho}$. 设 $r < \rho < \alpha < \beta < \gamma < R, D_{\alpha\beta} = \{z: \alpha \leqslant |z - a| \leqslant \beta\}$. $\forall z \in D_{\alpha\beta}$, 由式(4.1.11)有

$$\|c_n(z - a)^n\| \leqslant \begin{cases} M_\gamma (\beta/\gamma)^n, & n \geqslant 0, \\ M_\rho (\rho/\alpha)^{-n}, & n < 0. \end{cases}$$

这推出级数 $\sum c_n (z - a)^n$ 在 $D_{\alpha\beta}$ 上绝对并一致收敛,从而在 Ω 内绝对并紧一致收敛(注意可选取 ρ, α 充分接近于 r; β, γ 充分接近于 R). 一旦确立了 Laurent 级数的收敛性,就如同证式(4.1.6)一样,用标准的归化法从经典复分析中的 Laurent 展开式推出式(4.1.8)成立.

(ii) 若 $n < 0$,则令 $\rho \to 0$ 从不等式(4.1.11)得 $c_n = 0$. 如果 $n \geqslant 0$,则对照式(4.1.6)与式(4.1.8)有 $c_n = f^{(n)}(a)/n!$. 于是从展开式(4.1.8)得出式(4.1.9).

(iii) $\forall z \in \Omega$,设 $|z-a| < \rho < R$,则当 n 充分大时 $\sqrt[n]{\|c_n\|} < 1/\rho$,因而

$$\|c_n(z-a)^n\| \leqslant (|z-a|/\rho)^n,$$

这推出级数 $\sum c_n(z-a)^n$ 绝对收敛. 于是, $\forall \varphi \in E^*$,

$$\varphi(f(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(c_n)(z-a)^n$$

是 Ω 内的解析函数,且上式右端必为 $\varphi(f(z))$ 的 Taylor 级数. 由引理 4.1.1 推出 $f \in H(\Omega, E)$, 由推论 1.6.1 推出 $c_n = f^{(n)}(a)/n!$,因此式(4.1.10) 是 $f(z)$ 的 Taylor 级数表示. □

至此,已确立了解析函数的三种主要表示:Cauchy 公式(4.1.6),Laurent 级数(4.1.8)与 Taylor 级数(4.1.9). 现在让我们观察一下,是什么因素使它们如此强有力. 式(4.1.6)表明,f 在围道 L 上的状态已完全决定了 f 在 L 所环绕的任何点的值, 式(4.1.8) 亦有类似特点. 式(4.1.9) 表明, f 在 Ω 内任一点的值仅决定于"Taylor 系数" $c_n = f^{(n)}(a)/n!$,后者仅决定于 f 在点 a 的任意小邻域内的状态. 总之,依据式(4.1.6), 式(4.1.8) 与式(4.1.9),仅凭 f 在某个"小子集" 上的值,就足以了解 f 在 Ω 内的全貌. 这正表明了解析函数的非同寻常的特殊性质:它在其解析区域内各部分的值受极强的内在联系制约. 对于一个解析函数,看来极少的信息常常足以推出极强的结论. 而用来完成这类推导的工具,通常就是 Cauchy 公式、Laureut 级数或 Taylor 级数. 由此大致可以看出,由定理 4.1.1 与定理 4.1.2 所描述的解析工具在解析函数论中的价值.

解析函数论定理的标志性特点是"微不足道的条件,难以置信地强的结论". 复分析中广为人知的唯一性定理与最大模原理可用作说明的典型例子,它们都可以推广到区域上的向量值解析函数,区域被界定为连通开集.

定理 4.1.3(唯一性定理) 设 $f \in H(\Omega, E)$,Ω 是一个区域. 若集 $\{f = 0\}$ 在 Ω 内至少有一聚点,则 $f(z) \equiv 0 \ (z \in \Omega)$.

证 由经典复分析中的唯一性定理, $\forall \varphi \in E^*$,有 $\varphi(f(z)) \equiv 0$,这推出 $f(z) \equiv 0$. □

利用定理 4.1.3,要判定区域 Ω 内的两个解析函数 f 与 g 恒等,只要验证在某个微不足道的集 $A \subset \Omega$ 上 $f(z) = g(z)$,A 在 Ω 内至少有一聚点就行了.

若 $f \in H(\Omega, E)$,则 $\|f(z)\|$ 是 Ω 内的非负实函数,其图形是 $\mathbb{R}^3$ 中的一连续曲面,称为模曲面. 解析函数的模曲面有一似乎很奇怪的几何性质,即它不能有"顶点",其准确含义表为如下的**最大模原理**:

定理 4.1.4 设 $f \in H(\Omega, E)$,Ω 是一区域,$a \in \Omega$.

(i) 若 $\|f(a)\| = \max\limits_{z \in \Omega} \|f(z)\|$,则 $\|f(z)\| \equiv \|f(a)\| \ (z \in \Omega)$;

(ii) 若 E 是 Hilbert 空间, $\|f(z)\|$ 在点 a 取得局部极大,则 $f(z) \equiv f(a)$.

证 (i) 令 $A = \{z \in \Omega: \|f(z)\| = \|f(a)\|\}$,则 A 显然是 Ω 的相对闭子集, $a \in A$. 余下只要证 A 为开集(如此则由连通性得出 $A = \Omega$, 从而 $\|f(z)\| \equiv \|f(a)\|$). 为此只要证 $a \in A^\circ$(同理, 对任何 $z \in A$ 亦有 $z \in A^\circ$,因而 A 是开集). 取 $r > 0$,使 $D_{2r}(a) \subset \Omega$. 令 $L = \partial D_r(a)$, 由 Cauchy 公式(在式(4.1.6)中取 $n = 0$)有

$$\begin{aligned}\|f(a)\| &= \frac{1}{2\pi}\left\|\int_L \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z\right\| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|f(a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\|\mathrm{d}\theta \leqslant \|f(a)\|.\end{aligned}$$

因上式中的 $\leqslant$ 均应为等号,这就由连续性推出 $\|f(z)\| = \|f(a)\|$ ($\forall z \in L$). 因 r 可任意小,故对充分邻近 a 的 z 均有 $\|f(z)\| = \|f(a)\|$,这正表明 $a \in A^\circ$.

(ii) 由定理4.1.3,只要证明在 a 的某个邻域内 $f(z) = f(a)$. 取充分小的 $r > 0$,设 $f(z)$ 在 $D_{2r}(a)$ 内被表为 Taylor 级数(4.1.10),则

$$\begin{aligned}\|c_0\|^2 &= \|f(a)\|^2 \\ &\geqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|f(a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\|^2\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\|\sum_{n=0}^{\infty}c_n r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right\|^2\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{m,n=0}^{\infty}\langle c_n, c_m\rangle r^{n+m}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\|c_n\|^2 r^{2n},\end{aligned}$$

这推出 $c_n = 0$ ($\forall n \geqslant 1$),因而在 $D_r(a)$ 内 $f(z) \equiv c_0 = f(a)$, 如所要证. □

以下简单例子说明定理4.1.4(ii)不适用于一般复 Banach 空间 E:取 $E = \mathbb{C}^2$, 其中, 采用范数 $\|z\| = |z_1| \vee |z_2|$ ($z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$),令 $f(z) = (1, z)$,则 $f \in H(\mathbb{C}, E)$,当 $|z| \leqslant 1$ 时 $\|f(z)\| \equiv 1$,但在 $|z| < 1$ 内 $f(z) \neq f(0)$.

在经典复分析中,最大模原理有数量可观的推论,它们大多在稍加改变的形式下适用于向量值解析函数,今将其主要者汇集于下.

推论4.1.1 (i) 设 $f \in H(\Omega, E) \cap C(\bar{\Omega}, E)$,$\Omega$ 是有界区域,则 $\|f(z)\|$ 必在 $\partial\Omega$ 上取得最大值;

(ii) 设 $f \in H(\Omega, E)$,$\Omega = \{z: |z-a| < R\}$,$0 < R \leqslant \infty$, $M(r) = \max\limits_{|z-a|=r}\|f(z)\|$, 则 $M(r)$ ($0 \leqslant r < R$) 是严格增函数,除非 $\|f(z)\| \equiv \|f(a)\|$. 若 E 是 Hilbert 空间,则 $M(r)$ 是严格增函数,除非 $f(z) \equiv f(a)$;

(iii) **Schwarz 引理**:设 $f \in H(D_R(0), E)$,$0 < R < \infty$, $f(0) = 0$,$M = \sup\|f(z)\| < \infty$,则 $\|f(z)\| \leqslant (M/R)|z|$ ($|z| < R$). 若有某个 z_0,$0 \neq |z_0| < R$,使不等式中的等号成立,则 $\|f(z)\| \equiv (M/R)|z|$,当 E 为 Hilbert 空间时 $f(z) \equiv$

$az, a \in E, \|a\| = M/R$;

(iv) **Liouville 定理**:有界整函数必为常值函数.

证 直接看出定理4.1.4 推出(i)与(ii),(iii)⇒(iv).

证(iii).令 $g(z) = z^{-1}f(z)$,则 $g(z) \in H(D_R(0),E)$.若 $|z| < r < R$,则由结论(i)有 $\|g(z)\| \leqslant \max_{|\lambda|=r} \|g(\lambda)\| \leqslant r^{-1}M$,这得 $\|f(z)\| \leqslant (M/r)|z|$.令 $r \to R$ 即得所要不等式. 余下结论从(ii)推出. □

用“归化法”将 Schwarz 引理与 Liouville 定理转移到向量值解析函数,可能是更简捷且有趣的.例如,考虑 Schwarz 引理. $\forall \varphi \in E^*$,有

$$|\varphi(f(z))| \leqslant R^{-1}|z| \sup_{|\lambda|<R} |\varphi(f(\lambda))| \leqslant M\|\varphi\| |z|/R,$$

由此推出 $\|f(z)\| \leqslant (M/R)|z|$ (由式(1.6.9)).

在推论4.1.1 中,最简单也最常用的无疑是结论(i),注意其中限制了 Ω 为有界区域.在某些特殊情况下亦可建立无界域上的类似结果,以下是一个较有趣的例子.

定理4.1.5(Doetsch) 设 $f \in H(\Omega,E) \cap C(\overline{\Omega},E)$,$\Omega = (a,b) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$,$f$ 在 Ω 内有界,$M(x) = \sup_y \|f(x+\mathrm{i}y)\|$,则成立

$$M(x)^{b-a} \leqslant M(a)^{b-x}M(b)^{x-a}, \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{4.1.12}$$

由此推出 $\ln M(x)$(从而 $M(x)$)是凸函数,$\|f(z)\| \leqslant \|f\|_{\partial\Omega}(z \in \Omega)$.

证 证明的实质性部分并不复杂,但预先需作一系列转化.首先以区间 $[0,1]$ 取代 $[a,b]$(这相当于以 $f(a+z(b-a))$ 取代 $f(z)$),其次不妨设 $M(0)M(1) > 0$(否则以小正数代替 $M(0)$ 或 $M(1)$),进而又可设 $M(0) = M(1) = 1$(否则以 $M(0)^{z-1}M(1)^{-z}f(z)$ 取代 $f(z)$).这就将问题转化为证 $\|f(z)\| \leqslant 1(z \in \Omega)$.分两种情况考虑.首先设当 $z \in \Omega, |z| \to \infty$ 时 $f(z) \to 0$,则将推论4.1.1(i)用于矩形 $[0,1] \times [-h,h]$($h > 0$ 充分大)得出 $\|f(z)\| \leqslant 1(z \in \Omega)$.对于一般情况,作辅助函数 $f_\varepsilon(z) = f(z)/(1+\varepsilon z)$,$\varepsilon > 0$,它满足

$$\|f_\varepsilon(k+\mathrm{i}y)\| \leqslant \|f(k+\mathrm{i}y)\| \leqslant 1, \quad k = 0,1, y \in \mathbb{R},$$

$f_\varepsilon(z) \to 0(z \in \Omega, |z| \to \infty)$.因此 $\|f_\varepsilon(z)\| \leqslant 1$,从而

$$\|f(z)\| \leqslant |1+\varepsilon z| \leqslant 1+\varepsilon|z|, \quad z \in \Omega.$$

令 $\varepsilon \to 0$ 即得 $\|f(z)\| \leqslant 1(z \in \Omega)$,如所要证. □

经典复分析中关于解析函数的零点与孤立奇点的用语与结论,完全基于 Taylor 展开式与 Laurent 展开式,自然可移用于向量值解析函数.

定义4.1.1 设 $f(z)(0 < |z-a| < R)$ 表如式(4.1.8).给定 $n \in \mathbb{Z}$,设 $c_n \neq 0$.若 $n > 0$,$\forall k < n$,有 $c_k = 0$,则称 a 为 f 的 n 阶零点;若 $n < 0$,$\forall k < n$,有 $c_k = 0$,则称 a 为 f 的 $-n$ 阶极点.若 $\forall k < 0$,有 $c_k = 0$,则称 a 为 f 的正则点.若 a 既非正则点又非极点(⇔存在无限多个负下标 k 使 $c_k \neq 0$),则称 a 为 f 的本性奇点.若

$z=0$ 是 $f(z^{-1})$ 的正则点(或零点、极点、本性奇点),则称 ∞ 为 f 的正则点(或零点、极点、本性奇点).

涉及以上概念的一些简单结论是明显的,不必详述.

除了将在 4.4 节中统一处理的若干内容之外,至此已大体完成经典复分析基本结论到向量值解析函数的推广. 这件事做得颇为顺畅与完满,似乎所传递的都是令人乐观的信息:无限维向量值解析函数论如同复解析函数论一样和谐优美. 但若以为在向量值解析函数论中可重建全部复分析的内容,则并不现实. 对此,只要举出以下例子就足以说明二者的差别:设 $f\in H(\Omega,E)$, $a\in\Omega$, $f'(a)\neq 0$, 则 f 在 a 的某个邻域 $D_r(a)$ 上为同胚的充要条件是 $\dim E=1$!

4.2 多变量函数

在 4.1 节中取得顺利进展之后,我们似乎满有信心更进一步:对多复变量的向量值解析函数建立某种基本的理论构架.

首先规定若干记号. 给定 $n\in\mathbb{N}$, 写出 $z\in\mathbb{C}^n$, 总意味着 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$. 任给 $a\in\mathbb{C}^n$, $r=(r_1,r_2,\cdots,r_n)$, $r_j>0(1\leqslant j\leqslant n)$, 令

$$P_r(a)=\prod_j D_{r_j}(a_j),\quad \bar{P}_r(a)=\overline{P_r(a)},\tag{4.2.1}$$

二者分别称为以 a 为中心的多圆柱与闭多圆柱. $P_r(a)$ 的作用颇类似于 4.1 节中频繁地用到的圆盘 $D_r(a)$. 本节中总设 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$.

对于一个函数 $f:\Omega\to E$, 其导数 $f'(z)$ 的定义及与偏导数的关系,已经包含于定义 2.1.1 与定理 2.1.3, 并不需要重建. 如同在 4.1 节中一样,称任何可微函数 $f:\Omega\to E$ 为 Ω 内的 E 值解析函数或全纯函数,其全体记作 $H(\Omega,E)$, 令 $H(\Omega)=H(\Omega,\mathbb{C})$. 从形式上看,此处从用语到记号完全重复了 4.1 节中的表述,根本看不出来"单复变"与"多复变"这两种情形有何区别. 让我们姑且维持这一乐观心情,努力去转移单变量理论中的基本结果,直到遭遇险阻无法前行为止.

在建立多变量的 Cauchy 公式、Taylor 展开式等之前,首先指出:如同在 2.2 节中处理 $\mathbb{R}^n$ 上的可微函数一样,对于 $\mathbb{C}^n$ 上的解析函数,使用偏导数比"全导数"更为方便. 因此,本节完全继承由式(2.2.2) ~ 式(2.2.4) 所设定的记号,只是将其中的实变量 x_j 改成复变量 z_j, 如设 $\partial_j=\partial/\partial z_j$, $\partial=(\partial_1,\partial_2,\cdots,\partial_n)$. 其余不必一一详述. 此外约定一个特殊记号 $e=(1,1,\cdots,1)\in\mathbb{Z}^n$.

首先推广 Cauchy 公式(4.1.6).

定理 4.2.1 设 $f\in H(\Omega,E)$. 则 f 在 Ω 内存在所有各阶偏导数且当 $\bar{P}_r(a)\subset\Omega$, $z\in P_r(a)$ 时成立 **Cauchy 公式**

$$\partial^\alpha f(z)=\frac{\alpha!}{(2\pi\mathrm{i})^n}\int_{L_1}\int_{L_2}\cdots\int_{L_n}\frac{f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda}{(\lambda-z)^{\alpha+e}},\quad \alpha\in\mathbb{Z}_+^n,\tag{4.2.2}$$

其中，$L_j = \partial D_{r_j}(a_j)(1 \leqslant j \leqslant n)$，$d\lambda = d\lambda_1 d\lambda_2 \cdots d\lambda_n$.

证 因偏导数总是逐次对单个变元取的，故利用单变量函数的已知结果不难说明，f 的任何阶偏导数存在. 下面只要对 n 用归纳法证明式(4.2.2). 当 $n = 1$ 时式(4.2.2)就是 Cauchy 公式(4.1.6). 今设 $n > 1$ 并作归纳假设，则当 $z \in P_r(z)$，$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ 时，有

$$\begin{aligned}\partial^\alpha f(z) &= \partial_1^{\alpha_1}(\partial_2^{\alpha_2} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f(z)) \\ &= \frac{\alpha_1!}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{\partial_2^{\alpha_2} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f(\lambda_1, z_2, \cdots, z_n)}{(\lambda_1 - z_1)^{\alpha_1+1}} d\lambda_1 \\ &= \frac{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!}{(2\pi i)^n}\int_{L_1} \frac{d\lambda_1}{(\lambda_1 - z_1)^{\alpha_1+1}}\int_{L_2}\cdots\int_{L_n} \frac{f(\lambda)d\lambda_2\cdots d\lambda_n}{(\lambda_2 - z_2)^{\alpha_2+1}\cdots(\lambda_n - z_n)^{\alpha_n+1}} \\ &= \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n}\int_{L_1}\int_{L_2}\cdots\int_{L_n} \frac{f(\lambda)}{(\lambda - z)^{\alpha+e}} d\lambda,\end{aligned}$$

如所要证. □

令 $M(r) = \sup\{\|f(z)\| : z \in L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_n\}$，则从式(4.2.2) 直接推出

$$\|\partial^\alpha f(a)\| \leqslant \alpha! M(r)/r^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{4.2.3}$$

这正是 Cauchy 不等式(4.1.7)的多元推广.

下一个目标自然是推广定理 4.1.2. 不过，我们暂且放下 Laurent 级数，首先解决较简单的 Taylor 展开问题. 下面的结果恰对应于定理 4.1.2 中的(ii)与(iii).

定理 4.2.2 (i) 设 $f \in H(P_r(a), E)$，则 f 可展开为 $P_r(a)$ 内绝对并紧一致收敛的 Taylor 级数

$$f(z) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(a)(z - a)^\alpha, \quad z \in P_r(a), \tag{4.2.4}$$

求和号中 α 遍取 $\mathbb{Z}_+^n$（下面保持这一约定而不再注明）；

(ii) 设 $\{c_\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\} \subset E$ 使得以下幂级数收敛：

$$f(z) = \sum_\alpha c_\alpha (z - a)^\alpha, \quad z \in P_r(a), \tag{4.2.5}$$

则 $f \in H(P_r(a), E)$ 且式(4.2.5) 之右端即为 f 的 Taylor 级数.

证 (i) 设 $0 < s_j < \rho_j < r_j$，$L_j = \partial D_{\rho_j}(a_j)(1 \leqslant j \leqslant n)$，$s = (s_1, s_2, \cdots, s_n)$，$\rho$ 仿此. 任给 $z \in P_s(a)$，由 Cauchy 公式(4.2.2)有

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{L_1}\int_{L_2}\cdots\int_{L_n} \frac{f(\lambda)}{(\lambda - z)^e} d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{L_1}\int_{L_2}\cdots\int_{L_n} \prod_{j=1}^n \sum_{\alpha_j=0}^\infty \frac{(z_j - a_j)^{\alpha_j}}{(\lambda_j - a_j)^{\alpha_j+1}} f(\lambda) d\lambda \\ &= \sum_\alpha \left[\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{L_1}\int_{L_2}\cdots\int_{L_n} \frac{f(\lambda)}{(\lambda - a)^{\alpha+e}} d\lambda\right](z - a)^\alpha\end{aligned}$$

$$= \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!}\partial^{\alpha}f(a)(z-a)^{\alpha}.$$

利用不等式(4.2.3)推出

$$\|(1/\alpha!)\partial^{\alpha}f(a)(z-a)^{\alpha}\| \leqslant M(\rho)s^{\alpha}/\rho^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_{+}^{n}.$$

这表明式(4.2.4)右端级数在 $P_s(a)$ 内绝对并一致收敛,从而在 $P_r(a)$ 内绝对并紧一致收敛.

(ii) 设 s,ρ,r 仍如(i).由 $\sum c_{\alpha}\rho^{\alpha}$ 收敛推出 $M \triangleq \sup\limits_{\alpha}\|c_{\alpha}\rho^{\alpha}\| < \infty$. 任给 $z \in P_s(a)$,有

$$\|c_{\alpha}(z-a)^{\alpha}\| \leqslant Ms^{\alpha}/\rho^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_{+}^{n}. \tag{4.2.6}$$

而当 $0 \leqslant x_j \leqslant s_j(1 \leqslant j \leqslant n)$ 时有

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{x_j}{\rho_j}\right)^{-1} = \sum_{\alpha}\frac{x^{\alpha}}{\rho^{\alpha}}. \tag{4.2.7}$$

式(4.2.7)右端级数可逐项微分任意次,且微分后的级数保持绝对并一致收敛.对照级数(4.2.5)与式(4.2.7)并利用不等式(4.2.6)得出:式(4.2.5)右端级数逐项微分任意次后仍在 $P_s(a)$ 内绝对并一致收敛.由定理2.2.1得 $f \in H(P_r(a),E)$ 且 $\partial^{\alpha}f(a) = \alpha!c_{\alpha}(\alpha \in \mathbb{Z}_{+}^{n})$,因此式(4.2.5)即为 $f(z)$ 的 Taylor 级数表示. □

以上结果表明,就 Taylor 级数表示而言,从单变量情形过渡到多变量情形并未出现重大的新情况. Laurent 级数的情况要复杂一些,其差别与其说是分析上的,不如说是几何上的.单变量的 Laurent 级数适用于圆环域 $\{z: r < |z-a| < R\}$. 圆环的 n 维推广就是球环,即 $\mathbb{C}^n$ 中两个同心球面所夹的区域.但多变量的 Laurent 级数并不必限制在球环中考虑,如同样可在形如 $P_r(a)\backslash\bar{P}_s(a)(0 < s_j < r_j, 1 \leqslant j \leqslant n)$ 的区域内考虑.更适当的做法是在一般的所谓 Reinhardt 域内考虑.若一区域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 满足条件

$$z \in \Omega, \lambda \in \mathbb{T}^n \Rightarrow (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2, \cdots, \lambda_n z_n) \in \Omega, \tag{4.2.8}$$

则称 Ω 为 Reinhardt 域.中心在原点的球环及前述的 $P_r(0)\backslash\bar{P}_s(0)$ 就是 Reinhardt 域的例子.

定理 4.2.3 　设 $f \in H(\Omega,E)$,Ω 是一个 Reinhardt 域,则 f 在 Ω 内可唯一地展开为紧一致收敛的 Laurent 级数

$$f(z) = \sum_{k} c_k z^k, \tag{4.2.9}$$

其中,k 遍取 $\mathbb{Z}^n$(下面保持此约定而不再注明).

证 　唯一性.设展开式(4.2.9)成立.取 $a \in \Omega$,使 $a_j \neq 0(1 \leqslant j \leqslant n)$,则对任给 $k \in \mathbb{Z}^n$ 有

$$\frac{1}{(2\pi)^n a^k}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi} f(a_1 e^{i\theta_1}, \cdots, a_n e^{i\theta_n}) e^{-ik\cdot\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n a^k}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi}\sum_l c_l a^l \mathrm{e}^{\mathrm{i}(l-k)\cdot\theta}\mathrm{d}\theta = c_k, \qquad (4.2.10)$$

其中用了条件(4.2.8)，$\theta = (\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)$. 可见系数 c_k 由 f 唯一决定.

存在性. 任给 $\lambda \in \Omega$，取充分小的 $\varepsilon > 0$，使

$$O(\lambda,\varepsilon) \triangleq \{z: |\lambda_j| - \varepsilon < |z_j| < |\lambda_j| + \varepsilon (1 \leqslant j \leqslant n)\} \subset \Omega.$$

利用单变量的 Laurent 展开式(由式(4.1.8))并对 n 用归纳法，可得展开式

$$f(z) = \sum_k c_k(\lambda) z^k, \quad z \in O(\lambda,\varepsilon),$$

它在 $O(\lambda,\varepsilon)$ 内紧一致收敛. 任给 $\lambda' \in O(\lambda,\varepsilon)$，取充分小的 $\varepsilon' > 0$，使 $O(\lambda',\varepsilon') \subset O(\lambda,\varepsilon)$，则在 $O(\lambda',\varepsilon')$ 内有

$$\sum_k c_k(\lambda) z^k = \sum_k c_k(\lambda') z^k.$$

由已证的唯一性，有 $c_k(\lambda) = c_k(\lambda')$，这说明 $c_k(\lambda)$ 在 Ω 内局部地为常数. 而 Ω 是区域，故 $c_k(\lambda) = c_k$ 与 λ 无关. 因此形如式(4.2.9)的展开式存在且右端级数在 Ω 内紧一致收敛. □

至此，已完成表示解析函数的 3 个主要工具——Cauchy 公式、Taylor 级数与 Laurent 级数——到多变量情形的推广. 这些都是我们乐于看到的单变量与多变量两种情形共享的结果. 但似乎漏掉了一个在 4.1 节中最被看好的结果，即引理 4.1.1. 实际上，引理 4.1.1 亦可推广于多变量情形，只是其证明要困难得多，以致不能像 4.1 节中那样置于本节之首. 有了前面的一些结果之后，现在考虑引理 4.1.1 的推广. 不过，此处仍然不能给出一个完全的证明，因需要用到如下著名定理：

定理 4.2.4(Hartogs)　设 $f: \Omega \to \mathbb{C}$ 分别对各变元解析，则 $f \in H(\Omega)$.

关于 Hartogs 定理可参见文献(Narasimhan, 1971).

下面就是与引理 4.1.1 相当的结果.

定理 4.2.5　对于一个函数 $f: \Omega \to E$，以下条件互相等价：

(i) $f \in H(\Omega, E)$；

(ii) $f(z) = f(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ 分别对各变元是解析的；

(iii) f 是弱解析的，即 $\forall \varphi \in E^*$，有 $\varphi \circ f \in H(\Omega)$.

证　(i) ⇒ (ii) 是平凡的.

(ii) ⇒ (iii)　由 Hartogs 定理推出.

(iii) ⇒ (i)　这是本证明的主要部分. 如同引理 4.1.1 之证，此处也要用一个有界性论证，且同样求助于命题 1.6.1，只是具体作法上稍有不同. 设条件(iii)满足，取定 $z \in \Omega$，今证 $f'(z)$ 存在. 由条件(iii)与引理 4.1.1 推出，f 对各变元是解析的，因而 $\partial_j f(z)$ 存在，$\partial_j = \partial/\partial z_j (1 \leqslant j \leqslant n)$. 只要证

$$\left\| \Delta f(z,h) - \sum_j \partial_j f(z) h_j \right\| = o(|h|),$$

其中，$h=(h_1,h_2,\cdots,h_n)\in\mathbb{C}^n$. 为此又只要证(这是关键!)：当 $|h|$ 充分小时，

$$J(f,h)\triangleq|h|^{-2}\left[\Delta f(z,h)-\sum_j \partial_j f(z)h_j\right]$$

有界. 这相当于证 $J(f,h)$ 弱有界，即 $J(g,h)$ 有界，其中，$g=\varphi\circ f,\varphi\in E^*$. 取 $P_{2r}(z)\subset\Omega$，令 $g(z+h)=\sum c_\alpha h^\alpha$，则

$$|c_\alpha|\leqslant M/r^\alpha(\alpha\in\mathbb{Z}_+^n),\quad M=\sup_{\lambda\in P_r(z)}|g(\lambda)|,$$

这用到定理4.2.2(i)与不等式(4.2.3). 令 $\delta^{-1}=\left(\sum r_j^{-2}\right)^{1/2}$，则当 $|h|<\delta/2$ 时，

$$\begin{aligned}|J(g,h)|&=\frac{1}{|h|^2}\left|\sum_{|\alpha|\geqslant 2}c_\alpha h^\alpha\right|\leqslant\frac{M}{|h|^2}\sum_{|\alpha|\geqslant 2}\frac{|h^\alpha|}{r^\alpha}\\&\leqslant\frac{M}{|h|^2}\sum_{m=2}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{|h_j|}{r_j}\right)^m\\&\leqslant\frac{M}{|h|^2}\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{|h|}{\delta}\right)^m\\&=\frac{M}{\delta(\delta-|h|)}\leqslant\frac{2M}{\delta^2},\end{aligned}$$

这正表明 $J(g,h)$ 在 $|h|<\delta/2$ 内有界，如所要证. □

4.1 节对引理4.1.1 的意义所作的评述，自然亦可用于定理4.2.5，不必重述.

至此，与4.1 节比较，就只剩下唯一性定理与最大模原理未作推广. 但这些内容将于4.3 节中在更一般的情况下统一处理，此处不必单独考虑.

于是，我们似乎可以得出结论：除了某些技术上的复杂性与记号上的累赘之外，多复变理论保留了单复变理论的主要特点. 然而，现在应特别强调，已看到的事实不应造成一种错觉，似乎二者确无重大差异. 实际上，稍微深入的考察就会发现，二者有着不可弥合的深刻差别. 确立这种差别，乃是近代函数论中的重大事件.

即使用较简单的例子，也能解释多复变理论的异乎寻常之处. 设定理4.2.3 中的区域 Ω 有以下性质：

$$\forall j\in\{1,2,\cdots,n\},\exists z\in\Omega,\text{使 }z_j=0,\tag{4.2.11}$$

则当 $k\in\mathbb{Z}^n\setminus\mathbb{Z}_+^n$ 时必定 $c_k=0$，此处 c_k 依式(4.2.10). 这样一来，式(4.2.9) 中的级数 $\sum c_k z^k$ 实际上是一幂级数. 这就得到以下颇为惊人的结果：

定理4.2.6　设 $f\in H(\Omega,E)$，Ω 是具有性质(4.2.11)的 Reinhardt 域，则 f 可扩张为区域 $\widetilde{\Omega}$ 内的解析函数，$\widetilde{\Omega}$ 表为

$$\widetilde{\Omega}=\{(\lambda_1z_1,\cdots,\lambda_nz_n):z\in\Omega,0\leqslant\lambda_j\leqslant 1(1\leqslant j\leqslant n)\}.\tag{4.2.12}$$

这就值得考察一下条件(4.2.11)赋予区域 Ω 的几何特点. 直观上，条件(4.2.11)无非是说，$\mathbb{C}^n$ 中每个坐标面均通过 Ω. 若 $n=1$，则条件(4.2.11) 等价于 Ω 包含原

点,因而圆环$\{z \in \mathbb{C}: r < |z| < R\}$不满足条件(4.2.11). 与此相反,当$n > 1$时,球环$\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n: r < |z| < R\}$则满足条件(4.2.11),且容易看出$\widetilde{\Omega} = B_R(0)$(依(4.2.12)). 因此,球环$\Omega$内的解析函数必可扩张为球$B_R(0)$内的解析函数. 经一平移又得出球环$\{z: r < |z - a| < R\}$内的解析函数必可扩张为球$B_R(a)$内的解析函数. 这就得到与单复变理论大相径庭的以下结果:

推论 4.2.1 设$f \in H(\Omega, E)$,$\Omega \subset \mathbb{C}^n$,$n > 1$,则$f$不能有孤立奇点. 若$f \in H(\Omega)$,则$f$不能有孤立零点.

从单复变理论的眼光看来,以上结论简直是难以想象的. 从前面对球环的考察可以看出,由推论 4.2.1 所体现的单复变理论与多复变理论的差别,本质上源于空间$\mathbb{C}^n(n > 1)$与$\mathbb{C}$在几何结构上的差别.

从定理 4.2.6 还可推出如下稍复杂的结论,它也不会在单变量理论中发生:

定理 4.2.7(Hartogs) 设$P = P_r(0) \subset \mathbb{C}^n$,$n > 1$,$V$是$\partial P$的开邻域,使得$V \cap P$连通. 若$f \in H(V, E)$,则$f$必可扩张为$P \cup V$上的解析函数.

证 取充分小的$\varepsilon > 0$,令$s_j = r_j - \varepsilon$,$s = (s_1, s_2, \cdots, s_n)$,则$\Omega \triangleq P \backslash \bar{P}_s(0) \subset V$,$\Omega$是一个满足条件(4.2.11)的 Reinhardt 域,$\widetilde{\Omega} = P$,$\widetilde{\Omega}$依式(4.2.12). 由定理 4.2.6,$f|\Omega$可扩张为P内的解析函数g. 因$\Omega \subset P \cup V$,而$P \cap V$连通,$g|\Omega = f$,故必$g|P \cap V = f$, 此处提前用了将在 4.3 节建立的唯一性定理 4.3.2. 定义

$$h(z) = \begin{cases} f(z), & z \in V, \\ g(z), & z \in P, \end{cases}$$

则$h(z)$是f在$P \cup V$上的解析扩张. □

注意V一般不是"单连通"的,即它可能包围一个"洞". 定理 4.2.7 则表明,可通过解析扩张消除f定义域中的洞. 这在单复变的情况下显然是做不到的.

4.3 从向量到向量的函数

在 4.2 节中实现了解析函数论从单复变情形到多复变情形的扩展. 这一扩展过程或许走得并不如预期得那么远,但毕竟成果颇丰,令人鼓舞. 这就不免让人产生新的信心:或许还能再进一步,实现解析函数论从多复变情形到一般向量变量情形的跨越. 这不只是出于对逻辑上自然延伸的偏爱,也受到某些实际需要的驱动. 后面这一层理由,在读过章之后会看得更清楚些. 当然,我们希望新的扩展不只是一个定义加上少数平凡结论,而是真正富有成果的. 首要的问题自然是:前两节建立起来的那些具有"解析理论"标志性特征的结果,能在多大程度上被继承? 这无疑是一个饶有趣味但尚待探讨的问题,本节中幸而能看到某些肯定的答案.

本节设X与E均为复 Banach 空间,$\Omega \subset X$. 不消说,此处的X正是用来取代前两节中的$\mathbb{C}$与$\mathbb{C}^n$的. 从Ω到E的可微函数及其导数的概念并不是新的,它已包含在

2.1 节的微分理论中了. 在 2.1 节中笼统地设定空间的基域为 $\mathbb{K}$,并未深究 $\mathbb{K}$ 取 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{C}$ 会有多大差别. 正如前两节的内容所提示的,“X 与 E 是复 Banach 空间”这一设定,将使可微函数 $f: \Omega \to E$ 具有异乎寻常的意义. 我们迈出的第一步就是:将前两节的用语与记号形式地移植过来:若一个函数 $f: \Omega \to E$ 处处可微,就称 f 为 Ω 内的**解析函数**,此种函数之全体记作 $H(\Omega,E)$. 同样令 $H(\Omega) = H(\Omega,\mathbb{C})$.

研究如此一般的解析函数,最初的感觉似乎是难有所为(你能考虑这种函数的 Cauchy 公式与 Taylor 级数吗?). 这就更紧迫地需要某种归化法. 不妨首先总结一下 4.2 节中的经验. 对于一个解析函数 $f: \Omega \subset \mathbb{C}^n \to E$,有两种归化法可用. 其一是考虑 $\varphi \circ f \in H(\Omega)(\varphi \in E^*)$,此方法对于解析函数 $f: \Omega \subset X \to E$ 未必有用,因 $\varphi \circ f \in H(\Omega)(\varphi \in E^*)$ 作为一个向量变量的复解析函数(称为解析泛函),并不能归入前两节所考察的解析函数之内. 另一种归化法是将对 $f \in H(\Omega,E)$ 的研究转化成一个单复变问题,将此方法移用于 $f: \Omega \subset X \to E$ 却是现实可行的,它正是本节所依仗的主要方法,从使用效果来看它足以令人满意.

设 $f \in H(\Omega,E)$. 取定 $x \in \Omega, h \in X$,则函数

$$g(\lambda) = f(x + \lambda h) \tag{4.3.1}$$

必在某个圆 $D_R(0)(\subset \mathbb{C})$ 内有定义,且是 $D_R(0)$ 内的 E 值解析函数. 自然的做法是对如上的 $g(\lambda)$ 充分运用 4.1 节中的结论,然后再看从这些结论对函数 f 能说明什么. 由定理 4.1.2(ii), $g(\lambda)$ 有 Taylor 级数表示

$$g(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} g^{(n)}(0)\lambda^n, \quad \lambda \in D_r(0), \tag{4.3.2}$$

其中, $g^{(0)}(0) = f(x)$,当 $n \geqslant 1$ 时,

$$g^{(n)}(0) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n} f(x + \lambda h) \Big|_{\lambda=0} \triangleq \delta^n f(x,h). \tag{4.3.3}$$

$\delta^n f(x,h)$ 称为 f 在 x 关于 h 的 n 阶变分,对于 $E = \mathbb{C}$ 的情况,一阶变分已在 2.1 节中提到了. $\delta^n f(x,h)$ 对 h 显然是 n 次齐次的:

$$\delta^n f(x,\alpha h) = \alpha^n \delta^n f(x,h), \quad \alpha \in \mathbb{C}. \tag{4.3.4}$$

若 $\|h\|$ 适当小,则可设 $R > 1$,因而可在式(4.3.2)中取 $\lambda = 1$,得到

$$f(x + h) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \delta^n f(x,h). \tag{4.3.5}$$

若已知 f 任意次可微, 则从式(4.3.3)得

$$\delta^n f(x,h) = f^{(n)}(x)h^n, \quad n \geqslant 1. \tag{4.3.6}$$

以此代入式(4.3.5),并约定 $f^{(0)}(x)h^0 = f(x)$,得到

$$f(x + h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)h^n. \tag{4.3.7}$$

这正是 f 在 x 展开的 Taylor 级数,它无疑是我们最想得到的具明显解析理论标志的结果. 但我们面前有一严重的障碍:如何从 f 可微推出它必定无限次可微? 这也是

经典复分析好不容易才解决的基本问题. 本节的第一项任务就是全力解决上述问题. 实际上,我们面对的问题至少在形式上要容易些:只要证明$f \in H(\Omega,E)$ 在 Ω 内处处二次可微就够了,因这样一来,就有$f' \in H(\Omega,L(X,E))$,反复运用已证的结论就可说明f无限次可微. 不过,即使仅仅确定$f'(x)(x \in \Omega)$ 存在,也不很简单,需要预先作些准备.

设 $T: X^n \to E$ 是一个对称的 n 重线性算子(见 1.5 节),记 $\hat{T}x = Tx^n$,定义

$$\|\hat{T}\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|\hat{T}x\|. \tag{4.3.8}$$

直接看出 $\|\hat{T}x\| \leqslant \|\hat{T}\| \|x\|^n (x \in X)$. 在 1.5 节中已定义

$$\|T\| = \sup_{\|x_1\| \leqslant 1, \cdots, \|x_n\| \leqslant 1} \|Tx_1x_2\cdots x_n\|.$$

引理 4.3.1 设 $T: X^n \to E$ 是对称的 n 重线性算子,则

$$\|\hat{T}\| \leqslant \|T\| \leqslant (n^n/n!) \|\hat{T}\|. \tag{4.3.9}$$

证 由式(1.5.15)直接看出 $\|\hat{T}\| \leqslant \|T\|$. 其次,设$x_j \in X$, $\|x_j\| = 1(1 \leqslant j \leqslant n)$,则

$$\begin{aligned} n!2^n \|Tx_1x_2\cdots x_n\| &= \left\| \sum_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n = \pm 1} \varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n \hat{T}\left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j\right) \right\| \\ &\leqslant \sum_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n = \pm 1} \|\hat{T}\| \left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j \right\|^n \\ &\leqslant 2^n \|\hat{T}\| n^n, \end{aligned}$$

这推出 $\|T\| \leqslant (n^n/n!) \|\hat{T}\|$. □

引理 4.3.2 设$f: \Omega \to E$, $\forall x \in \Omega, h \in X$,一阶变分

$$\delta f(x,h) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} f(x + \lambda h) \Big|_{\lambda=0}$$

恒存在,则 $\delta f(x,h)$ 对 h 是线性的.

证 只要证 $\delta f(x,h)$ 对 h 是可加的. 取定 $x \in \Omega, h_1, h_2 \in X$,令

$$g(\lambda) = f(x + \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2), \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2),$$

$g(\lambda)$ 在 $\lambda = 0$ 的某个邻域 U 内有定义,且存在

$$\partial g(\lambda)/\partial \lambda_j = \delta f(x + \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2, h_j), \quad j = 1,2,$$

因此 $g \in H(U,E)$(由定理 4.2.5). 在 $\lambda = 0$ 展开 $g(\lambda)$ 得

$$g(\lambda) = g(0) + \lambda_1 \frac{\partial g(0)}{\partial \lambda_1} + \lambda_2 \frac{\partial g(0)}{\partial \lambda_2} + o(\lambda),$$

即

$$f(x + \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2) = f(x) + \lambda_1 \delta f(x,h_1) + \lambda_2 \delta f(x,h_2) + o(\lambda).$$

令 $\lambda_1 = \lambda_2 = \tau \in \mathbb{C}$ 得

$$f(x + \tau(h_1 + h_2)) = f(x) + \tau[\delta f(x,h_1) + \delta f(x,h_2)] + o(\tau).$$

另一方面有

$$f(x+\tau(h_1+h_2)) = f(x) + \tau\,\delta f(x,h_1+h_2) + o(\tau),$$

两相比较得出 $\delta f(x,h_1+h_2) = \delta f(x,h_1) + \delta f(x,h_2)$，如所要证. □

作了以上准备之后，现在已可建立本节的主要结果.

定理 4.3.1　设 $f \in H(\Omega,E)$，则 f 在 Ω 内无限次可微且 $\forall x \in \Omega$，存在 $r_x > 0$，f 在 x 处可展开为 Taylor 级数(4.3.7)，其中，$\|h\| < r_x$.

证　如已指出的，只要证 $f''(x)(x \in \Omega)$ 存在. 取定 $x \in \Omega$，取 $\rho > 0$，使 $\bar{B}_\rho(x) \subset \Omega$ 且 $M \triangleq \sup\{\|f(x+h)\| : \|h\| \leqslant \rho\} < \infty$. $\forall h \in \bar{B}_\rho(0)$，由式(4.1.7) 有

$$\left\| \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n} f(x+\lambda h) \Big|_{\lambda=0} \right\| \leqslant n!M.$$

由此推出，$\forall h \in X$，有

$$\|\delta^n f(x,h)\| \leqslant n!M(\|h\|/\rho)^n. \tag{4.3.10}$$

取定 $h_j \in X(1 \leqslant j \leqslant n)$，定义

$$g(\lambda) = f(x+\lambda_1 h_1 + \cdots + \lambda_n h_n),\quad \lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

则 g 是 $\lambda = 0$ 的某个邻域内的解析函数. 设 $n \geqslant 1$，令

$$T_n h_1 h_2 \cdots h_n = \frac{\partial^n g(0)}{\partial\lambda_1 \partial\lambda_2 \cdots \partial\lambda_n} = \frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left[\frac{\partial^{n-1} g(\lambda_1,0,\cdots,0)}{\partial\lambda_2\partial\lambda_3\cdots\partial\lambda_n}\right]\Bigg|_{\lambda_1=0}.$$

由引理 4.3.2，T_n 对 h_1 是线性的. 同理，T_n 对 $h_j(2 \leqslant j \leqslant n)$ 也是线性的. T_n 关于 $(h_1,h_2,\cdots,h_n)$ 显然是对称的，因此 T_n 是一个对称的 n 重线性算子. 不难看出 $\widehat{T}h = \delta^n f(x,h)$，于是从式(4.3.10) 得

$$\|\widehat{T}_n h\| \leqslant n!M\rho^{-n}\|h\|^n,$$

这推出 $\|\widehat{T}_n\| \leqslant n!M\rho^{-n}$，然后用引理 4.3.1 得

$$\|T_n\| \leqslant M(n/\rho)^n,\quad n \geqslant 1, \tag{4.3.11}$$

可见 $T_n \in L_s^n(X,E)$（记号见 1.5 节）. 定义

$$A_n h_1 h_2 \cdots h_n : X \to E,\quad k \to T_{n+1} h_1 \cdots h_n k,$$

则易见 $A_n h_1 h_2 \cdots h_n \in L(X,E)$ 且

$$\|A_n h_1 h_2 \cdots h_n\| \leqslant \|T_{n+1}\|\,\|h_1\|\,\|h_2\| \cdots \|h_n\|.$$

进而有 $A_n \in L_s^n(X,L(X,E))$，$\|A_n\| \leqslant \|T_{n+1}\|(n \geqslant 1)$.

以 $\delta f(x,h) = f'(x)h$，$\delta^n f(x,h) = T_n h^n (n \geqslant 2)$ 代入式(4.3.5) 得

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} T_n h^n. \tag{4.3.12}$$

推广命题 2.1.1(ii) 可算出 $(T_n h^n)'k = nT_n h^{n-1}k$，故得 $(T_n h^n)' = nA_{n-1}h^{n-1}(n \geqslant 2, h \in X)$. 于是式(4.3.12) 两边对 h 求导得(可设 $\|h\|$ 充分小，因而可用定理 2.2.1)

$$f'(x+h) = f'(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} A_n h^n.$$

利用 $\|A_n\| \leqslant \|T_{n+1}\|$ 及式(4.3.11)可作如下估计:

$$
\begin{aligned}
&\|f'(x+h)-f'(x)-A_1h\|\\
&=\left\|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}A_nh^n\right\| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\|A_n\|\,\|h\|^n\\
&\leqslant \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\|T_{n+1}\|\,\|h\|^n \leqslant \sum_{n=2}^{\infty}c_n\|h^n\|,
\end{aligned}
\tag{4.3.13}
$$

其中,$c_n=\dfrac{M}{n!}\left(\dfrac{n+1}{\rho}\right)^{n+1}$. 由直接计算知 $\lim\limits_{n}\sqrt[n]{c_n}<\infty$,故幂级数 $\sum c_n\lambda^n$ 有正的收敛半径,于是 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}c_n\|h\|^n=o(\|h\|)(\|h\|\to 0)$. 这就从不等式(4.3.13)得出 $f'(x)=A_1\in L(X,L(X,E))$,如所要证. □

依以上证明中的记号,由式(4.3.12)得 $f^{(n)}(x)=T_n$,然后用式(4.3.11)得

$$
\|f^{(n)}(x)\| \leqslant M_\rho n^n\rho^{-n},\quad n\geqslant 1,
\tag{4.3.14}
$$

其中,$M_\rho=\sup\{\|f(y)\|:\|y-x\|\leqslant\rho\}$. 估计式(4.3.14)可与 Cauchy 不等式(4.1.7)对照. 当然,估计式(4.3.14)要粗得多(这要归因于导出不等式(4.3.11)的估计式(4.3.9)过粗),但亦不失为有用.

考察定理4.3.1 的证明不难看出,实际上无需假定 $f\in H(\Omega,E)$,只要设 f 局部有界且一阶变分 $\delta f(x,h)(x\in\Omega,h\in X)$ 恒存在,则必定存在 $f'(x)\in L(X,E)$(它就是定理证明中的 T_1),因而 $f\in H(\Omega,E)$,于是定理 4.3.1 的结论成立.

已得的 Taylor 展开式(4.3.7)无疑是一个深刻的结果. 原则上,它与式(4.1.9),式(4.2.4)相当,实际上蕴涵了后两种特殊情况. 不过,从实际运用的方便性考虑,式(4.3.7)却难以起与式(4.1.9),式(4.2.4)相当的作用. 因此,在建立有关 $f\in H(\Omega,E)$ 的其他结果时,首选工具并非 f 的 Taylor 级数表示,而是运用适当的归化法.

在4.2 节中已经提到,将在本节的一般框架内实现唯一性定理与最大模原理的推广. 现在就来做这件事. 初看起来颇出人意料的是,这些推广还相当成功. 从方法上看,这主要有赖于归化法的成功运用.

定理4.3.2(唯一性定理) 设 $f\in H(\Omega,E)$,Ω 是一区域(即连通开集),集 $\{f=0\}$ 内部非空,则 $f(x)\equiv 0(x\in\Omega)$.

证 令 $A=\{f=0\}^\circ$,由定理条件知 A 为非空开集. 只要证 A 是 Ω 中的相对闭子集(对照定理4.1.4之证). 任给 $b\in\Omega\cap\bar{A}$,今证 $b\in A$(如此则 A 为相对闭集). 因 b 是 Ω 的内点,故有 $r>0$ 使 $B_r(b)\subset\Omega$. 由 $b\in\bar{A}$ 知有 $x\in A\cap B_r(b)$. $\forall y\in B_r(b)$,令 $g(\lambda)=f(x+\lambda(y-x))$,则有包含线段$[0,1]$在内的某个平面区域 U,使得 $g\in H(U,E)$. 由 $x\in A$ 推出 $g(\lambda)$ 在 $\lambda=0$ 的邻近为零. 于是由定理4.1.3 推出 $g(\lambda)\equiv 0(\lambda\in U)$,特别地,$f(y)=g(1)=0$. 因此 $f|B_r(b)=0$,$b\in A$. □

试比较定理4.1.3与定理4.3.2的条件:定理4.1.3要求集$\{f=0\}$在Ω内至少有一聚点,而定理4.3.2要求$\{f=0\}$在Ω内至少有一内点. 显然后者要强些,因而定理4.3.2并非定理4.1.3的完全推广. 尽管如此,“$\{f=0\}^\circ\neq\varnothing$”仍然是一个很弱的条件,这就决定了定理4.3.2的应用价值. 当$\dim X>1$时定理4.3.2的条件不能减弱为“$\{f=0\}$在Ω内有聚点”. 例如, 设$f\in X^*$,则显然$f\in H(X,\mathbb{C})$,即使有X的子空间A,使$f|A=0,A\neq\{0\}$,也未必$f(x)\equiv 0$.

定理4.3.3(最大模原理) 设$f\in H(\Omega,E)$,Ω是一区域,$a\in\Omega$.

(i) 若 $\|f(a)\|=\max\limits_{x\in\Omega}\|f(x)\|$,则 $\|f(x)\|\equiv\|f(a)\|\,(x\in\Omega)$;

(ii) 若E是Hilbert空间, $\|f(x)\|$ 在点a取得局部极大,则$f(x)\equiv f(a)$.

证 只证结论(i),(ii)的证明是类似的. 令$A=\{x\in\Omega:\ \|f(x)\|=\|f(a)\|\}$,如同定理4.1.4(i)之证,只要证$a\in A^\circ$. 取$r>0$使$B_r(a)\subset\Omega$. $\forall x\in B_r(a)$,令$g(\lambda)=f(a+\lambda(x-a))$,则$g(\lambda)$是某个圆$D_R(0)$内的解析函数,$R>1$. 因 $\|g(\lambda)\|\leqslant\|f(a)\|=\|g(0)\|$,故由定理4.1.4(i)有 $\|g(\lambda)\|\equiv\|g(0)\|$,从而 $\|f(x)\|=\|f(a)\|$. 这表明$B_r(a)\subset A$,$a\in A^\circ$得证. □

从字面上看,定理4.3.3与定理4.1.4毫无区别,不免使人惊奇. 但从应用上看,两者的情况就有所不同. 例如, 从定理4.1.4推出的推论4.1.1(i)与(ii),就不能推广到目前的情况,除非$\Omega\subset\mathbb{C}^n$. 这是因为,在$\dim X=\infty$的情况下,$\overline{\Omega}$不是紧集,即使$f\in C(\overline{\Omega},E)$, $\|f(x)\|$ 也未必在$\overline{\Omega}$上取得最大值. 试看以下例子.

例4.3.1 取$X=l^1$,$\Omega=B_1(0)\subset l^1$, 定义

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{1+k^{-1}-x_k},\quad x=(x_k)\in\overline{\Omega}.$$

(i) 验证$f\in C(\overline{\Omega})$. $\forall x,y\in\overline{\Omega}$,有

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)|&\leqslant\sum_k\left|\frac{x_k}{1+k^{-1}-x_k}-\frac{y_k}{1+k^{-1}-y_k}\right|\\&\leqslant\sum_k\left|\frac{(1+k^{-1})(x_k-y_k)}{(1+k^{-1}-x_k)(1+k^{-1}-y_k)}\right|\\&\leqslant\text{const}\sum_k|x_k-y_k|=\text{const}\ \|x-y\|_1.\end{aligned}$$

(ii) 验证$f\in H(\Omega)$. 设$x,x+h\in\Omega$,今验证

$$f'(x)h=\sum_k\frac{(1+k^{-1})h_k}{(1+k^{-1}-x_k)^2}\triangleq Th.$$

直接看出$T\in(l^1)^*\cong l^\infty$,

$$|\Delta f(x,h)-Th|\leqslant\sum_k\left|\frac{x_k+h_k}{1+k^{-1}-x_k-h_k}-\frac{x_k}{1+k^{-1}-x_k}-\frac{(1+k^{-1})h_k}{(1+k^{-1}-x_k)^2}\right|$$

$$= \sum_k \frac{(1+k^{-1})h_k^2}{(1+k^{-1}-x_k-h_k)(1+k^{-1}-x_k)^2}$$

$$\leqslant \text{const} \sum_k h_k^2 = o(\|h\|_1),$$

这正表明$f'(x) = T$.

(iii) 设$\{e_k\}$是l^1的标准基,则直接看出$f(e_k) = k$,因此

$$\sup\{|f(x)|: \|x\|_1 \leqslant 1\} = \infty.$$

Schwarz 引理虽可推广于现在的情况,但原来的证法却不再适用.

定理 4.3.4(Schwarz 引理) 设$f \in H(B_R(0),E)$,$0 < R < \infty$,$f(0) = 0$,$\|f(x)\| \leqslant M < \infty$ ($\forall x \in B_R(0)$),则 $\|f(x)\| \leqslant (M/R)\|x\|$.

证 设$0 \neq x \in B_R(0)$,令$g(\lambda) = f(\lambda x)$. 则$g(\lambda)$是$|\lambda| < R/\|x\|$内的解析函数,$g(0) = 0$, $\|g(\lambda)\| \leqslant M$. 于是由推论4.1.1(iii)有

$$\|g(\lambda)\| \leqslant (M\|x\|/R)|\lambda|.$$

取$\lambda = 1$得出 $\|f(x)\| \leqslant (M/R)\|x\|$,如所要证. □

推论 4.3.1(Liouville 定理) 若$f: X \to E$是有界解析函数,则$f(x) \equiv f(0)$ ($\forall x \in X$).

4.4 收敛定理与正规族

如同4.3节一样,仍设X与E均为复 Banach 空间,$\Omega \subset X$或$\Omega \subset \mathbb{C}^n$. 与前3节不同,现在的关注点不再是单个$f \in H(\Omega,E)$的性质,而是$H(\Omega,E)$作为一个函数空间的性质. 这符合已熟悉的思路:既然在前两章中已分别考虑了可微函数的空间$\mathscr{E}^r$与p次可积函数的空间L^p,现在考虑解析函数的空间是顺理成章的事. 注意,作为集合而言,$H(\Omega,E)$比$C^r(\Omega,E)$,$L^p(\Omega,E)$都更单纯,它不含r,p一类的参数. 更重要的是,我们将发现,$H(\Omega,E)$中的收敛性具有十分特别的性质. 在这一点上,也体现出解析理论的标志性特点:少量的信息可推出极强的结论.

如同在构成空间$\mathscr{E}^r$时所提到的,首要的问题是选择适当的收敛性. 对于函数空间$H(\Omega,E)$而言,问题似乎很简单:局部一致收敛就是最佳选择,其理由充分地体现于如下简单而又令人吃惊的定理中:

定理 4.4.1 设序列$\{f_m\} \subset H(\Omega,E)$局部一致收敛于$f$,则$f \in H(\Omega,E)$且$\{f_m\}$在$\Omega$内$C^\infty$局部一致收敛于$f$(由定义2.2.1).

证 由定理2.2.1,只需证$\{f'_m\}$在Ω内局部一致收敛. 任取$a \in \Omega$,取充分小的$r > 0$. $\forall x \in B_r(a)$,$m,p \in \mathbb{N}$,由不等式(4.3.14)有

$$\|f'_m(x) - f'_p(x)\| \leqslant r^{-1}\sup\{\|f_m(y) - f_p(y)\|: y \in B_{2r}(a)\}.$$

这就由$\{f_m\}$局部一致收敛推出$\{f'_m\}$局部一致收敛. □

当 $\Omega \subset X$ 时,在 $H(\Omega,E)$ 中固然可定义 LCS 结构,使其中的收敛恰为局部一致收敛,但下面限定 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ (定理 4.4.6 除外),这样可运用更方便的 F 空间的语言,且可与 2.2 节的内容联系起来. 对于 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$,任给紧集 $K \subset \Omega$,令

$$\|f\|_K = \sup_{z\in K} \|f(z)\|, \quad f \in H(\Omega,E), \tag{4.4.1}$$

则 $\{\|f\|_K: K \subset \Omega$ 为紧集$\}$ 是 $H(\Omega,E)$ 上的一个分离半范族,它将 $H(\Omega,E)$ 定义为一个 F 空间,其中,收敛就是紧一致收敛($\Leftrightarrow$局部一致收敛). 由定理 4.4.1 进而推出,若序列 $\{f_m\} \subset H(\Omega,E)$ 紧一致收敛于零,则它必 C^∞ 紧一致收敛于零,这意味着 $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $\{\partial^\alpha f_m\}$ 紧一致收敛于零. 注意 Ω 可看成 $\mathbb{R}^{2n}$ 的开子集,每个 $f \in H(\Omega,E)$ 可看成 $2n$ 个实变量的 C^∞ 函数. 在这一理解下,有如下结论:

推论 4.4.1 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$,则 $H(\Omega,E)$ 作为 F 空间是 F 空间 $\mathscr{E}(\Omega,E)$ 的闭子空间.

以上的讨论表明了,$H(\Omega,E)$ 中的紧一致收敛蕴涵了极强的信息. 另一方面,我们仍然要极力寻求形式上更弱的条件,使之足以推出紧一致收敛. 这是关于解析函数收敛性的一个基本课题. 下面的结果表明,在一定条件下,紧一致收敛甚至可由 L^2 收敛推出.

定理 4.4.2 设 $H^2(\Omega,E) = H(\Omega,E) \cap L^2(\Omega,E)$,在 Ω 中采用 $2n$ 维 Lebesgue 测度,E 是 Hilbert 空间. 则 $H^2(\Omega,E)$ 是 $L^2(\Omega,E)$ 的闭子空间,因而是一个 Hilbert 空间; $H^2(\Omega,E)$ 中的 L^2 收敛蕴涵紧一致收敛.

特别地,$H^2(\Omega) \triangleq H(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ 依 L^2 范数是一个 Hilbert 空间.

证 只要证 $H^2(\Omega,E)$ 中的 L^2 收敛蕴涵紧一致收敛(其余结论将随之推出). 设序列 $\{f_m\} \subset H^2(\Omega,E)$ 是 L^2 收敛的. 任给 $a \in \Omega$,取 $r_j > 0$ 充分小,$1 \leqslant j \leqslant n$, $r = (r_1, r_2, \cdots, r_n)$. $\forall z \in P_r(a)$, $m,p \in \mathbb{N}$,今证

$$\pi^{n/2} r_1 r_2 \cdots r_n \|f_m(z) - f_p(z)\| \leqslant \|f_m - f_p\|_2. \tag{4.4.2}$$

令 $g = f_m - f_p$,固定 $z \in P_r(a)$,令 $g(\lambda) = \sum c_\alpha (\lambda - z)^\alpha$, $\lambda = x + \mathrm{i}y \in P_r(z)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. 约定 $\rho = (\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n)$, $\mathrm{d}\rho = \mathrm{d}\rho_1 \mathrm{d}\rho_2 \cdots \mathrm{d}\rho_n$, θ, $\mathrm{d}\theta$ 类似,则

$$\begin{aligned}
\|g\|_2^2 &\geqslant \iint_{P_r(z)} \|g(\lambda)\|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \int_0^{r_1} \cdots \int_0^{r_n} \left\| \sum_\alpha c_\alpha \rho^\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\cdot\theta} \right\|^2 \rho_1 \cdots \rho_n \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{\alpha,\beta} \langle c_\alpha, c_\beta \rangle \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \int_0^{r_1} \cdots \int_0^{r_n} \rho^{\alpha+\beta} \rho_1 \cdots \rho_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\beta)\cdot\theta} \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \\
&= (2\pi)^n \sum_\alpha \|c_\alpha\|^2 r_1^{2\alpha_1+2} \cdots r_n^{2\alpha_n+2} \Big/ \prod_{j=1}^n (2\alpha_j + 2) \\
&\geqslant \pi^n \|c_0\|^2 (r_1 r_2 \cdots r_n)^2,
\end{aligned}$$

这正表明式(4.4.2)成立. 由式(4.4.2)显然推出要证的结论. □

定义 4.4.1 若 A 是 F 空间 $H(\Omega,E)$ 中的相对紧集,则称 A 为**正规族**.

显然,A 为正规族的充要条件是 A 中任何序列含紧一致收敛子列. 寻求一解析函数族成为正规族的适当条件,是解析函数论的重要课题之一. 这方面已有大量经典结果,我们将其中某些结论推广于向量值解析函数,以展示处理这类问题的方法. 如在其他情况下一样,有关正规族的定理亦表现出解析理论的标志性特点:出人意料地少的条件导致正规族的结论.

任给 $A \subset H(\Omega,E)$, $V \subset \Omega$, 约定 $A(V) = \{f(z): f \in A, z \in V\}$. 若 $\forall z \in \Omega$, 存在 z 的邻域 V 使 $A(V)$ 有界,就说 A 局部一致有界.

引理 4.4.1 设 $A \subset H(\Omega,E)$, $K \subset \Omega$ 为紧集. 若 A 局部一致有界,则 A 在 K 上等度连续(参考定理 1.3.3).

证 用不等式(4.3.14)易推出,$\{f': f \in A\}$ 亦在 Ω 内局部一致有界. 因 K 为紧集,故有充分小的 $r > 0$, 使 $L = K + \overline{B}_r(0) \subset \Omega$. L 必为紧集,因而 $M \triangleq \sup\{\|f'\|_L: f \in A\} < \infty$. $\forall z,\lambda \in K$, 当 $|z-\lambda| < r$ 时,线段 $[z,\lambda]$ 含于 L, 于是由中值定理 2.1.1 得出

$$\|f(z) - f(\lambda)\| \leqslant \|f'\|_L |z-\lambda| \leqslant M|z-\lambda|, \quad f \in A.$$

这显然推出 A 在 K 上等度连续. □

以下是关于正规族的一个基本结果.

定理 4.4.3 对于 $A \subset H(\Omega,E)$, 以下条件互相等价:

(i) A 是正规族;

(ii) 任给紧集 $K \subset \Omega$, 集 $A(K)$ 相对紧;

(iii) A 局部一致有界;任给 $z \in \Omega$, 集 $A(z) \triangleq A(\{z\})$ 相对紧.

证 (i)⇒(ii) 设 A 是正规族,$K \subset \Omega$ 为紧集. 为说明 $A(K)$ 相对紧,关键是注意到 $A \times K$ 相对紧而 $A(K) = \Phi(A \times K)$, 此处

$$\Phi: H(\Omega,E) \times \Omega \to E, \quad (f,z) \to f(z).$$

不难直接验证 Φ 连续,因而 $\Phi(A \times K)$ 相对紧.

(ii)⇒(iii) 是平凡的.

(iii)⇒(i) 设条件(iii)满足,$\{f_m\} \subset A$ 是任给序列,今要从 $\{f_m\}$ 中选出紧一致收敛子列. 取 Ω 中紧集的穷竭序列 $\{K_j\}$(由定理 1.3.7). 由 A 局部一致有界及引理 4.4.1 推出 A 在每个 K_j 上等度连续,因而可依次在 K_j 上应用定理 1.3.3. 首先取出 $\{f_m\}$ 的子列 $\{f_m^1\}$, 使它在 K_1 上一致收敛, 然后取出 $\{f_m^1\}$ 的子列 $\{f_m^2\}$, 使它在 K_2 上一致收敛,……,一般地,取 $\{f_m^{j-1}\}$ 的子列 $\{f_m^j\}$, 使其在 K_j 上一致收敛. 如同定理 1.3.3 之证,取对角线序列 $\{f_m^m\}$, 它就是 $\{f_m\}$ 的紧一致收敛子列. □

若 $\dim E < \infty$, 则 $A(z)$ 相对紧 ⇔ $A(z)$ 有界,而后者由 A 局部一致有界推出. 这就从定理 4.4.3 得到

推论4.4.2 设$A \subset H(\Omega,E)$,$\dim E < \infty$. 则A是正规族$\Leftrightarrow A$局部一致有界.

再回到前面已提及的一序列$\{f_m\} \subset H(\Omega,E)$紧一致收敛的条件. 当$\{f_m\}$紧一致收敛时显然必定局部一致有界. 现在的问题是:在局部一致有界的基础上,能否附加一个尽可能弱的条件,使之足以推出紧一致收敛?下面的定理表明,只要附设$\{f_m\}$在某个很小的子集上收敛就够了.

定理4.4.4(Vitali) 设Ω是一区域,序列$\{f_m\} \subset H(\Omega,E)$局部一致有界,它在集$A$上每点收敛, 则在以下两种情况下$\{f_m\}$紧一致收敛:

(i) $\Omega \subset \mathbb{C}$,$A = \{z_k\}$为可数集,$z_k \to z_0 \in \Omega$;

(ii) $\Omega \subset \mathbb{C}^n$,$\dim E < \infty$,$A^\circ \neq \varnothing$.

证 首先考虑情况(i). 不妨设$0 \neq z_k \to 0(k \to \infty)$,$K = \overline{D}_1(0) \subset \Omega$, $\|f_m\|_K \leqslant 1$(否则作一简单代换). 令$f_m(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{mj} z^j (|z| \leqslant 1)$. 由不等式(4.1.7)推出$\|c_{mj}\| \leqslant 1 (m \geqslant 1, j \geqslant 0)$. 利用这一结果推出,当$|z| < 1/2$时,

$$\|f_m(z) - c_{m0}\| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |z|^j \leqslant 2|z|.$$

于是当k适当大时, 对任给$m,p \in \mathbb{N}$有

$$\begin{aligned}\|c_{m0} - c_{p0}\| &\leqslant \|c_{m0} - f_m(z_k)\| + \|f_m(z_k) - f_p(z_k)\| + \|f_p(z_k) - c_{p0}\| \\ &\leqslant 4|z_k| + \|f_m(z_k) - f_p(z_k)\|,\end{aligned}$$

由此看出$\{c_{m0}\}$收敛,设$c_{m0} \to c_0 \in E(m \to \infty)$. 以$z^{-1}[f_m(z) - c_{m0}]$取代$f_m(z)$重复以上论证得$c_{m1} \to c_1 \in E(m \to \infty)$. 一般地,有$c_{mj} \to c_j \in E(m \to \infty)$,$\|c_j\| \leqslant 1(j \geqslant 0)$. 令$f(z) = \sum_0^{\infty} c_j z^j (|z| < 1)$,则当$|z| \leqslant r < 1$时, 有

$$\|f_m(z) - f(z)\| \leqslant \sum_{j=1}^{k} \|c_{mj} - c_j\| + 2\sum_{j>k} r^j.$$

由此看出在$|z| \leqslant r$内$f_m \rightrightarrows f$. 令$V = \{z \in \Omega: \{f_m\}$在$z$的某邻域内一致收敛$\}$, 则以上所证表明$V$必为$\Omega$中的相对闭集,且$z_0 \in V$, 另一方面$V$显然是开集. 于是由连通性得出$V = \Omega$,这正表明$\{f_m\}$在$\Omega$内紧一致收敛.

其次考虑情况(ii). 用反证法. 设$\{f_m\}$在某个紧集$K \subset \Omega$上不一致收敛,则必有$\varepsilon > 0$,$\{f_m\}$的子列$\{g_m\}$与$\{h_m\}$,序列$\{z_m\} \subset K$,使得

$$\|g_m(z_m) - h_m(z_m)\| \geqslant \varepsilon, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{4.4.3}$$

由推论4.4.2, $\{f_m\}$是正规族,这就不妨设依紧一致收敛有$g_m \to g$,$h_m \to h$, 也设$z_m \to z_0 \in K(m \to \infty)$. 于是由式(4.4.3)推出$\|g(z_0) - h(z_0)\| \geqslant \varepsilon$. 另一方面,显然$g|A = h|A$. 这就由唯一性定理4.3.2推出$g(z) \equiv h(z)(z \in \Omega)$,得出矛盾. □

定理4.4.4中的条件(i)与(ii)可分别表述为$\{f_m\}$的收敛点集在Ω内至少有一聚点(对于$\Omega \subset \mathbb{C}$),或至少有一内点(对于$\Omega \subset \mathbb{C}^n$). 满足这些条件的收敛点集

仍可以足够"小"，这就显著增加了 $\{f_m\}$ 紧一致收敛的机会.

推论 4.4.3 设 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 是一区域，$A\subset H(\Omega,E)$ 局部一致有界. 若存在可数集 $\{z_k\}\subset\Omega$，使 $z_k\to z_0\in\Omega$，$A(z_k)$ 相对紧，则 A 为正规族.

此外，应用推论 4.1.1(i) 直接推出以下简单结果：

定理 4.4.5 设 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 是一有界区域，$\{f_m\}\subset H(\Omega,E)\cap C(\bar{\Omega},E)$ 在 $\partial\Omega$ 上一致收敛，则 $\{f_m\}$ 在 Ω 内一致收敛于某个解析函数 f.

若 $\Omega\subset X$，则只能建立以下比 Vitali 定理结论弱得多的结果：

定理 4.4.6 设 $\Omega\subset X$ 是一区域，序列 $\{f_m\}\subset H(\Omega,E)$ 局部一致有界，它在集 A 上每点收敛，$A^\circ\neq\varnothing$，则 $\{f_m\}$ 在 Ω 内点态收敛于某个 $f\in H(\Omega,E)$ 且 $f_m^{(k)}(x)h^k\to f^{(k)}(x)h^k(m\to\infty, x\in\Omega, h\in X, k\in\mathbb{N})$.

证 令 $V=\{x\in\Omega\colon \{f_m\}$ 在 x 的某邻域内收敛$\}$，则 V 是开集，$A^\circ\subset V$. 设 $a\in\Omega\cap\bar{V}$. 取 $r>0$ 充分小，使 $B_r(a)\subset\Omega$，且 $\{f_m\}$ 在 $B_r(a)$ 内一致有界. $\forall x\in B_r(a)$，取 $y\in B_r(a)\cap V$，令 $g_m(\lambda)=f_m(x+\lambda(y-x))$，则 $g_m(\lambda)$ 在某个包含区间 $[0,1]$ 的平面区域 U 内解析且关于 m,λ 一致有界. 由 $y\in V$ 得出 $\{g_m(\lambda)\}$ 在 $\lambda=1$ 邻近收敛，于是由定理 4.4.4 得出 $\{g_m\}$ 在 U 内紧一致收敛. 这推出 $\{f_m(x)\}$ 收敛，从而 $a\in V$，这表明 V 是 Ω 的相对闭子集. 由连通性必 $V=\Omega$，故 $\{f_m\}$ 在 Ω 内点态收敛于某个函数 f.

任给 $x\in\Omega, h\in X$，$\{f_m(x+\lambda h)\}$ 必在某个圆 $|\lambda|<r$ 内一致收敛于 $f(x+\lambda h)$，这推出 f 局部有界且 $\delta f(x,h)$ 恒存在，因而 f 解析，

$$\lim_m f_m^{(k)}(x)h^k=\lim_m\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\lambda^k}f_m(x+\lambda h)\bigg|_{\lambda=0}=f^{(k)}(x)h^k,\quad k\geqslant 1.$$

□

第5章　Banach 代数

在前面3章中我们看到,经典实分析与复分析的某些基本内容已成功地推广于无限维向量值函数.但稍细地观察就会发现,这些推广并不完美,一个重大缺陷就是迄今不能在向量值函数之间施行乘法,因而使经典分析中涉及乘法运算的那一部分内容在 Banach 空间分析学中要么无立足之地,要么只能以某种扭曲的形式出现(如考虑微分公式(2.1.7)与分部积分公式(2.1.23)).缺少乘法而给分析学造成的损失有多大,是不言而喻的.补救这一缺陷的必要步骤是在 Banach 空间中引入满足适当规则的乘法运算,而这就进入 Banach 代数的领域了.

Banach 代数理论的形成始于20世纪三四十年代,它既是 Banach 空间理论的自然延伸,也是分析学中若干重大课题驱动的结果. M. H. Stone 与 Gelfand 等的奠基性工作对 Banach 代数理论的发展起了重要作用.如所预期的,在 Banach 代数中可展开更完美的分析理论.在 Banach 代数框架下建立的算子演算与谱理论等,构成近代分析学中最优美且最富有成果的部分之一. Banach 代数理论上的重要突破,既得益于代数结构的完善,也得益于解析函数工具的有效运用.代数与分析两方面的有效结合,导致 Banach 代数中大量深刻结果涌现,这些结果为处理一些形式上很不相同的分析课题提供了统一的理论框架,致使 Banach 代数成为众多分析理论的交汇点. Banach 代数的语言与理论构架,对于处理算子理论、函数逼近论、Fourier 分析及群表示论等领域中的复杂问题,是不可缺少的.

本章限于考虑**复** Banach 代数.虽然部分内容也适用于实 Banach 代数,但像谱理论、(*)代数这样一些课题只有对于复 Banach 代数才能获得完善的处理,更不必说解析函数这一强有力工具的运用了.鉴于解析函数工具的必要性,继续使用第4章的记号与约定而不另加说明.特别要提到的是 $\mathbb{C}$ 中的圆记号 $D_r(a)$ 与解析函数类 $H(\Omega)$.

5.1　基本概念·谱

本节首先概述有关 Banach 代数的最必需的概念与基本用语,然后重点考虑在本章中起重要作用的谱概念.

简单地说,Banach 代数就是带乘法运算的 Banach 空间,其准确定义如下:

定义 5.1.1　设 A 是一个复向量空间,其中,定义了乘法 $A\times A\to A,(x,y)\to xy$,使得以下条件满足:

(A_1) 结合律：$(xy)z = x(yz)$；

(A_2) 分配律：$x(y+z) = xy + xz, (y+z)x = yx + zx$；

(A_3) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$，

其中，$x,y,z \in A, \alpha \in \mathbb{C}$，则称 A 为一个复代数. 若复代数 A 同时是一个赋范空间且其中的范数满足条件

(A_4) $\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|(x,y \in A)$，

则称 A 为一个复**赋范代数**. 当 A 作为赋范空间完备时称其为复 **Banach 代数**，简称为复 B 代数. 乘法可交换（即 $xy \equiv yx$）的 B 代数称为交换 B 代数.

本书限于考虑复 Banach 代数，今后省去"复"字. 其次，类似于定理 1.2.1，每个不完备赋范代数均可依标准方式完备化为一个 B 代数. 因此今后给定的赋范代数都假定是 B 代数. 当然，在具体问题中并不排除使用 B 代数的不完备子代数.

设 A 是一个 B 代数. 若存在 $e \in A$ 满足条件

(A_5) $xe = ex = x(x \in A)$，

则称 e 为 A 的单位元. 这样的 e 必是唯一的且必 $e \neq 0$（除非 $A = \{0\}$，今后总排除这种不足道的情况），因而由 $\|e\| = \|e^2\| \leqslant \|e\|^2$ 推出 $\|e\| \geqslant 1$. 今后总设 $\|e\| = 1$（否则适当改赋等价范数）. 若 A 无单位元，则任取一个不在 A 中的元，记为 e，令 $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}e$，则 $\tilde{A}$ 依范数

$$\|x + \lambda e\| = \|x\| + |\lambda|, \quad x \in A, \lambda \in \mathbb{C}$$

是一个 Banach 空间且 $\|e\| = 1$. 然后定义乘法

$$(x + \lambda e)(y + \tau e) = (xy + \lambda y + \tau x) + \lambda\tau e,$$

使 $\tilde{A}$ 成为一个以 e 为单位元的 B 代数. 因此，不失一般性，不妨设下面考虑的 B 代数 A 具有单位元 e 且 $\|e\| = 1$.

若 $x,y \in A$ 满足 $xy = e = yx$，则称 x 为可逆元或正则元，称 y 为 x 的逆元. 当 x 的逆元存在时必唯一，记作 x^{-1}. 以 G 或 $G(A)$ 记 A 中可逆元之全体.

若 S 是 A 的向量子空间且 $\forall x,y \in S$，有 $xy \in S$，则称 S 为 A 的子代数，它亦是一个赋范代数，但仅当它是闭子代数时才是一个 B 代数. 至于是否 $e \in S$，则要依具体情况而定. 若 A 与 B 是两个代数，线性算子 $T: A \to B$ 满足条件

$$T(xy) = (Tx)(Ty), \quad x,y \in A,$$

则称 T 为**代数同态**，称 $\mathrm{Ker}\,T \triangleq T^{-1}(0)$（0 是 B 的零元）为 T 的核，称为**同态核**；当 $\mathrm{Ker}\,T = \{0\}$ 时称 T 为单同态. 若进而设 T 是一个双射，则称 T 为**代数同构**. 若 A 与 B 均为 B 代数，代数同构 $T: A \to B$ 满足 $\|Tx\| = \|x\|$，则称 T 为等距的代数同构. 两个等距代数同构的 B 代数实质上并无区别，通常视为等同. 若 A 等距代数同构于 B 的某个子代数，则说 A 可嵌入 B，通常不妨就认为 A 是 B 的子代数. 因

$$\mathbb{C} \to A, \quad \lambda \to \lambda e, \tag{5.1.1}$$

显然是一个等距的代数同态，故 $\mathbb{C}$ 总可以嵌入 A，不妨认为 $\mathbb{C}$ 即为 A 的一个子代数，

且等同 λ 与 $\lambda e(\lambda \in \mathbb{C})$. 这一事实今后将随时利用而不另作说明.

下面介绍 B 代数的几个典型例子,它们作为解释概念的样本将反复出现在本章后面各节中.

例 5.1.1　(i) **算子代数** $L(X)$. 设 X 是一个复 Banach 空间,则 $L(X)$ 中的算子乘法显然满足条件(A_1) ~ (A_4)(由定义 5.1.1,下同),因而 $L(X)$ 是一个 B 代数. 单位算子 I 是 $L(X)$ 的单位元且 $\|I\| = 1$. $T \in L(X)$ 是可逆元 $\Leftrightarrow T$ 是 X 的自同构,可逆元的全体就是 $\mathrm{GL}(X)$. $L(X)$ 称为 X 上的有界线性算子代数,简称为算子代数. 算子代数是最重要的 B 代数之一,在一定程度上,正是对于算子代数的研究促成了抽象 Banach 代数理论的形成. 当 $X = \mathbb{C}^n$ 时 $L(\mathbb{C}^n)$ 可等同于$\mathbb{C}^{n\times n}$,即 n 阶复矩阵之全体,称之为**矩阵代数**. 作为 B 代数 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 固然有点特殊,但仍不失为一般 B 代数的一个有用样本,在讨论 B 代数的代数性质时尤其如此.

设 A 是一个 B 代数. 任给 $a \in A$,以 L_a 记左乘算子,即 $L_a x = ax(x \in A)$,则易验证 $L_a \in L(A)$ 且 $\|L_a\| = \|a\|$. 显然有

$$L_{\lambda a+\mu b} = \lambda L_a + \mu L_b, \quad L_{ab} = L_a L_b, \quad a,b \in A, \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

由此可见,

$$A \to L(A), \quad a \to L_a \tag{5.1.2}$$

是一个等距的代数同态,故可认为 A 是 $L(A)$ 的子代数. 因此不妨说,算子代数及其子代数穷尽了所有 B 代数. 于此足见算子代数对于 Banach 代数理论的重要性.

(ii) **连续函数代数** $C(\Omega)$. 设 Ω 是一个紧 Hausdorff 空间,则 $C(\Omega) = C(\Omega,\mathbb{C})$ 依 sup 范数 $\|\cdot\|_0$ 是一个 Banach 空间,其中,通常的函数乘法平凡地满足条件(A_1) ~ (A_4)且是可交换的,因此 $C(\Omega)$ 是一个交换 B 代数. $C(\Omega)$ 中的单位元是 1(即恒等于 1 的函数),可逆元就是 Ω 上处处不为零的连续函数, x^{-1} 就是 $1/x$.

若 Ω 是一个非紧的 LCH,则 $C_0(\Omega)$ 是一个无单位元的 B 代数. 以 Ω_∞ 记 Ω 的一点紧化(由定理 1.3.8),则 $C(\Omega_\infty)$ 是以 1 为单位元的 B 代数,它可看成是 $C_0(\Omega)$ 附加单位元的结果. 这个例子表明,以抽象形式 $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}e$ 表达的扩张,在具体情况下可能有很自然的解释.

若 Ω 是任给非空集,则 $B(\Omega)$ (见例 1.2.1(i))依通常的乘法是一个交换 B 代数,其单位元为 1. 若 Ω 是拓扑空间,则 $B(\Omega)$ 以 $C_b(\Omega)$ 为其闭子代数.

(iii) **圆代数** $A(D)$. 设 $D = D_1(0) \subset \mathbb{C}$, $A(D) = H(D) \cap C(\bar{D})$,则 $A(D)$ 是 $C(\bar{D})$ 的一个闭子代数,因而是一个交换 B 代数, $1 \in A(D)$.

(iv) **Wiener 代数** $l^1(\mathbb{Z}^n)$. $l^1(\mathbb{Z}^n)$ 依范数 $\|\varphi\|_1 = \sum |\varphi(k)|$ 是一个 Banach 空间(见 3.5 节). 任给 $\varphi,\psi \in l^1(\mathbb{Z}^n)$,定义其卷积为

$$(\varphi * \psi)(k) = \sum_l \varphi(k-l)\psi(l), \quad k \in \mathbb{Z}^n,$$

则不难验证乘法 $(\varphi,\psi) \to \varphi * \psi$ 满足条件(A_1) ~ (A_4)且 $\varphi * \psi = \psi * \varphi$,因此

$l^1(\mathbb{Z}^n)$ 是一个交换 B 代数. 设 $\delta \in l^1(\mathbb{Z}^n)$ 定义为 $\delta(0) = 1, \delta(k) = 0 (k \neq 0)$, 则 δ 是 $l^1(\mathbb{Z}^n)$ 的单位元. 约定 $e_k(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} (k \in \mathbb{Z}^n, x \in \mathbb{R}^n, k \cdot x$ 记内积). 任给 $\varphi \in l^1(\mathbb{Z}^n)$, 令 $\hat{\varphi} = \sum \varphi(k) e_k$, 则 $\hat{\varphi} \in C(\mathbb{T}^n)$ (见式(2.2.14)). 若 $\varphi, \psi \in l^1(\mathbb{Z}^n)$, 则

$$\hat{\varphi}\hat{\psi} = \sum_k \varphi(k) e_k \sum_l \psi(l) e_l = \sum_k (\varphi * \psi)(k) e_k.$$

这表明

$$l^1(\mathbb{Z}^n) \to C(\mathbb{T}^n), \quad \varphi \to \hat{\varphi}^{①} \tag{5.1.3}$$

是一个代数同态且为单同态. 若令 $\|\hat{\varphi}\| = \|\varphi\|_1$, 则 $\{\hat{\varphi}: \varphi \in l^1(\mathbb{Z}^n)\}$ 是 $C(\mathbb{T}^n)$ 的一个子代数, 它等距代数同构于 $l^1(\mathbb{Z}^n)$, 因而也是一个 B 代数, 它与 $l^1(\mathbb{Z}^n)$ 都称为 Wiener 代数, 传统上称为 Wiener 环.

再回到一般的 B 代数 A. 中心概念是谱, 它源于矩阵的特征值概念. 如所熟知, 对于一个 $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ 是 M 的特征值 $\Leftrightarrow \lambda I - M$ 不可逆. 这推广到 B 代数中就是谱概念. 强调一下, 已约定 G 记 A 中可逆元之全体.

定义 5.1.2 任给 $x \in A$, 令

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C}: \lambda e - x \notin G\}, \quad \rho(x) = C \backslash \sigma(x). \tag{5.1.4}$$

$\sigma(x)$ 与 $\rho(x)$ 分别称为 x 的谱与预解集, 其中的值分别称为 x 的**谱值**与**正则值**, 称

$$r_\sigma(x) = \sup\{|\lambda|: \lambda \in \sigma(x)\} \tag{5.1.5}$$

为 x 的**谱半径**. 若 $\lambda \in \rho(x)$, 则称 $R(\lambda, x) \triangleq (\lambda e - x)^{-1}$ 为 x 的**预解式**.

对于 $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\sigma(M)$ 就是 M 的特征值之集.

初看起来, $\lambda e - x$ 属于 G 与否是一个很平常的条件, 似乎并无深意. 然而, 由此条件出发竟演绎出一个精彩宏富的理论, 使谱概念显示出异乎寻常的重要性, 以致占据了 B 代数理论的中心位置, 实在令人惊异. 不过, 谱概念本身只是一些简单的规定, 并不能独立发挥作用. 谱能成为一个强有力的工具, 有赖于涉及谱的一些深刻结论, 首先有赖于如下基本问题的解答: 谱值是否存在? 谱 $\sigma(x)$ 有何特点? 函数 $R(\lambda, x)$ 有何性质? 本节将给出一些基本的结果. 为此, 首先作一些准备.

定义 5.1.1(A_4)有一些重要推论. 首先, $\forall x, y, a, b \in A$, 有

$$\|xy - ab\| \leqslant \|x\| \|y - b\| + \|x - a\| \|b\|,$$

这推出乘法是连续的. 其次, 归纳地有

$$\|x_1 x_2 \cdots x_n\| \leqslant \|x_1\| \|x_2\| \cdots \|x_n\|, \quad \|x^n\| \leqslant \|x\|^n, \tag{5.1.6}$$

其中, $x_i, x \in A (1 \leqslant i \leqslant n)$. 总约定 $x^0 = e$.

引理 5.1.1 (i) 设 $x \in G, h \in A$, 则

$$(x + h)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{-1}(-hx^{-1})^n, \tag{5.1.7}$$

① 在 6.6 节中将看到, 这是定义在 $l^1(\mathbb{Z}^n)$ 上的 Fourier 变换.

只要其右端级数收敛. 当 $\|h\| < \|x^{-1}\|^{-1}$ 时式(5.1.7) 必成立;

(ii) G 是开集, $J: G\to A, x\to x^{-1}$ 是解析函数(对照引理 2.3.3).

(iii) $R(\lambda,x)$ 是开集$\{(\lambda,x):\lambda e-x\in G\}$ 内的解析函数, $\rho(x)$ 是开集, $\sigma(x)$ 是闭集.

证　(i) 以 y 记式(5.1.7)右端,则依直接计算易验知

$$y(x+h) = e = (x+h)y,$$

因而 $y=(x+h)^{-1}$,故式(5.1.7) 成立. 若 $\|h\| < \|x^{-1}\|^{-1}$,而由式(5.1.6) 有

$$\|x^{-1}(-hx^{-1})^n\| \leqslant \|x^{-1}\|(\|h\|\|x^{-1}\|)^n,$$

由此看出式(5.1.7)右端之级数绝对收敛,因而式(5.1.7)必成立.

(ii) 已证结论(i)表明 G 是开集. 如同引理 2.3.3 之证,利用式(5.1.7)可得(对照式(2.3.7)) $J'(x)h=-x^{-1}hx^{-1}(x\in G,h\in A)$. 因此 J 在 G 内处处可微,因而是解析函数(见 4.3 节).

(iii) 由(ii)推出. □

任给 $x\in G,h\in A$,当 $|\lambda|$ 充分小时, 由式(5.1.7) 得

$$(x+\lambda h)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{-1}(-hx^{-1})^n\lambda^n.$$

而由式(4.3.7)有 $J(x+\lambda h)=\sum_0^{\infty}(1/n!)J^{(n)}(x)h^n\lambda^n$. 两相比较得

$$J^{(n)}(x)h^n = n!x^{-1}(-hx^{-1})^n,\quad x\in G,h\in A. \tag{5.1.8}$$

这可看成熟知公式 $(\lambda^{-1})^{(n)}=n!(-1)^n\lambda^{-n-1}$ 的某种推广. 不过,并不能由式(5.1.8) 得出 $J^{(n)}(x)=n!(-1)^n x^{-n-1}$!

在引理 5.1.1 的基础上,可建立如下令人惊异的 **Gelfand 定理**:

定理 5.1.1　任给 $x\in A$, $\sigma(x)$ 是非空紧集且成立谱半径公式

$$r_\sigma(x)=\lim_n \sqrt[n]{\|x^n\|}. \tag{5.1.9}$$

特别地,由式(5.1.9)推出 $r_\sigma(x)\leqslant\|x\|$.

证　取定 $x\in A$. 首先建立等式

$$\lim_n\sqrt[n]{\|x^n\|}=\inf_{n\geqslant1}\sqrt[n]{\|x^n\|}\triangleq\beta. \tag{5.1.10}$$

只需证 $\overline{\lim}\sqrt[n]{\|x^n\|}\leqslant\beta$. 为此,又只需对任给 $m\in\mathbb{N}$, 证

$$\overline{\lim_n}\sqrt[n]{\|x^n\|}\leqslant\sqrt[m]{\|x^m\|}.$$

固定 $m\in\mathbb{N}$. $\forall n\in\mathbb{N}$,必有 $p,q\in\mathbb{Z}_+$,使得 $n=mp+q, q<m$. 于是

$$\begin{aligned}\overline{\lim_n}\|x^n\|^{1/n}&\leqslant\overline{\lim_n}(\|x^m\|^p\|x\|^q)^{1/n}\\&=\overline{\lim_n}\|x^m\|^{(1/m)\cdot(mp/n)}=\|x^m\|^{1/m}.\end{aligned}$$

其次,直接应用式(5.1.7)得

$$R(\lambda,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}, \tag{5.1.11}$$

只要式(5.1.11)右端级数收敛. 设β依式(5.1.10),则$\lim \sqrt[n]{\|\lambda^{-n}x^n\|} = \beta/|\lambda|$. 于是式(5.1.11)右端级数在$|\lambda| < \beta$时发散,$|\lambda| > \beta$时绝对收敛,此时$\lambda \in \rho(x)$. 这得出$r_\sigma(x) \leqslant \beta$,$\sigma(x)$是有界闭集,从而是紧集. 必定$\sigma(x) \neq \varnothing$,否则$R(\lambda,x)$是$\lambda$的整函数,而式(5.1.11)表明$\lambda = \infty$是$R(\lambda,x)$的零点,因而由 Liouville 定理(推论 4.1.1(iv))推出$R(\lambda,x) \equiv R(\infty,x) = 0$,得出矛盾. 因式(5.1.11)正是$R(\lambda,x)$的 Laurent 级数表示,它适用于任何$|\lambda| > r_\sigma(x)$(由定理 4.1.2(i)). 但已指出式(5.1.11)右端级数在$|\lambda| < \beta$时发散,故必$\beta \leqslant r_\sigma(x)$. 因此$\beta = r_\sigma(x)$. □

Gelfand 定理是最优美的分析定理之一,其形式至为简洁,而结论却异常深刻,这在分析学定理中堪称典范. 在抽象分析中,准确的定量结果殊为少见,像谱半径公式这样简洁的定量结果更令人惊异,特别值得珍视. 还应注意的是,$r_\sigma(x)$完全决定于A的代数结构,$\lim \sqrt[n]{\|x^n\|}$则决定于A中的度量,而等式(5.1.9)则将这两个来源与性质似乎都完全不同的量联系起来,其深刻性自然异乎寻常.

Gelfand 定理的许多出人意料地深刻的应用见于各种问题,本章中不乏机会去体验这类应用. 现在就看两个较简单的例子,其中,第一个属于 Gelfand-Mazur.

推论 5.1.1 若A中任何非零元可逆,则$A \cong \mathbb{C}$(等距代数同构).

证 任给$x \in A$,取$\lambda \in \sigma(x)$,则必$\lambda e - x = 0$,因而$x = \lambda e$. 因此式(5.1.1)是一个等距代数同构. □

注意以上证明中仅用到$\sigma(x) \neq \varnothing$这一结论.

推论 5.1.2 任给$x,y \in A$,有$xy - yx \neq e$.

注 如从线性代数所知,任给$M,N \in \mathbb{C}^{n\times n}$,有$MN - NM \neq I$,此由$\operatorname{tr}(MN) = \operatorname{tr}(NM)$推出. 下面的证法与此毫不相干.

证 首先指出:若$0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$,则$\lambda \in \sigma(xy) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(yx)$. 事实上,若$\lambda \notin \sigma(xy)$,令$z = (\lambda e - xy)^{-1}$,则由直接计算可验证$e + yzx = \lambda(\lambda e - yx)^{-1}$. 现在设$xy - yx = e$,则$\sigma(xy) = \sigma(yx) + 1$. 若$0 \in \sigma(yx)$,则$1 \in \sigma(xy)$,从而$1 \in \sigma(yx)$. 如此反复,推出$n \in \sigma(yx)$($\forall n \in \mathbb{N}$),这与$\sigma(yx)$有界矛盾. 若$0 \notin \sigma(yx)$,任取$\lambda \in \sigma(xy)$,类似于上面的论证可得$\lambda - n \in \sigma(xy)$($\forall n \in \mathbb{N}$),同样得出矛盾. □

以上证明中仅仅用了"谱集非空有界",结论已经非凡. 如果用上谱半径公式,应能导出更深刻的结论. 下面应用谱半径公式得出关于幂级数收敛性的一个颇为漂亮的结果. 幂级数正是 B 代数所独有的解析工具,在本章中将频繁地用到.

定理 5.1.2 设$\{a_n : n \geqslant 0\} \subset A$,

$$R^{-1} = \overline{\lim_n} \sqrt[n]{\|a_n\|}, \tag{5.1.12}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{5.1.13}$$

(i) 若 $x \in A, r_\sigma(x) < R$,则 $f(x)$ 依式(5.1.13)有定义且 $\sum a_n x^n$ 绝对收敛;

(ii) 设 $R > 0$. 若 $0 < r < R$,则 $\sum a_n x^n$ 在 $\|x\| \leqslant r$ 内绝对并一致收敛; $f(x)$(依式(5.1.13))在 $|x| < R$ 内解析,式(5.1.13)即 $f(x)$ 的 Taylor 级数表示;

(iii) 若 $|\lambda| > R$,则 $\sum a_n \lambda^n$ 发散,因而 $f(\lambda e)$ 无定义. 因此,$B_R(0)$ 是使 $f(x)$ 在其中处处有定义的最大的球;

(iv) 若 $\{a_n\} \subset \mathbb{C}, x \in A$,则级数 $\sum a_n x^n$ 在 $r_\sigma(x) < R$ 时绝对收敛,在 $r_\sigma(x) > R$ 时发散. 特别地,当 $r_\sigma(x) < 1$ 时级数 $\sum x^n$ 绝对收敛且成立

$$(e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \tag{5.1.14}$$

当 $r_\sigma(x) > 1$ 时级数 $\sum x^n$ 发散.

证 (i) 由谱半径公式有

$$\overline{\lim_n} \sqrt[n]{\|a_n x^n\|} \leqslant \overline{\lim_n} \sqrt[n]{\|a_n\|} \lim_n \sqrt[n]{\|x^n\|} = r_\sigma(x)/R < 1.$$

由级数理论中熟知的 Cauchy 判别法,知 $\sum a_n x^n$ 绝对收敛.

(ii) 设 $\|x\| \leqslant r < \rho < R$,则由式(5.1.12)推出,当 n 充分大时,有

$$\|a_n x^n\| \leqslant \|a_n\| r^n \leqslant (r/\rho)^n.$$

这推出级数 $\sum a_n x^n$ 在 $\|x\| \leqslant r$ 内绝对并一致收敛,因而在球 $\|x\| < R$ 内局部一致收敛. 因每项 $a_n x^n$ 显然是 x 的解析函数,故由定理 4.4.1 得出 $f(x)$(由式(5.1.13))是 $\|x\| < R$ 内的解析函数. 任给 $k \in \mathbb{N}$,有

$$f^{(k)}(0)x^k = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\lambda^k} f(\lambda x)\bigg|_{\lambda=0} = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\lambda^k} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \lambda^n \bigg|_{\lambda=0} = k! a_k x^k.$$

这表明 $\sum a_n x^n$ 正是 $f(x)$ 的 Taylor 级数(对照式(4.3.7)).

(iii) 若级数 $\sum a_n \lambda^n$ 收敛,则 $M \triangleq \sup\limits_n \|a_n \lambda^n\| < \infty$,因而

$$1 \geqslant \overline{\lim_n} \sqrt[n]{\|a_n \lambda^n\|} = \overline{\lim_n} \sqrt[n]{\|a_n\|}\, |\lambda| = |\lambda|/R,$$

这推出 $|\lambda| \leqslant R$. 因此当 $|\lambda| > R$ 时 $\sum a_n \lambda^n$ 必发散.

(iv)的证明类似于(iii). □

对于谱 $\sigma(x)$,除了知道它是非空闭集且含于 $|\lambda| \leqslant r_\sigma(x)$ 内之外,定理 5.1.1 并不能提供更具体的信息. $\sigma(x)$ 具有极多样的可能性,较直观的印象只能来自于实例. 下面就来考虑若干简单例子.

例 5.1.2 (i) 任给 $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{C}, \lambda \in \sigma(\lambda_0 e) \Leftrightarrow (\lambda - \lambda_0)e \notin G \Leftrightarrow \lambda = \lambda_0$,这

就得到$\sigma(\lambda_0 e) = \{\lambda_0\}$,$r_\sigma(\lambda_0 e) = |\lambda_0|$. 这一特例似乎简单得不值一提,但事实上它对一般理论亦不乏有益启示,不应忽视.

(ii) 设$A = C(\Omega)$依例5.1.1(ii). 任给$u \in A,\lambda \in \mathbb{C}$,有

$$\lambda \in \rho(u) \Leftrightarrow (\lambda - u)^{-1} \in C(\Omega) \Leftrightarrow \lambda \notin u(\Omega),$$

故$\sigma(u) = u(\Omega)$,$r_\sigma(u) = \|u\|_0$. 特别地,若取Ω为$\mathbb{C}$的非空紧子集,$u(\lambda) = \lambda$,则$\sigma(u) = \Omega$. 这就表明,谱可以是$\mathbb{C}$的**任何非空紧子集**,既不必是有限的或可数的,也不必是连通的或离散的.

(iii) 设$A = L(X)$,$X = C[0,1]$,$T \in L(X)$定义为

$$Tx(t) = \int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s, \quad x \in X.$$

对n用归纳法易验证

$$T^n x(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1}x(s)\,\mathrm{d}s, \quad x \in X, n \geqslant 1.$$

由此得$\|T^n x\|_0 \leqslant \|x\|_0/n!$,因而$\|T^n\| \leqslant 1/n!$. 于是$r_\sigma(T) = \lim\limits_n \sqrt[n]{\|T^n\|} = 0$, 这得出$\sigma(T) = \{0\}$(由定理5.1.1).

对于一般的B代数A,$x \in A$,当$x^n = 0$(对某个$n \geqslant 1$)时称x为幂零元,当$\lim \sqrt[n]{\|x^n\|} = 0$时称$x$为广义幂零元. 由定理5.1.1推出$\sigma(x) = \{0\} \Leftrightarrow r_\sigma(x) = 0 \Leftrightarrow x$是广义幂零元. 上面的例子表明,广义幂零元未必为幂零元.

5.2 解析扩张

设A是给定的带单位位元e的复B代数,$\|e\| = 1$.

取定$\lambda_0 \in \mathbb{C}$,令$S(\lambda_0) = \{x \in A : \lambda \in \rho(x)\}$,则显然$S(\lambda_0)$是$A$中的开集,任给$x \in S(\lambda_0)$,$R(\lambda_0,x) = (\lambda_0 e - x)^{-1}$有定义(见定义5.1.2)且

$$f(x) = R(\lambda_0,x) \tag{5.2.1}$$

是$S(\lambda_0)$内的解析函数(见引理5.1.1). 与$f(x)$相对应的复解析函数就是

$$f(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^{-1}, \quad \lambda_0 \neq \lambda \in \mathbb{C}. \tag{5.2.2}$$

形式上,$f(x)$无非是在式(5.2.2)中分别以$\lambda_0 e$与x取代λ_0与λ的结果,其中,$x \in A$满足$\sigma(x) \subset \mathbb{C}\backslash\{\lambda_0\}$($\Leftrightarrow x \in S(\lambda_0)$). 如已在5.1节中指出的,不妨认为$\mathbb{C} \subset A$,因而可将$f(x)$看成$f(\lambda)$的一个解析扩张.

若以一般的复解析函数$f(\lambda)$取代$(\lambda_0 - \lambda)^{-1}$,就引申出如下问题:给定非空开集$\Omega \subset \mathbb{C}$与$f(\lambda) \in H(\Omega)$(依第4章的记号),

(A) 是否存在$f(\lambda)$的**解析扩张**$f(x)$,$f(x)$定义于集

$$A_\Omega = \{x \in A : \sigma(x) \subset \Omega\} \tag{5.2.3}$$

上,使得$f|\Omega = f(\lambda)$(这意味着$f(\lambda e) = f(\lambda)e,\lambda \in \Omega$)?

(B) 对应 $f(\lambda) \to f(x)$ 是否保持解析函数之间的通常关系式(至少包括由代数运算、函数复合与极限运算表达的关系式)?

(C) 能否从 $f(\lambda)$ 的一定性质推断出 $f(x)$ 的相应性质?

这些问题看来远非平凡,但竟然有近乎完美的解答. 本节正是要提供这些足以令人惊异的答案. 关键的问题是要找到一条实现上述扩张的适当途径. 式(5.2.1)这一简单例子似乎提供了一点启示:如果要得到 $f(\lambda) \in H(\Omega)$ 的解析扩张 $f(x)$,那么就要给出 $f(\lambda)$ 的这样一种解析表示,使得其中的变元 λ 换成 $x \in A_\Omega$ 之后也是有意义的. 看来事情非常简单,只要作一变元的置换就完成了 $f(x)$ 的构成.

基于上述考虑,一个最自然的方案似乎是使用 Taylor 级数. 设 $f(\lambda) \in H(\Omega)$, $D_\rho(\lambda_0) \subset \Omega$,则 $f(\lambda)$ 在 $D_\rho(\lambda_0)$ 内有 Taylor 展开式(由定理 4.1.2(ii))

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^n.$$

分别以 x 与 $\lambda_0 e$ 取代其中的 λ 与 λ_0 得到

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(\lambda_0)(x - \lambda_0 e)^n. \tag{5.2.4}$$

由定理 5.1.2(iv),当 $r_\sigma(x - \lambda_0 e) < \rho(\Leftrightarrow \sigma(x) \subset D_\rho(\lambda_0))$ 时式(5.2.4)右端级数收敛,因而 $f(x)$ 有定义. 这样,通过式(5.2.4), $f(\lambda)$ 被扩张为开集

$$D_\Omega \triangleq \{x \in A: \text{存在 } D_\rho(\lambda_0) \subset \Omega \text{ 使 } \sigma(x) \subset D_\rho(\lambda_0)\} \tag{5.2.5}$$

内的 A 值函数 $f(x)$,而且 $f(x)$ 具有一个似乎足以令人满意的幂级数表示.

但经细察之后发现,上述看来最简单的方案其实并不完全可取,它有两个明显的缺陷. 首先, D_Ω(由式(5.2.5))可能严格地小于 A_Ω(由式(5.2.3)),这就可能使根据式(5.2.4)所作的解析扩张并不到位. 其次,表面上直观方便的幂级数表示式(5.2.4)用于推导函数 $f(x)$ 的性质并不特别有效.

其实,根本就不必将目光局限在 $f(\lambda)$ 的 Taylor 展开式上,何不考虑一下 Cauchy 公式! 设 $f(\lambda) \in H(\Omega)$, $z \in \Omega$,在 Ω 中取一条环绕点 z 的围道 L[①],则成立

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L f(\lambda)(\lambda - z)^{-1} d\lambda.$$

形式地,分别以 λe 与 x 取代上式中的 λ 与 z,就得到

$$f(x)^{②} = \frac{1}{2\pi i}\int_L f(\lambda) R(\lambda, x) d\lambda. \tag{5.2.6}$$

为使式(5.2.6)右端有意义,限定 $x \in A_\Omega(\Leftrightarrow \sigma(x) \subset \Omega)$,且取 L 为 Ω 中环绕 $\sigma(x)$ 的围道. 与 Taylor 级数相比,积分公式(5.2.6)似乎更抽象. 但后者有一个突出的

---

① 4.1 节中说到围道时所作的那些限定依然保持有效.

② 一些作者,如 Rudin, 将 $f(x)$ 写作 $\tilde{f}(x)$,从而强调了函数 f 与 $\tilde{f}$ 的区别. 但这一记号也引起一些麻烦,此处不拟采用. 本章总以 $f(\lambda)$ 与 $f(x)$ 区分这两个不同的函数.

优点,即积分中唯一含 x 的部分 $(\lambda e-x)^{-1}$ 是相对简单且便于处理的函数. 正因为如此,在证明下面的定理时才得以顺利完成一些关键的推理,而用幂级数反而不易做到这一点. 总之,基于 Cauchy 积分公式的解析扩张方案相当成功,下面用一个定理来汇集所得的主要结果.

定理 5.2.1 设 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 是一非空开集,A_Ω 与 D_Ω 分别依式(5.2.3) 与式(5.2.5),则以下结论成立:

(i) 任给 $f(\lambda)\in H(\Omega)$,由式(5.2.6) 定义的 $f(x)$ 是 A_Ω 内的 A 值解析函数,它是 $f(\lambda)$ 的扩张;当 $x\in D_\Omega$ 时式(5.2.6) 与式(5.2.4) 一致;若 $f(\lambda)\equiv 1$ 则 $f(x)\equiv e$,若 $f(\lambda)\equiv\lambda$,则 $f(x)=x$;

(ii) 对应 $f(\lambda)\to f(x)$ 是一代数同构;

(iii) 对应 $f(\lambda)\to f(x)$ 保持函数列的局部一致收敛性;

(iv) **谱映射公式**:$f(\sigma(x))=\sigma(f(x))\,(f(\lambda)\in H(\Omega),x\in A_\Omega)$;

(v) 若 $f(\lambda)\in H(\Omega),g(\tau)\in H(\Omega'),f(\Omega)\subset\Omega',h(\lambda)=g(f(\lambda)),x\in A_\Omega$,则 $h(x)=g(f(x))$.

证 因证明较长,将适当略去一些琐碎的细节,以便尽可能清晰展示主要思路.

(i) 取定 $f(\lambda)\in H(\Omega)$. 任给 $x\in A_\Omega$,Ω 内必存在环绕 $\sigma(x)$ 的围道 L(在直观上这当然不成问题,但要严格表述构成 L 的细节却并不简单). 因 $L\subset\Omega\cap\rho(x)$,函数 $f(\lambda)R(\lambda,x)$ 必在 L 上连续,故 $f(x)$ 依式(5.2.6) 有定义. 用 Cauchy 定理(定理 4.1.1(i))可说明 $f(x)$ 与 L 的选择无关.

今证 A_Ω 为开集,这基于就要证明的以下事实:$\sigma(x)$ 连续地依赖于 x. 取定 $a\in A_\Omega$. 由 $\sigma(a)\subset\Omega$ 与 $\sigma(a)$ 为紧集推出,存在有界开集 V,使得 $\sigma(a)\subset V,\bar{V}\subset\Omega$(由定理 1.3.6). 函数 $R(\lambda)\triangleq R(\lambda,a)$ 在 $\rho(a)$ 内解析且以 ∞ 为零点(由式(5.1.11)),因而 $\|R(\lambda)\|$ 在 V^c 上必有有限上界 $\rho^{-1}(\rho>0)$. 若 $\lambda\in V^c,h\in A,\|h\|<\rho$,则由式(5.1.7) 有

$$R(\lambda,a+h)=(\lambda e-a-h)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}R(\lambda,a)[hR(\lambda,a)]^n. \quad (5.2.7)$$

这推出 $\sigma(a+h)\subset V$,从而 $B_\rho(a)\subset A_\Omega$. A_Ω 是开集得证.

保持上段的记号. 在 Ω 中取环绕 $\bar{V}$ 的围道 L,则对任给 $x\in B_\rho(a)$,$f(x)$ 可表为式(5.2.6). 当 $\lambda\in L$ 时,$R(\lambda,x)$ 关于 x 是 $B_\rho(a)$ 内的解析函数(由引理 5.1.1),故可用定理 3.2.4 说明 $f'(x)\,(x\in B_\rho(a))$ 存在. 因此 $f(x)$ 在 A_Ω 内解析.

任给 $\lambda_0\in\Omega$,在 Ω 中取环绕 $\sigma(\lambda_0 e)=\{\lambda_0\}$ 的围道 L,则由式(5.2.6) 有

$$f(\lambda_0 e)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L f(\lambda)(\lambda e-\lambda_0 e)^{-1}\mathrm{d}\lambda=f(\lambda_0)e.$$

这表明 $f(x)$ 是 $f(\lambda)$ 的扩张.

若 $x\in D_\Omega$,不妨设 $\sigma(x)\subset D_\rho(\lambda_0),\bar{D}_\rho(\lambda_0)\subset\Omega$. 令 $L=\partial D_\rho(\lambda_0)$,则

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L f(\lambda)(\lambda e - x)^{-1}\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L f(\lambda)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-\lambda_0 e)^n}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}}\mathrm{d}\lambda \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}}\mathrm{d}\lambda\right](x-\lambda_0 e)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(\lambda_0)(x-\lambda_0 e)^n, \end{aligned}$$

其中用了式(5.1.11)与 Cauchy 公式. 可见式(5.2.6)与式(5.2.4)一致.

(ii) 只需证:若 $f(\lambda), g(\lambda) \in H(\Omega), h(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda), x \in A_\Omega$, 则 $h(x) = f(x)g(x)$. 在 Ω 中取环绕 $\sigma(x)$ 的围道 L, 然后取 Ω 中环绕 $\sigma(x)$ 与 L 的围道 Γ,则

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2}\int_L f(\lambda)R(\lambda,x)\mathrm{d}\lambda\int_\Gamma g(\tau)R(\tau,x)\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2}\int_L f(\lambda)\mathrm{d}\lambda\int_\Gamma g(\tau)\frac{R(\lambda,x)-R(\tau,x)}{\tau-\lambda}\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2}\int_L f(\lambda)R(\lambda,x)\mathrm{d}\lambda\int_\Gamma \frac{g(\tau)}{\tau-\lambda}\mathrm{d}\tau \\ &\quad - \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2}\int_\Gamma g(\tau)R(\tau,x)\mathrm{d}\tau\int_L \frac{f(\lambda)}{\tau-\lambda}\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L f(\lambda)g(\lambda)R(\lambda,x)\mathrm{d}\lambda = h(x), \end{aligned}$$

其中用了 Cauchy 定理、Cauchy 公式及等式

$$(\tau-\lambda)R(\lambda,x)R(\tau,x) = R(\lambda,x) - R(\tau,x).$$

后者可用直接计算验证,注意它正是以下初等公式的推广:

$$\frac{\tau-\lambda}{(\lambda-z)(\tau-z)} = \frac{1}{\lambda-z} - \frac{1}{\tau-z}, \quad \lambda,\tau,z \in \mathbb{C}.$$

(iii) 设 $\{f_n(\lambda)\} \subset H(\Omega)$ 在 Ω 内局部一致收敛于零, a, ρ, V 如结论(i)之证, 可设 ρ 充分小. 在 Ω 中取环绕 $\bar{V}$ 的围道 L,则对 $x \in B_\rho(a)$ 有

$$\begin{aligned} \|f_n(x)\| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_L |f_n(\lambda)| \ \|R(\lambda,x)\| \ |\mathrm{d}\lambda| \\ &\leqslant \frac{l}{2\pi}\|f_n\|_L \sup_{L\times B_\rho(a)}\|R(\lambda,x)\|, \end{aligned}$$

其中, l 是 L 之长. 因 L 是紧集,故 $\|f_n\|_L \to 0 (n\to\infty)$,于是在 $B_\rho(a)$ 内 $f_n(x) \rightrightarrows 0$. 这就证明了 $\{f_n(x)\}$ 在 A_Ω 内局部一致收敛于零.

(iv) 等式 $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$ 相当于: $\forall \alpha \in \mathbb{C}$,有

$$f(\alpha) \notin \sigma(f(x)) \Rightarrow \alpha \notin \sigma(x), \tag{5.2.8}$$

$$\alpha \notin f(\sigma(x)) \Rightarrow \alpha \notin \sigma(f(x)). \tag{5.2.9}$$

今分别证之. 若 $f(\alpha) \notin \sigma(f(x))$, 则 $f(\alpha)e - f(x) \in G$. 因

$$\varphi(\lambda) = (\alpha - \lambda)^{-1}[f(\alpha) - f(\lambda)] \in H(\Omega), \tag{5.2.10}$$

$(\alpha - \lambda)\varphi(\lambda) = f(\alpha) - f(\lambda)$, 故由已证的(ii)有 $(\alpha e - x)\varphi(x) = f(\alpha)e - f(x) \in G$, 这推出 $\alpha e - x \in G$, 即 $\alpha \notin \sigma(x)$, 结论(5.2.8) 得证.

若 $\alpha \notin f(\sigma(x))$, 则 $g(\lambda) \triangleq [\alpha - f(\lambda)]^{-1}$ 在紧集 $\sigma(x)$ 上处处有限, 因而必有开集 U, 使得 $\sigma(x) \subset U \subset \Omega, g(\lambda) \in H(U)$. 由 $g(\lambda)[\alpha - f(\lambda)] = 1$ 得

$$g(x)[\alpha e - f(x)] = e,$$

从而 $\alpha e - f(x) \in G$, 即 $\alpha \notin \sigma(f(x))$, 结论(5.2.9) 得证.

(v) 取定 $x \in A_\Omega$. 由已证的(iv)有 $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x)) \subset f(\Omega) \subset \Omega'$, 故 $f(x) \in A_{\Omega'}$, $g(f(x))$ 有定义. 取有界开集 U, 使得 $\sigma(x) \subset U$ 且 $\bar{U} \subset \Omega$. 取 U 中环绕 $\sigma(x)$ 的围道 L, 然后取 Ω' 中环绕 $f(\bar{U})$ 的围道 Γ, 则

$$\begin{aligned}
g(f(x)) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\Gamma g(\tau)R(\tau, f(x))\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2}\int_\Gamma g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \int_L \frac{R(\lambda, x)}{\tau - f(\lambda)}\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2}\int_L R(\lambda, x)\,\mathrm{d}\lambda \int_\Gamma \frac{g(\tau)}{\tau - f(\lambda)}\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L g(f(\lambda))R(\lambda, x)\,\mathrm{d}\lambda = h(x).
\end{aligned}$$

□

定理 5.2.1 蕴涵了极丰富的推论. 它与其说提供了某些具体结论, 倒不如说提供了一个可得出各种具体结论的一般公式. 简单说来就是: 若关于复解析函数的某个结论仅涉及代数运算、函数复合与极限运算(在局部一致收敛意义上), 则该结论自动地适用于这些函数在 A 中的解析扩张. 例如, 若 $f_j(\lambda) \in H(\Omega)$ 满足关系式

$$F(f_1(\lambda), f_2(\lambda), \cdots, f_n(\lambda)) = 0, \quad \lambda \in \Omega \tag{5.2.11}$$

且从 $f_j(\lambda)$ 得出 $F(f_1(\lambda), f_n(\lambda), \cdots, f_n(\lambda))$ 时仅用到代数运算与函数复合, 则有

$$F(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)) = 0, \quad x \in A_\Omega.$$

这样, 从熟知的公式 $\sin^2\lambda + \cos^2\lambda = 1$ 立得 $\sin^2 x + \cos^2 x = e\,(x \in A)$, 完全不必去单独推导这一类的特殊公式. 所有这类已知关系式的推广, 均由定理 5.2.1 统一地完成了. 单就这一点而言, 定理 5.2.1 的价值也足以令人惊叹. 可以说, 定理 5.2.1 以一种最经济的方式在 B 代数中建立了解析函数论.

由以上说明可得出结论: $f(\lambda)$ 的解析扩张 $f(x)$ 在某些方面会很像 $f(\lambda)$, 是否能说 $\sin x$ 就是 A 上的"正弦函数"呢? 从逻辑上说, 这样的问题毫无意义. 当然, 你不妨坚持认为, $f(x)$ 是与 $f(\lambda)$ 截然有别的两个函数, 将前者写作 $f(x)$, 纯粹是符号的借用, 因而对于解析扩张的运用, 不过是一种**符号演算**而已. 这种颇具历史

色彩的称谓,不过表达了人们面对老概念的新扩张时的某种谨慎罢了,没有必要去界定它的实质意义.

下面要特别强调定理 5.2.1 的某些特殊推论. 尽管从逻辑上说它们全被包含在定理 5.2.1 中了,并不具有实质上新的内容,但因其特别常用或者特别说明问题而值得加以强调.

推论 5.2.1 设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是一非空开集,$x \in A_\Omega$,$f(\lambda)$,$g(\lambda) \in H(\Omega)$,则以下结论成立:

(i) $f(x)$ 与 $g(x)$ 恒可交换,特别 x 与 $f(x)$ 恒可交换;

(ii) $f(x)$ 可逆 $\Leftrightarrow f(\lambda)$ 在 $\sigma(x)$ 上无零点 $\Leftrightarrow 0 \notin f(\sigma(x))$. 当 $0 \notin f(\sigma(x))$ 时 $[f(x)]^{-1} = h(x)$,$h(\lambda) = [f(\lambda)]^{-1}$;

(iii) x 可逆 $\Leftrightarrow 0 \notin \sigma(x)$,当 x 可逆时 $\sigma(x^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(x)\}$;

(iv) 若 $f(x) = 0$,则 $\sigma(x) \subset \{\lambda : f(\lambda) = 0\}$. 特别地,若 $x^2 = x$,则 $\sigma(x) \subset \{0,1\}$;

(v) 若 $f(\lambda)$ 是单射,则 $f(x): A_\Omega \to A_{f(\Omega)}$ 是一微分同胚.

大多数结论都是显然的,只解释一下结论(v). 由复分析,$f(\lambda)$ 是单射推出 $f'(\lambda) \neq 0(\forall \lambda \in \Omega)$,因而 $f(\lambda): \Omega \cong f(\Omega)$(同胚),$f(\Omega)$ 是开集,反函数 $g(\tau) \in H(f(\Omega))$. 由 $g(f(\lambda)) = \lambda(\lambda \in \Omega)$ 与 $f(g(\tau)) = \tau(\tau \in f(\Omega))$ 推出 $f(x)(x \in A_\Omega)$ 与 $g(y)(y \in A_{f(\Omega)})$ 互为反函数,因而 $f(x): A_\Omega \to A_{f(\Omega)}$ 是微分同胚.

在实际运用中,定理 5.2.1 的两种典型用法是

(A) 系统地使用已被扩张到 B 代数中的那些标准解析函数,如初等函数、Γ 函数等,这种用法并不需要解释,且似乎意义有限.

(B) 针对问题的需要构成解析函数,然后运用其解析扩张. 因所需解析函数的构成是见机而作的,并无固定规则可循,因而颇具技巧性.

应当说,后一种用法更具潜力,因而更值得重视. 下面是简单的解释性例子.

例 5.2.1 (i) 平方根. 设 $x \in A$,在 $\rho(x)$ 中存在连接点 0 与 ∞ 的光滑曲线 L. 以 Ω 记 L 的补集,则 $\sigma(x) \subset \Omega$. 适当限定辐角的值之后,可以认为 $f(\lambda) = \sqrt{\lambda} \in H(\Omega)$,因而 $y = f(x)$ 有定义. 然后由等式 $f^2(\lambda) = \lambda(\lambda \in \Omega)$ 得出 $y^2 = x$,因而可以认为 y 是 x 的"平方根".

(ii) 对数. 设 x,L 与 Ω 仍如上段,$f(\lambda) = \ln \lambda$,则同样的理由可以认为 $f(\lambda) \in H(\Omega)$,因而 $y = f(x)$ 有定义. 由等式 $\exp f(\lambda) = \lambda$ 得出 $\exp y = x$,因而可以说 y 是 x 的"对数".

(iii) 谱分解. 设 $x \in A$,$\sigma(x) = \bigcup\limits_1^n \sigma_j$,$n \geqslant 2$,$\sigma_j$ 是互不相交的非空闭子集. 取互不相交的开集 Ω_j,使得 $\sigma_j \subset \Omega_j (1 \leqslant j \leqslant n)$,令 $\Omega = \bigcup \Omega_j$. 以 φ_j 记 Ω_j 的特征函数,令 $f_j(\lambda) = \lambda \varphi_j(\lambda)$,则 $f_j(\lambda) \in H(\Omega)(1 \leqslant j \leqslant n)$,$\sum f_j(\lambda) = \lambda(\lambda \in \Omega)$.

因 $\sigma(x) \subset \Omega$,故 $x_j \triangleq f_j(x)(1 \leqslant j \leqslant n)$ 有定义且 $x = \sum x_j$. 由定理5.2.1(iv)有

$$\sigma(x_j) = f_j(\sigma(x)) = \sigma_j \cup \{0\}.$$

如上的分解 $x = \sum x_j$ 称为 x 的谱分解.

若将定理5.2.1用于算子代数 $L(X)$(由例5.1.1(i)),则除了例行的结论之外,还有一些特殊情况值得考虑.

定义5.2.1 设 $T \in L(X)$. 若 $\lambda \in \mathbb{C}, N(\lambda I - T) \neq \{0\}$,则称 λ 为 T 的特征值,称 $N(\lambda I - T)$ 为 T 关于特征值 λ 的特征子空间,其中的非零向量称为 T 关于 λ 的特征向量. 以 $\sigma_p(T)$ 记 T 的特征值之全体,称它为 T 的点谱.

显然 $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$. 容易看出当 $\dim X < \infty$ 时 $\sigma_p(T) = \sigma(T)$.

定理5.2.2 设 $f(\lambda) \in H(\Omega), T \in L(X), \sigma(T) \subset \Omega$.

(i) 若 $\alpha \in \Omega, x \in X, Tx = \alpha x$, 则 $f(T)x = f(\alpha)x$, 因此 $f(\sigma_p(T)) \subset \sigma_p(f(T))$. 当 x 是 T 关于 α 的特征向量时,x 亦是 $f(T)$ 关于 $f(\alpha)$ 的特征向量;

(ii) 若 $f(\lambda)$ 在任何点 $\lambda_0 \in \Omega$ 邻近不为常数,则 $f(\sigma_p(T)) = \sigma_p(f(T))$.

证 (i) 设 $\varphi(\lambda)$ 依式(5.2.10),则

$$[f(T) - f(\alpha)I]x = \varphi(T)(T - \alpha I)x = 0,$$

此即 $f(T)x = f(\alpha)x$.

(ii) 只要证 $\sigma_p(f(T)) \subset f(\sigma_p(T))$. 设 $\alpha \in \sigma_p(f(T))$. 则 $\alpha \in \sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$, $f^{-1}(\alpha) \cap \sigma(T) \neq \varnothing$. $f^{-1}(\alpha) \cap \sigma(T)$ 必为有限集(否则由唯一性定理推出 $f(\lambda)$ 在某点 $\lambda_0 \in \Omega$ 邻近恒等于 α). 设 $f^{-1}(\alpha) \cap \sigma(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$,则

$$f(\lambda) - \alpha = g(\lambda)(\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n),$$

其中,$g(\lambda) \in H(\Omega)$, $0 \notin g(\sigma(T))$,因而 $g(T)$ 可逆. 因

$$f(T) - \alpha I = g(T)(T - \lambda_1 I)\cdots(T - \lambda_n I),$$

$f(T) - \alpha I$ 非单射,故必有某个 $T - \lambda_j I$ 非单射,从而 $\lambda_j \in \sigma_p(T)$, $\alpha = f(\lambda_j) \in f(\sigma_p(T))$,如所要证. □

最后,考虑本节结果对于动力系统问题的一个应用.

例5.2.2 设 $A \in L(X)$,考虑线性微分方程

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \tag{5.2.12}$$

令 $\theta(t,x) = e^{tA}x$,则直接看出 θ 是由方程(5.2.12)生成的流(见定理2.6.3)且 $\theta \in C^\infty(\mathbb{R} \times X, X)$. 今考虑当 $t \to \infty$ 时 $\theta(t,x)$ 的渐近状态.

设 A 没有纯虚数谱值. 令 $T = e^A$,则 $\sigma(T) \cap \mathbb{S}^1 = \varnothing$(由定理5.2.1(iv)),于是 $\sigma(T) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, σ_1 与 σ_2 分别为 $\sigma(T)$ 在 $\mathbb{S}^1$ 的内部与外部的部分,σ_1 与 σ_2 必为互不相交的紧集. 类似于例5.2.1(iii),取互不相交的开集 Ω_1 与 Ω_2,使得 $\sigma_j \subset \Omega_j \subset \mathbb{C}(j = 1,2)$,令 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. 设 $\varphi_j = \xi_{\Omega_j}, f_j(\lambda) = \lambda\varphi_j(\lambda)$,则 $\varphi_j(\lambda)$, $f_j(\lambda) \in H(\Omega)$, $\varphi_j^2(\lambda) = \varphi_j(\lambda)$, $\sum \varphi_j(\lambda) = 1$, $\sum f_j(\lambda) = \lambda (j = 1,2)$. 令 $P_j =$

$\varphi_j(T), T_j = f_j(T)$,则 $P_j^2 = P_j, T_j = TP_j = P_jT(j = 1,2), P_1 + P_2 = I, T_1 + T_2 = T$, P_1 与 P_2 是投影算子. 令 $X_j = R(P_j)$,则 $X = X_1 \oplus X_2$. 因 $\sigma(T_j) = \sigma_j \cup \{0\}$,可说明 $\bar{T}_j \triangleq T_j \mid X_j \in \mathrm{GL}(X_j)$,因此 $\sigma(\bar{T}_j) = \sigma_j(j = 1,2)$,于是 $r_\sigma(\bar{T}_1) \vee r_\sigma(\bar{T}_2^{-1}) < \mathrm{e}^{-\beta}$,$\beta$ 是某个正数. 由谱半径公式,当 n 充分大时 $\|\bar{T}_1^n\| \vee \|\bar{T}_2^{-n}\| < \mathrm{e}^{-\beta n}$.

取定 $x \in X$,令 $x_j = P_jx(j = 1,2)$,则 $\theta(t,x) = \mathrm{e}^{tA}x_1 + \mathrm{e}^{tA}x_2$. 设 $n \leqslant t < n + 1$,令 $m = \sup\limits_{0\leqslant s\leqslant 1} \|\mathrm{e}^{sA}\|$, 则当 n 充分大时有

$$\begin{aligned}\|\mathrm{e}^{tA}x_1\| &= \|\mathrm{e}^{(t-n)A}T^nP_1^nx_1\| \\ &\leqslant m\|\bar{T}_1^n\|\,\|x_1\| \leqslant \mathrm{const}\ \mathrm{e}^{-\beta t},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|x_2\| &= \|T_2^{-n-1}\mathrm{e}^{(n+1-t)A}\mathrm{e}^{tA}x_2\| \leqslant m\|\bar{T}_2^{-n-1}\|\,\|\mathrm{e}^{tA}x_2\| \\ &\leqslant m\mathrm{e}^{-\beta(n+1)}\|\mathrm{e}^{tA}x_2\| \leqslant m\mathrm{e}^{-\beta t}\|\mathrm{e}^{tA}x_2\|,\end{aligned}$$

$$\|\mathrm{e}^{tA}x_2\| \geqslant m^{-1}\|x_2\|\mathrm{e}^{\beta t}.$$

这就得出结论:当 $t \to \infty$ 时, $\|\mathrm{e}^{tA}x_1\|$ 依指数速度趋于零. 若 $x_2 \neq 0$,则 $\|\mathrm{e}^{tA}x_2\|$ 以指数速度增长至无穷.

两种极端情况是:若 $\sigma(A)$ 完全位于左半平面,则 $\sigma_2 = \varnothing, x = x_1$. 于是 $\theta(t,x)$ 的所有轨道均以指数速度收敛于零,$x = 0$ 称为 A 的稳定点. 若 $\sigma(A)$ 完全位于右半平面,则 $\sigma_1 = \varnothing, x = x_2$,当 $x \neq 0$ 时 $\theta(t,x)$ 以指数速度离开零点,$x = 0$ 称为 A 的不稳定点. 若 $\sigma_j \neq \varnothing, x = x_1 + x_2, 0 \neq x_j \in X_j(j = 1,2)$,则当 $t \to \infty$ 时 $\theta(t,x)$ 同时以指数速度远离 $x = 0$ 且趋近于空间 X_2,$x = 0$ 称为 A 的鞍点.

动力系统理论的一个基本结果是:若 $f:\Omega \subset X \to X$ 是一个 C^1 映射,$x_0 \in \Omega$, $f(x_0) = 0$,$f'(x_0)$ 没有纯虚数谱值,则方程

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

在 x_0 邻近具有类似于方程(5.2.12)的轨道结构.

5.3　交换 B 代数

本节中设 A 是给定的交换 B 代数,它有单位元 e 且 $\|e\| = 1$.

连续函数代数 $C(\Omega)$ (见例5.1.1(ii))表现出很特殊的性质. 最令人注意的是其谱性质:任给 $u \in C(\Omega)$,有 $\sigma(u) = u(\Omega), r_\sigma(u) = \|u\|_0$. 当然, 还不能断定这些性质也为一般交换 B 代数 A 所具有. 但对于 A 不能满足于前两节所提供的较一般化的结果,希望获得某些更深入的结论,则是无疑的. A 与一般 B 代数唯一不同之处在于其交换性,而这是一个纯代数性质. 因此,本节的讨论就是从代数概念入手. 中心概念是极大理想与复同态,二者在某种意义上的等价性及与谱的联系,是本节中最为引人的内容,它们引出一系列深刻的结论. 本节的结果主要属于 Gelfand,因而也称为 Gelfand 理论,它以其浓厚的代数色彩而有别于前两节中那些较

具解析特征的内容. 本节的主要概念极大理想与复同态,当然也可用于非交换 B 代数,但得不出太好的结论(非交换 B 代数上可能根本不存在非平凡复同态),因此本节中不作这种一般考虑.

对任给 $U,V\subset A$,约定自然的缩记号

$$UV=\{xy: x\in U, y\in V\}.$$

记号 xV 或 $Vx(x\in A)$ 的意义自明. 注意如下简单事实:若 $e\in U$,则 $V\subset UV$. U 含可逆元 $\Leftrightarrow e\in UA$. 此外,仍用 G 表示 A 中可逆元之全体,注意它是开集.

定义 5.3.1 (i) 若 J 是 A 的一个子空间且 $AJ\subset J$,则称 J 为 A 中的一个理想. 若 m 是 A 的一个真理想(即 m 为理想且 $m\neq A$)且除 m 与 A 之外,m 不含于 A 中其他理想,则称 m 为 A 的**极大理想**. 以 M 记 A 中极大理想之全体.

(ii) 任何代数同态 $\varphi: A\to\mathbb{C}$ 称为 A 上的**复同态**. 以 Δ 或 $\Delta(A)$ 记 A 上的非零(即不恒为零)的复同态之全体[①].

立即就用连续函数代数 $C(\Omega)$ 来解释一下定义 5.3.1 所给出的概念.

例 5.3.1 设 $A=C(\Omega)$ 依例 5.1.1(ii).

(i) 取定 $x_0\in\Omega$,令 $m=\{u\in A: u(x_0)=0\}$. 直接看出 m 是 A 中的一个理想. 设 $J\subset A$ 是一个理想且 $m\subset J\neq m$,则存在 $v\in J, v(x_0)\neq 0$. 任给 $u\in A$,有

$$v(x_0)u=uv+u[v(x_0)-v]\in uJ+um\subset J+J\subset J,$$

这推出 $J=A$. 可见 m 是 A 中的极大理想.

(ii) 取定 $x_0\in\Omega$,令 $\varphi(u)=u(x_0)$,则显然 $\varphi\in\Delta$ 且 $m=\varphi^{-1}(0)$ 正是(i)中所界定的极大理想.

例 5.3.1 表明,极大理想与非零复同态之间似乎有某种联系. 如果将极大理想与复同态分别类比于向量空间中的极大子空间与线性泛函(见定义 1.4.3),自然会指望某种类似于定理 1.4.4 的结果,这就是如下的:

定理 5.3.1 对于 $m\subset A$, 以下条件互相等价:

(i) $m\in M$;

(ii) $A/m\cong\mathbb{C}$ (等距代数同构);

(iii) 存在 $\varphi\in\Delta$,使得 $m=\operatorname{Ker}\varphi$($\varphi$ 的同态核).

注意,与定理 1.4.4 不同,此处既未设 m 是闭的,也未提到 φ 的连续性,这些都将是推出的结论.

证 (i)$\Rightarrow$(ii) 这是证明的主要部分. 设 $m\in M$. 必定 $e\notin m$,否则 $A=Ae\subset m$! 因此 m 也不能含任何可逆元,于是 $m\subset A\backslash G$,这就推出 $\bar{m}\subset A\backslash G$. 而 $\bar{m}$ 也是理想,故必 $m=\bar{m}$,即 m 是闭理想,当然也是 A 的闭子空间. 于是 A/m 是一 Banach 空间(由定理 1.4.4),其中, 元 $\tilde{x}$ 可写成 $\tilde{x}=x+m$, 而由式(1.4.10)有

① 有些著作(如(Pederson, 1989))记 Δ 为 $\hat{A}$,并称 $\varphi\in\Delta$ 为特征,这就突出了与 6.6 节中 $\hat{G}$ 的类比.

$$\| \tilde{x} \| = \inf\{ \| x \| : x \in \tilde{x} \}. \tag{5.3.1}$$

容易验证，A/m 依乘法 $\tilde{x}\tilde{y} = \widetilde{xy}$ 是一交换 B 代数，其单位元就是 $\tilde{e}$. 由式(5.3.1)有 $\| \tilde{e} \| \leqslant \| e \| = 1$；另一方面有 $\| \tilde{e} \| \geqslant 1$，故 $\| \tilde{e} \| = 1$. 今用推论 5.1.1 证 $A/m \cong \mathbb{C}$. 为此只要说明：任给 $x \in A \backslash m$，$\tilde{x}$ 必可逆. 令 $J = m + xA$，则易验证 J 是一个理想，$m \subset J$，$m \neq J$（显然 $x \in J \backslash m$）. 由 m 的极大性推出 $J = A$，因此 $e \in m + xA$. 取 $y \in A$，使 $e - xy \in m$，则必 $\tilde{e} = \tilde{x}\tilde{y}$，这说明 $\tilde{x}$ 可逆，如所要证.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)　设 $h: A/m \cong \mathbb{C}$，$P: A \to A/m$ 是投影，令 $\varphi = h \circ P$. 则 $\varphi \in \Delta$，$\mathrm{Ker}\ \varphi = m$.

(iii) $\Rightarrow$ (i)　设 $\varphi \in \Delta$，$m = \mathrm{Ker}\ \varphi$，则 m 显然是 A 中的理想. 由定理 1.4.4 的证明看出 $A = m \oplus \mathbb{C}x_0$，$x_0 \in A$，$\varphi(x_0) \neq 0$. 由此看出 m 必为极大理想.　□

由定理的证明看出，$m \in M$ 必是闭的，$\varphi \in \Delta$ 必是连续的，因而 $\Delta \subset A^*$. 考虑到极大理想与复同态的定义都是纯代数的，这些结论很不寻常，它反映了 B 代数中的代数结构与拓扑结构之间不可分割的联系.

对于 Banach 空间 X，若 $0 \neq f \in X^*$，则除常数因子的差别外，f 由 $N(f)$ 唯一决定. 对于 $\varphi \in \Delta$ 有比这更好的结果.

推论 5.3.1　$\Delta \to M$，$\varphi \to \mathrm{Ker}\ \varphi$ 是一双射.

证　定理 5.3.1 已说明 $\Delta \to M$，$\varphi \to \mathrm{Ker}\ \varphi$ 是一满射，下面说明它也是单射. 设 $\varphi \in \Delta$，$m = \mathrm{Ker}\ \varphi$，则如已提到的，有 $A = m \oplus \mathbb{C}\, x_0$，$\varphi(x_0) \neq 0$，不妨设 $x_0 = e$，于是 $\varphi(x + \lambda e) = \lambda (x \in m, \lambda \in \mathbb{C})$，这正表明 φ 由 m 唯一决定.　□

鉴于以上结果，不妨等同 Δ 与 M，二者都称为 A 的**结构空间**. Δ 也可看成 A 的某种对偶，其作用相当于 Banach 空间理论中的对偶空间. 抽象空间理论的一般经验是，对偶总可用来阐明空间本身的结构，基本方法就是利用对偶定义出某种表示. 对于赋范空间 X 而言，用 X^* 定义的表示就是正则嵌入（见式(1.6.8)）

$$X \to X^{**}, \quad x \to \hat{x}. \tag{5.3.2}$$

对于 B 代数 A，与式(5.3.2)相当的是所谓 Gelfand 表示.

定义 5.3.2　任给 $x \in A$，令

$$\hat{x}: \Delta \to \mathbb{C}, \quad \varphi \to \varphi(x). \tag{5.3.3}$$

记 $\hat{A} = \{\hat{x} : x \in A\}$，$\hat{A}$ 依自然的运算成为一个交换代数，使映射

$$\Gamma: A \to \hat{A}, \quad x \to \hat{x} \tag{5.3.4}$$

为代数同态，称 Γ 为 A 的 **Gelfand 表示**. 以 $\mathrm{rad}\,(A)$ 记 Γ 的同态核，即

$$\mathrm{rad}\,(A) = \{x \in A : \hat{x} = 0\}, \tag{5.3.5}$$

称它为 A 的根. 若 $\mathrm{rad}(A) = \{0\}$（$\Leftrightarrow \Gamma$ 为代数同构），则称 A 为半单代数.

结合式(5.3.5)与推论 5.3.1 得出

$$\mathrm{rad}\,(A) = \cap \{m : m \in M\}. \tag{5.3.6}$$

Gelfand 表示(5.3.4)与正则嵌入(5.3.2)的类似是明显的. 如同正则嵌入使

向量 $x \in X$ 获得双重身份一样，Gelfand 表示也使 $x \in A$ 获得双重意义：一方面是作为 A 中的元，另一方面是作为 Δ 上的函数 $\hat{x}$. 然而，与正则嵌入比较，Gelfand 表示有一些明显的不足. 首先，Γ 并非同构，除非 A 是半单代数. 这意味着，即使 $x \neq 0$，亦可能 $\varphi(x) = 0(\forall \varphi \in \Delta)$，这是因为，对于 A 缺少一个与 Hahn-Banach 定理相当的结果，用以保证 Δ 中的元素足够多，以使它能分离 A 中的点（即当 $x \neq y$ 时，必有 $\varphi \in \Delta$ 使 $\varphi(x) \neq \varphi(y)$）. 这一缺陷仅对半单代数才得以消除. 另一缺陷是，与 X^* 不同，在 Δ 与 $\hat{A}$ 中尚未引进任何拓扑，因而谈不上 $\hat{x}$ 与 Γ 的连续性. 后一缺陷倒不是 A 本身所有的，可通过采取适当措施来消除. 下面就来做这件事. 有趣的是，在这件事上起关键作用的是谱概念. 你必定注意到，本节至此为止尚未提到谱，就好像现在所关注的复同态与谱毫不相干似的. 而前两节的经验则恰恰表明，谱的介入往往导致深刻的结论，对于 Gelfand 表示也不例外. 下面就是一个关键结果，它就是属于 Gelfand 的.

定理 5.3.2 任给 $x \in A$，设 $\hat{x}$ 依式(5.3.3)，则 $\hat{x}(\Delta) = \sigma(x)$. 因此 $\|\hat{x}\|_0 = r_\sigma(x) \leq \|x\|$，$x$ 可逆 $\Leftrightarrow \forall \varphi \in \Delta, \varphi(x) \neq 0$.

证 取定 $x \in A$. $\forall \varphi \in \Delta$，由 $\varphi(\varphi(x)e - x) = 0$ 得 $\varphi(x)e - x \in \operatorname{Ker} \varphi \subset A \backslash G$（见定理5.3.1之证），这得出 $\varphi(x) \in \sigma(x)$，因而，$\hat{x}(\Delta) \subset \sigma(x)$. 反之，若 $\lambda \in \sigma(x)$，则 $(\lambda e - x)A$ 是 A 中的真理想（注意 $e \notin (\lambda e - x)A$!）. 由极大原理，存在 $m \in \mathcal{M}$ 使 $(\lambda e - x)A \subset m$. 设 $m = \operatorname{Ker} \varphi, \varphi \in \Delta$，则 $\varphi(\lambda e - x) = 0$，从而 $\lambda = \varphi(x) \in \hat{x}(\Delta)$. 因此有 $\hat{x}(\Delta) = \sigma(x)$. □

结合等式 $\|\hat{x}\|_0 = r_\sigma(x)$ 与式(5.3.5)得出：$\operatorname{rad}(A)$ 即为 A 中广义幂零元的全体. Gelfand 表示为同构 $\Leftrightarrow$ A 中没有非平凡的广义幂零元. 等式 $\|\hat{x}\|_0 = r_\sigma(x)$ 也表明 $r_\sigma(x)$ 是 A 中的一个半范.

推论 5.3.2 Δ 含于 A^* 中的单位球面.

证 任给 $\varphi \in \Delta, x \in A$，由定理 5.3.2 有

$$|\varphi(x)| = |\hat{x}(\varphi)| \leq \|\hat{x}\|_0 \leq \|x\|,$$

这推出 $\|\varphi\| \leq 1$. 另一方面有 $1 = \varphi(e) \leq \|\varphi\|$，故得 $\|\varphi\| = 1$. □

以上简单结论恰是为达到预定目标所需要的. 以 B^* 记 A^* 的闭单位球，则易直接验证 Δ 在 B^* 中是弱* 闭的，因而 Δ 依 A^* 中的弱* 拓扑是一个紧 Hausdorff 空间（由定理 1.6.7）. 今后在 Δ 上总使用弱* 拓扑，并称其为 **Gelfand 拓扑**. 设 $x \in A$. 任给 Δ 中的网 $\{\varphi_t\}$ 与 $\varphi \in \Delta$，若 $\varphi_t \xrightarrow{*} \varphi$，则 $\varphi_t(x) \to \varphi(x)$，从而 $\hat{x}(\varphi_t) \to \hat{x}(\varphi)$. 这表明 $\hat{x} \in C(\Delta)$. 依例 5.1.1(ii)，$C(\Delta)$ 是一个交换 B 代数；而定理 5.3.2 所得的不等式 $\|\hat{x}\|_0 \leq \|x\|$ $(x \in A)$ 则得出映射 $x \to \hat{x}$ 的连续性，这就得到

定理 5.3.3 Δ 依 Gelfand 拓扑是一个紧 Hausdorff 空间，Gelfand 表示

$$\Gamma: A \to C(\Delta), \quad x \to \hat{x} \tag{5.3.7}$$

是一个连续的代数同态，它满足 $\|\hat{x}\|_0 \leq \|x\|$ $(x \in A)$.

这就显著拉近了 Gelfand 表示与正则嵌入(5.3.2)之间的距离，式(5.3.7)中的 $C(\Delta)$ 可类比于式(5.3.2) 中的 X^{**}. 虽然未必有 $\|\hat{x}\|_0 = \|x\|$，仍可将式(5.3.7)看成某种嵌入,因而在一定程度上可将交换 B 代数 A 的研究转化为对连续函数代数 $C(\Delta)$ 的研究,后者作为一种标准的交换 B 代数更便于处理,而且在直观上也更易被接受. 从根本上说,Gelfand 表示的意义就在于将一抽象的 B 代数 A "表示"为标准的 B 代数 $C(\Delta)$. 当然,更希望有 $\|\hat{x}\|_0 = \|x\|$ (甚至$\hat{A} = C(\Delta)$)，但这就需要一定附加条件,在下节中就将遇到这种理想的情况.

顺便指出,对于赋范空间 X 可考虑一个与 Gelfand 表示更贴近的类比

$$X \to C(B^*), \quad x \to \hat{x}, \tag{5.3.8}$$

此处 B^* 记 X^* 中的闭单位球,其中采用弱* 拓扑,$C(B^*)$ 作为一个 Banach 空间依例 1.2.1(ii)，$\hat{x}$ 依式(1.6.7). 由式(1.6.9)知式(5.3.8)是一个等距嵌入,因而不妨认为 X 是 $C(B^*)$ 的子空间. 这就得出结论：紧 Hausdorff 空间上的连续函数空间及其子空间,已穷尽了所有赋范空间!

下面通过一些具体例子来解释结构空间与 Gelfand 表示. 我们将发现,对于一些常见的交换 B 代数,Gelfand 表示具有很自然的形式,有些甚至是具有重要价值的分析运算. 这些事实都有利于肯定 Gelfand 表示的坚实背景与应用价值. 不过,本节考虑的例子是初步的、简单的,一些更有价值的例子将在下章中出现.

例5.3.2　(i) 设 $A = C(\Omega)$,$C(\Omega)$ 依例 5.1.1(ii). 任给 $x \in \Omega$,定义 $\tilde{x}(u) = u(x)(u \in A)$. 在例5.3.1(ii)中已说明了 $\tilde{x} \in \Delta = \Delta(A)$. 若 $x,y \in \Omega,x \neq y$,则由 Ω 的正规性(由定理1.3.5),必存在 $u \in A$ 分离 x 与 y(由定理1.3.1),因而 $\tilde{x}(u) \neq \tilde{x}(u)$. 这表明

$$h: \Omega \to \Delta, \quad x \to \tilde{x} \tag{5.3.9}$$

是一单射. 若 h 非满射,则有 $\varphi \in \Delta$, $\forall x \in \Omega$, $\exists u_x \in A$,使 $u_x(x) \neq \varphi(u_x)$. 不妨设 $\varphi(u_x) = 0$(否则以 $u_x - \varphi(u_x)$ 取代 u_x). 由连续性,有 x 的邻域 V_x,使得 $u_x(y) \neq 0$($\forall y \in V_x$). 取 Ω 的有限覆盖$\{V_{x_i}\}$,令 $u = \sum |u_{x_i}|^2$,则 $u \in A$,$u > 0$. 另一方面,

$$\varphi(u) = \sum_i \varphi(u_{x_i})\varphi(\bar{u}_{x_i}) = 0,$$

这与 $1 = \varphi(1) = \varphi(u)\varphi(u^{-1})$ 相矛盾. 因此,h 是一双射. 因 h 显然是连续的,故由命题 1.4.4 知 h 是一同胚. h 又诱导出一个双射

$$\tilde{h}: C(\Delta) \to A, \quad v \to v \circ h.$$

设 $\Gamma: A \to C(\Delta)$ 是 Gelfand 表示,记

$$\tilde{\Gamma} \triangleq \tilde{h} \circ \Gamma: A \to A, \quad u \to \hat{u} \circ h.$$

$\forall x \in \Omega$,易验证$(\hat{u} \circ h)(x) = u(x)$，即 $\hat{u} \circ h = u$,这表明$\tilde{\Gamma}$竟然是恒等映射!这就得出结论:若等同 x 与 $\tilde{x}$,则连续函数代数 $C(\Omega)$ 以 Ω 为其结构空间,Ω 上的拓扑即为 Gelfand 拓扑, Gelfand 表示就是 $C(\Omega)$ 上的恒等映射. 对于已经是标准的代数

$C(\Omega)$，Gelfand 表示无所为用，乃是理所当然的.

(ii) 设 $A = A(D)$ 依例 5.1.1(iii). 类似于上段中的作法，定义 $\tilde{z}(f) = f(z)(z \in \overline{D}, f \in A)$，令 $\Delta = \Delta(A)$，今证明

$$h: \overline{D} \to \Delta, \quad z \to \tilde{z} \tag{5.3.10}$$

是一同胚. 关键是说明 h 为满射. 取定 $\varphi \in \Delta$，记 $\varepsilon(z) \equiv z, \varphi(\varepsilon) = z_0$，则 $|z_0| \leqslant \|\varepsilon\|_0 = 1$. 可见 $z_0 \in \overline{D}$. $\forall f \in A$，设 $f(z) = \sum c_n z^n (z \in D)$. 令 $f_r(z) = f(rz) = \sum c_n r^n z^n, 0 < r < 1$，则 $\sum c_n r^n z^n$ 在 $|z| \leqslant 1$ 上一致收敛，因此

$$\varphi(f_r) = \varphi\left(\sum_n c_n r^n \varepsilon^n\right) = \sum_n c_n r^n z_0^n = f(rz_0).$$

令 $r \to 1$ 得 $\varphi(f) = f(z_0)$，因此 $\varphi = \tilde{z}_0$，h 为满射得证. 这就可如对代数 $C(\Omega)$ 一样作出如下结论：若等同 z 与 $\tilde{z}(z \in \overline{D})$，则圆代数 $A(D)$ 以 $\overline{D}$ 为其结构空间，$\overline{D}$ 上的通常拓扑即为其 Gelfand 拓扑，Gelfand 表示就是 $A(D)$ 上的恒等映射.

以上结论有出人意料的应用. 设 $f_j \in A(D)(1 \leqslant j \leqslant n)$ 在 $\overline{D}$ 上无公共零点，则必有 $\{g_j\} \subset A(D)$，使得 $\sum f_j g_j = 1$. 否则，$\{f_j\}$ 生成 $A(D)$ 的一个真理想 J，因而必有 $z_0 \in \overline{D}$，使得 $J \subset \operatorname{Ker} \tilde{z}_0$，而这推出 z_0 是 $f_j(1 \leqslant j \leqslant n)$ 的公共零点！

(iii) 设 $A = l^1(\mathbb{Z}^n)$ 依例 5.1.1(iv)，令 $\Delta = \Delta(A)$. 任给 $x \in \mathbb{T}^n$，令 $\tilde{x}(u) = \hat{u}(x)(u \in A)$，$\hat{u}$ 依映射(5.1.3). 今指明

$$h: \mathbb{T}^n \to \Delta, \quad x \to \tilde{x} \tag{5.3.11}$$

是一同胚. 只需证 h 是满射. 令 $\eta_k(l) = \delta_{kl}(k, l \in \mathbb{Z}^n)$，则 $\{\eta_k : k \in \mathbb{Z}^n\} \subset A$，$\|\eta_k\| = 1, \eta_k * \eta_l = \eta_{k+l}, \delta = \eta_0$ 是 A 的单位元. 取定 $\varphi \in \Delta$，则显然 $|\varphi(\eta_k)| \leqslant 1$. 其次由

$$1 = \varphi(\delta) = \varphi(\eta_k * \eta_{-k}) = \varphi(\eta_k)\varphi(\eta_{-k})$$

得 $|\varphi(\eta_k)| = 1$. 以 $\{\varepsilon_j\}$ 记 $\mathbb{R}^n$ 的标准基，令 $\varphi(\eta_{\varepsilon_j}) = e^{ix_j}, x = (x_j)$. 当 $k \in \mathbb{Z}_+^n$ 时，由

$$\eta_k = \overbrace{\eta_{\varepsilon_1} * \cdots * \eta_{\varepsilon_1}}^{k_1 \text{个}} * \cdots * \overbrace{\eta_{\varepsilon_n} * \cdots * \eta_{\varepsilon_n}}^{k_n \text{个}}$$

得出 $\varphi(\eta_k) = e^{ik \cdot x} = e_k(x)$. 对 $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{Z}_+^n$ 类似地可得同样结论. 于是对任给 $u \in A$ 有

$$\varphi(u) = \varphi\left(\sum_k u(k)\eta_k\right) = \sum_k u(k)e_k(x) = \hat{u}(x) = \tilde{x}(u),$$

故得 $\varphi = \tilde{x}$，h 是满射得证. 因此，若等同 x 与 $\tilde{x}$，则 $l^1(\mathbb{Z}^n)$ 以 $\mathbb{T}^n$ 为其结构空间，$\mathbb{T}^n$ 中的通常拓扑即为其 Gelfand 拓扑，Gelfand 表示重合于代数同构(5.1.3).

若 $u \in l^1(\mathbb{Z}^n)$，$\hat{u}(x) \neq 0(\forall x \in \mathbb{T}^n)$，则 $\forall \tilde{x} \in \Delta$，$\tilde{x}(u) \neq 0$. 这就推出 u 可逆(由定理 5.3.2)，从而必有 $v \in l^1(\mathbb{Z}^n)$ 使得 $\hat{v} = 1/\hat{u}$. 这就得到如下的 **Wiener 定理**：

定理 5.3.4 设 $f = \sum a_k e_k$，$\sum |a_k| < \infty$，$f(x) \neq 0(\forall x \in \mathbb{T}^n)$，则必存

在 $\{b_k : k \in \mathbb{Z}^n\}$，使得 $\sum |b_k| < \infty$ 且 $\sum b_k e_k = 1/f$ ①.

Gelfand 理论的以上应用的特别有趣之处在于，Wiener 定理的表述完全不涉及 Banach 代数概念. 事实上，Wiener 当初是从完全不同的途径得到上述结果的.

在 5.1 节中曾指出，不失一般性，总可设所考虑的 B 代数具有单位元 e 且 $\|e\| = 1$. 不过，实际问题中出现的 B 代数未必自然地带有单位元. 例如，$C_0(\mathbb{R})$ 就是如此，下章中考虑的卷积代数 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 也是这样. 当然，这些 B 代数都可在补入单位元后再考虑其 Gelfand 表示. 设 A 是无单位元的交换 B 代数，$\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}e$ 是补入单位元 e 的扩张. 我们关心的是：$\tilde{A}$ 上的 Gelfand 表示限制在 A 上时具何种形式？分别以 Δ 与 $\tilde{\Delta}$ 记 A 与 $\tilde{A}$ 的结构空间. $\forall \varphi \in \Delta$，令

$$\tilde{\varphi}(x + \lambda e) = \varphi(x) + \lambda, \quad x \in A, \lambda \in \mathbb{C},$$

则 $\tilde{\varphi} \in \tilde{\Delta}$ 且 $\tilde{\varphi}$ 由 φ 唯一决定. 反之，任给 $\tilde{\varphi} \in \tilde{\Delta}$，令 $\varphi = \tilde{\varphi} | A$，则当 $\varphi \neq 0$ 时 $\varphi \in \Delta$. 若 $\varphi \equiv 0$，则这样的 $\tilde{\varphi}$ 仅有一个，将其记作 ∞，而将其余的 $\tilde{\varphi}$ 等同于 φ，则不妨认为 $\tilde{\Delta} = \Delta \cup \{\infty\}$. $\tilde{\Delta}$ 依其 Gelfand 拓扑是一个紧 Hausdorff 空间，它可看成 Δ 的一点紧化（由定理 1.3.8），而 Δ 作为 $\tilde{\Delta}$ 的开子空间是一个 LCH. 若将 $\tilde{A}$ 的 Gelfand 表示

$$\tilde{A} \to C(\tilde{\Delta}), \quad x \to \hat{x}$$

限制到 A 上，则对每个 $x \in A$，有 $\hat{x}(\infty) = \infty(x) = 0$，因而 $\hat{x} \in C_0(\Delta)$. 这就得到

定理 5.3.5 设 A 是一个无单位元的交换 B 代数，Δ 是 A 上的非零复同态之全体，$\hat{x}(\varphi) = \varphi(x)\ (x \in A, \varphi \in \Delta)$，则 Δ 含于 A^* 的单位球面，Δ 依 A^* 中的弱*拓扑是一个 LCH，Gelfand 表示

$$A \to C_0(\Delta), \quad x \to \hat{x} \tag{5.3.12}$$

是一个连续的代数同态，它满足 $\|\hat{x}\|_0 \leq \|x\|\ (x \in A)$.

本节至此为止的内容主要是带代数色彩的. 最后看一个涉及解析理论的结果，在这方面，交换 B 代数亦有明显特色.

定理 5.3.6 设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是一非空开集，$f(\lambda) \in H(\Omega)$，$x \in A_\Omega$，$\tilde{f}^{(n)}(x)$ 记 $f^{(n)}(\lambda)$ 的解析扩张（由定理 5.2.1）. 则当 $\|h\|$ 适当小时，成立

$$f(x + h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tilde{f}^{(n)}(x) h^n. \tag{5.3.13}$$

证 取 Ω 中的围道 L，使之环绕 $\sigma(x)$ 与 $\sigma(x + h)$（见定理 5.2.1 之证），则

$$f(x + h) = \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\lambda) R(\lambda, x + h) \mathrm{d}\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} R^{n+1}(\lambda, x) h^n \mathrm{d}\lambda$$

---

① 利用 6.4 节中的术语可将 Wiener 定理表述为：若 $f \in C(\mathbb{T}^n)$ 有绝对收敛的 Fourier 级数，$0 \notin f(\mathbb{T}^n)$，则 $1/f$ 亦有绝对收敛 Fourier 级数. 这一结论能从 Gelfand 理论推出，乃是表明 Gelfand 理论有效性的重要例证.

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L R^{n+1}(\lambda,x)\mathrm{d}\lambda\right]h^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L f^{(n)}(\lambda)R(\lambda,x)\mathrm{d}\lambda\right]h^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\tilde{f}^{(n)}(x)h^n,$$

其中用了式(5.2.6)，式(5.2.7)与等式

$$n!\int_L f(\lambda)R^{n+1}(\lambda,x)\mathrm{d}\lambda = \int_L f^{(n)}(\lambda)R(\lambda,x)\mathrm{d}\lambda,$$

后者可由分部积分得出. □

注意与式(4.3.7)不同,式(5.3.13)右端是一个真正的幂级数. 而且,$\tilde{f}^{(n)}(x)$ 并不是$f^{(n)}(x)$,需知$\tilde{f}^{(n)}(x) \in A$,而$f^{(n)}(x)$ 是一个算子!

在4.1节的结尾处曾指出,复分析中的以下事实不能推广到向量值解析函数：若$f(\lambda) \in H(\Omega)$,$\lambda_0 \in \Omega$,$f'(\lambda_0) \neq 0$,则$f(\lambda)$ 在 λ_0 邻近是局部同胚. 利用定理5.3.6,却可建立以下结果.

推论5.3.3 设$f(\lambda) \in H(\Omega)$,$x_0 \in A_\Omega$,$f'(\lambda)$ 在 $\sigma(x_0)$ 上无零点,$f(x)$ 是 $f(\lambda)$ 的解析扩张. 则$f(x)$ 将 x_0 的某个开邻域 U 同胚地映为 A 的某个开子集.

证 由推论5.2.1(ii),$\tilde{f}(x_0)$ 可逆(由定理5.3.6的记号). 由式(5.3.13)有 $f'(x_0)h = \tilde{f}'(x_0)h$,因而$f'(x_0) \in \mathrm{GL}(A)$. 于是可用反函数定理2.3.2得出所要结论. □

5.4 (*)代数

在5.3节中我们看到,"交换性"这一附加条件的加入,使Banach代数理论获得了如此强劲的推动,涌现出许多新结果. 现在,一次新的推动又出现在眼前,它来自一个似乎不起眼的新运算,即所谓*运算. 这种运算的最简单的原型就是复共轭. 细心的观察者绝不会忽略共轭运算在复数理论中的作用.

以下仍设A是给定的有单位元e的B代数且 $\|e\| = 1$,但不假定A是交换的.

定义5.4.1 若在B代数A上定义了一个运算$x \to x^*$,使得以下条件满足：

(S_1) 共轭线性性：$(\alpha x + y\beta)^* = \bar{\alpha}x^* + \bar{\beta}y^*$;

(S_2) $(xy)^* = y^*x^*$;

(S_3) 对合性：$x^{**} = x$,

其中,$x,y \in A$,$\alpha,\beta \in \mathbb{C}$,则称$x \to x^*$ 为一个 * 运算或对合运算,称A为一个(*)代数,称x^* 为x的**相伴元**. 若进而设以下条件满足：

(S_4) $\|x\|^2 = \|xx^*\|$ $(x \in A)$,

则称 A 为一个 **B^* 代数**①. 当(*)代数 A 中的元 x 依次满足以下条件：

$$xx^* = x^*x,\quad x = x^*,\quad x^* = x^{-1}$$

时,分别称 x 为**正规元、自伴元与 U 元**.

从一般 B 代数过渡到(*)代数之后,关于 B 代数的概念自然地经历某种"(*)化". 例如,若(*)代数 A 的子代数 S 对于 * 运算封闭,则称 S 为 A 的(*)子代数;若 A 与 B 均为(*)代数,一个代数同态(或代数同构)$T: A \to B$ 满足条件

$$Tx^* = (Tx)^*,\quad x \in A,$$

则称 T 为(*)代数同态(或(*)代数同构).

一些常见的 B 代数可以定义成为(*)代数,下面几个例子是典型的.

例 5.4.1　(i) 算子代数 $L(H)$. 设 H 是一个复 Hilbert 空间,则 $L(H)$ 是一个 B 代数(见例 5.1.1(i)). 任给 $T \in L(H)$,设 T^* 是 T 的相伴算子(见式(1.7.16)),则由命题 1.7.1 知条件$(\mathrm{S}_1) \sim (\mathrm{S}_4)$(由定义 5.4.1,下同)满足,因而 $L(H)$ 是一个 B^* 代数. $L(H)$ 中的正规元、自伴元与 U 元,就是依定义 1.7.3 的正规算子、自伴算子与 U 算子. 如同 $L(X)$ 是典型的 B 代数一样, $L(H)$ 是典型的 B^* 代数②. $L(H)$ 的有限维特例 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 是线性代数的对象,但它对于展开(*)代数理论亦有某种参照作用. $\mathbb{C}$ 作为 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 的特例当然也是 B^* 代数,其中,相伴元 λ^* 就是共轭数 $\bar{\lambda}$③. $\mathbb{C}$ 中的自伴元就是实数, U 元就是"幺模"复数. 这些平凡事实初看起来似乎不足挂齿,但对于展开一般的 B^* 代数理论仍有启示意义,值得随时联想到.

(ii) 连续函数代数 $C(\Omega)$. 设 $C(\Omega)$ 依例 5.1.1(ii),任给 $u \in C(\Omega)$,定义 $u^* = \bar{u}$,则直接看出条件$(\mathrm{S}_1) \sim (\mathrm{S}_4)$满足,因而 $C(\Omega)$ 是一个交换 B^* 代数. 今后当将 $C(\Omega)$ 看作 B^* 代数时,其中, * 运算总理解为取共轭. $C(\Omega)$ 中的自伴元与 U 元分别为实连续函数与幺模复连续函数,正规元概念失去意义. 鉴于 $C(\Omega)$ 中涉及 * 运算的概念具有很直观的意义,因而被看成是一种标准的交换 B^* 代数. B^* 代数理论的一个基本目标就是,将一般交换 B^* 代数**表示**为某个连续函数代数.

(iii) 圆代数 $A(D)$. 设 $A(D)$ 依例 5.1.1(iii),定义 $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$ ($f \in A(D)$, $z \in \bar{D}$),则显然条件$(\mathrm{S}_1) \sim (\mathrm{S}_3)$满足,因而 $A(D)$ 成为一个(*)代数,但它不是 $C(\bar{D})$ 的(*)子代数. $f \in A(D)$ 是自伴元 $\Leftrightarrow$ f 有在 $z = 0$ 展开的实系数 Taylor 级数.

(iv) Wiener 代数 $l^1(\mathbb{Z}^n)$. 设 $l^1 = l^1(\mathbb{Z}^n)$ 依例 5.1.1(iv),任给 $u \in l^1$,定义 $u^*(k) = \overline{u(-k)}$,则可验证条件$(\mathrm{S}_1) \sim (\mathrm{S}_3)$满足. 例如,对任给 $u, v \in l^1$, $k \in \mathbb{Z}^n$ 有

---

① 有些著作称为 C^* 代数.

② Gelfand 与 Naimark 于 1943 年证明了以下结果:每个 B^* 代数等距(*)代数同构于某个 $L(H)$ 的闭(*)子代数,见文献(刘登胜等, 1992).

③ 有文献(如(Beals, 1973))用 λ^* 表示 $\bar{\lambda}$.

$$(u*v)^*(k)=\overline{(u*v)(-k)}=\sum_l \overline{u(-k-l)}\,\overline{v(l)}$$

$$=\sum_l u^*(k-l)v^*(l)=(u^* * v^*)(k).$$

因此,l^1 是一个(*)代数. 设 $u\in l^1$,$\hat{u}$ 依式(5.1.3),则

$$\widehat{u^*}=\sum_k \overline{u(-k)}e_k=\overline{\sum_k u(k)e_k}=\bar{\hat{u}}.$$

可见同态(5.1.3)是一个(*)代数同态.

再回到一般的 B^* 代数 A,仍以 G 记 A 中可逆元之全体. 首先,以一个命题汇集那些直接由定义 5.4.1 推出的简单结论.

命题 5.4.1 对于 B^* 代数 A,$x\in A$,以下结论成立:

(i) 若 $x\in G$,则 $x^*\in G$ 且 $(x^*)^{-1}=(x^{-1})^*$;

(ii) $\sigma(x^*)=\overline{\sigma(x)}\triangleq\{\bar{\lambda}:\lambda\in\sigma(x)\}$, $r_\sigma(x)=r_\sigma(x^*)$;

(iii) $\|x^*\|=\|x\|$,因此 $x_n\to x\Leftrightarrow x_n^*\to x^*$;

(iv) $0,e$ 是自伴元. A 中自伴元之全体构成 A 的一个实子空间(或一个实子代数,若 A 是交换的). 每个 $x\in A$ 有唯一分解

$$x=a+\mathrm{i}b,\quad a=\frac{x+x^*}{2},\quad b=\frac{x-x^*}{2\mathrm{i}},\tag{5.4.1}$$

其中,a,b 是自伴元; xx^* 与 x^*x 必为自伴元;

(v) e 是 U 元,A 中 U 元之全体构成 G 的一个子群且对 * 运算封闭;

(vi) 自伴元与 U 元均为正规元.

正规元、自伴元与 U 元是本节的主要考虑对象,它们的谱有一些很特殊的性质,下面是一组初步结果.

定理 5.4.1 设 A 为 B^* 代数,$x\in A$.

(i) 若 x 是正规元,则 $r_\sigma(x)=\|x\|$. 特别地,交换 B^* 代数中每个元均如此;

(ii) 若 x 是 U 元,则 $\sigma(x)\subset\mathbb{S}^1\triangleq\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|=1\}$;

(iii) 若 x 是自伴元,则 $\sigma(x)\subset\mathbb{R}$.

证 (i) 由条件(S_4)与 $xx^*=x^*x$ 推出

$$\|x\|^4=\|xx^*\|^2=\|x^2(x^2)^*\|=\|x^2\|^2,$$

即 $\|x\|^2=\|x^2\|$. 进而归纳地有 $\|x\|^{2^n}=\|x^{2^n}\|\,(n\geqslant 1)$. 于是由谱半径公式(5.1.9)得出

$$r_\sigma(x)=\lim_n\|x^{2^n}\|^{1/2^n}=\|x\|.$$

(ii) 由 $\|x\|^2=\|xx^*\|=\|e\|=1$ 得 $\|x\|=1$,因而由已证的(i)有 $r_\sigma(x)=1$. 任给 $\lambda\in\sigma(x)$,有 $|\lambda|\leqslant r_\sigma(x)=1$. 另一方面,由 $\lambda^{-1}\in\sigma(x^{-1})=\sigma(x^*)$ 有 $|\lambda|^{-1}\leqslant r_\sigma(x^*)\leqslant\|x^*\|=1$,故得 $|\lambda|=1$,即 $\lambda\in\mathbb{S}^1$.

(iii) 易直接验知 $y=\exp(\mathrm{i}x)$ 是 U 元,于是由(ii)与谱映射公式有 $\sigma(y)=$

$\exp(\mathrm{i}\,\sigma(x)) \subset \mathbb{S}^1$,这推出 $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$. □

5.3 节中已看到交换 B 代数有一系列良好性质,但有关的主要定理(如定理 5.3.3)并未达到最理想的结论. 从例 5.3.2(i)来看,定理 5.3.3 应当可以改进. 并非偶然的是,例 5.3.2(i)中的代数为交换 B* 代数(见例 5.4.1). 现在就来对一般交换 B* 代数建立定理 5.3.3 的一种改进形式. 为此,要用到一个关键结果,即关于连续函数代数 $C(\Omega)$ 的 **Stone-Weiestrass 定理**, 它可看成经典 Weierstrass 逼近定理的某种推广,它断定每个 $f \in C(\Omega)$ 可用适当的"多项式" 一致逼近. 注意若 A 是由某个集 S 生成的代数,则 A 就是 S 中元的多项式之全体.

定理 5.4.2 设 $C(\Omega)$ 依例 5.4.1(ii), A 是 $C(\Omega)$ 的一个(*) 子代数, $1 \in A$. A 分离 Ω 的点,即当 $x, y \in \Omega, x \neq y$ 时有 $\varphi \in A$ 使 $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, 则 A 在 $C(\Omega)$ 中稠密,因而当 A 是闭子代数时 $A = C(\Omega)$.

证 只要证 $B \triangleq \bar{A} \cap C(\Omega, \mathbb{R})$ 在 $C(\Omega, \mathbb{R})$ 中稠密. 证明分为两步.

(i) 在 B 对格运算封闭的假定下证 B 在 $C(\Omega, \mathbb{R})$ 中稠密,格运算 $\vee$ 与 $\wedge$ 依式(3.1.1). 由 A 是(*) 代数推出, $\forall \varphi \in A$,有 $\operatorname{Re}\varphi, \operatorname{Im}\varphi \in B$(见式(5.4.1)): 因此 B 亦分离 Ω 的点. 取定 $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$,今要构成 $\varphi \in B$ 使得 $\|f - \varphi\|_0 < \varepsilon$. 若 $x, y \in \Omega, x \neq y$,则有 $\psi \in B$,使 $\psi(x) \neq \psi(y)$. 令

$$\varphi_{xy}(z) = \psi(y) + \frac{\psi(z) - \psi(y)}{\psi(x) - \psi(y)}[f(x) - f(y)], \quad z \in \Omega,$$

则 $\varphi_{xy} \in B$(注意 $1 \in B$!), $\varphi_{xy}(x) = f(x)$, $\varphi_{xy}(y) = f(y)$. 约定 $\varphi_{xx} = f$. 固定 $x \in \Omega$, $\forall y \in \Omega$,取 y 的邻域 V_y,使得在 V_y 内 $\varphi_{xy} < f + \varepsilon$. 取 Ω 的有限覆盖 $\{V_{y_i}: 1 \leqslant i \leqslant n\}$,令 $\varphi_x = \varphi_{xy_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{xy_n}$. 则 $\varphi_x \in B$, $\varphi_x(x) = f(x)$,在 Ω 上 $\varphi_x < f + \varepsilon$. 类似的论证得出 $\varphi = \varphi_{x_1} \vee \cdots \vee \varphi_{x_m} \in B$,使得在 Ω 上 $\varphi > f - \varepsilon$,显然亦有 $\varphi < f + \varepsilon$,因而 $\|f - \varphi\|_0 < \varepsilon$.

(ii) 证 B 对格运算封闭. 为此,只需证 $\varphi \in B \Rightarrow |\varphi| \in B$. 取定 $\varphi \in B$,不妨设 $|\varphi| < 1$. 令 $\psi = 1 - \varphi^2$,则 $\psi \in B$, $0 < \psi \leqslant 1$,

$$|\varphi| = \sqrt{1 - \psi} = 1 - \frac{\psi}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\psi^n.$$

由幂级数理论易知,上式右端级数一致收敛,因此 $|\varphi|$ 可用 ψ 的多项式一致逼近. 因 B 是闭集,故 $|\varphi| \in B$,如所要证. □

若 $S \subset C(\Omega)$ 满足条件

$$1 \in S, \quad S \text{ 分离 } \Omega \text{ 的点}, \quad \varphi \in S \Rightarrow \bar{\varphi} \in S, \tag{5.4.2}$$

则由 S 生成的子代数 A 必满足定理 5.4.2 的条件,因而每个 $f \in C(\Omega)$ 均可用 S 中元的多项式一致逼近. 若 $S \subset C(\Omega, \mathbb{R})$,则每个 $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ 可用 S 中元的实系数多项式一致逼近. 为使以上结论达到尽可能好的应用效果,在满足条件(5.4.2) 的前提下, S 自然应选得尽可能小,而且 S 中的元应为性质良好的"标准函数". 下面就

是两个典型的例子.

(i) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是任给非空紧集,$S = \{1, \varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$,$\varphi_j(x) = x_j(x \in \Omega, 1 \leqslant j \leqslant n)$. S 显然满足条件(5.4.2). 由 S 的元作成的多项式就是通常的 n 元多项式.

(ii) 设 $\Omega = \mathbb{T}^n$,$S = \{1, \varphi_1, \cdots, \varphi_n, \bar{\varphi}_1, \cdots, \bar{\varphi}_n\}$,$\varphi_j(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_j}$,$(x \in \mathbb{T}^n, 1 \leqslant j \leqslant n)$. 若 $x, y \in \mathbb{T}^n$,$x \neq y$,则对某个 j 有 $x_j \not\equiv y_j \mod(2\pi)$,从而 $\varphi_j(x) \neq \varphi_j(y)$. 由此看出 S 满足条件(5.4.2). 由 S 的元作成的多项式的一般形式是 $\varphi = \sum_{k \in K} a_k e_k$, 其中,$K \subset \mathbb{Z}^n$ 是任一有限集,$e_k(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k \cdot x}$. 这样的 φ 称为三角多项式.

基于以上事实,从定理 5.4.2 得出

推论 5.4.1 (i) 若 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一非空紧集,则每个 $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ 可用 n 元实多项式一致逼近. 特别地,每个 $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ 可用实多项式一致逼近;

(ii) 每个 $f \in C(\mathbb{T}^n)$ 可用三角多项式一致逼近.

这样,经典的 Weierstrass 定理已经包含于其中了. 但应指出,推论 5.4.1(i)的如下“复形式”并不成立:“若 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是一非空紧集,则每个 $f \in C(\Omega)$ 可用 n 元复多项式一致逼近”. 例如,设 $\Omega = \mathbb{T}^1 \subset \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$,$P(z) = \sum_0^m a_j z^j$,则

$$2\pi = \int_0^{2\pi} |f|^2 \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} (f - P)\bar{f} \mathrm{d}\theta + \int_0^{2\pi} P\bar{f} \mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (f - P)\bar{f} \mathrm{d}\theta \leqslant 2\pi \| f - P \|_0,$$

这得出 $\| f - P \|_0 \geqslant 1$.

若 Ω 是非紧的 LCH,则通过考虑 Ω 的一点紧化可从定理 5.4.2 得出

推论 5.4.2 设 Ω 是非紧的 LCH, A 是 $C_0(\Omega)$ 的(*)子代数,A 分离 Ω 的点. $\forall x \in \Omega$ 存在 $\varphi \in A$ 使 $\varphi(x) \neq 0$,则 A 在 $C_0(\Omega)$ 中稠密.

定理 5.4.2 还有许多其他有趣的推论. 但我们已该回到本节的主题了. 以下就是本节的中心结果,它是 Gelfand 和 Naimark 于 1943 年证明的.

定理 5.4.3 设 A 是交换 B^* 代数, $\Delta = \Delta(A)$, 则 Gelfand 表示

$$\Gamma: A \to C(\Delta), \quad x \to \hat{x} \tag{5.4.3}$$

是一个等距的(*)代数同构.

证 今在定理 5.3.3 的基础上进而说明以下几点:

(i) Γ 是一个(*)代数同态,即 $\widehat{x^*} = \bar{\hat{x}}$. 事实上,若 $x \in A$,设 $x = a + \mathrm{i}b$ 依式(5.4.1), $\varphi \in \Delta$, 则由定理 5.3.2 与定理 5.4.1(ii)有 $\varphi(a), \varphi(b) \in \mathbb{R}$. 于是

$$\widehat{x^*}(\varphi) = \varphi(x^*) = \varphi(a - \mathrm{i}b) = \varphi(a) - \mathrm{i}\varphi(b) = \overline{\hat{x}(\varphi)},$$

这说明 $\widehat{x^*} = \bar{\hat{x}}$.

(ii) $\| \hat{x} \|_0 = \| x \| (x \in A)$, 这由定理 5.3.2 与定理 5.4.1(i)推出.

(iii) $\hat{A} = C(\Delta)$. 因已指明 $\Gamma: A \to \hat{A}$ 是一个等距的(∗)代数同构,故 $\hat{A}$ 必为 $C(\Delta)$ 的闭(∗)子代数. 显然 $1 = \hat{e} \in \hat{A}$,$\hat{A}$ 分离 Δ 的点. 因此可用定理5.4.2 得出 $\hat{A} = C(\Delta)$.

综上所证,得出 $\Gamma: A \to C(\Delta)$ 是等距的(∗)代数同构. □

所证定理表明,若 A 是交换 B* 代数,则不妨将它完全等同于连续函数代数 $C(\Delta)$. 进而不妨说,实质上只有一种交换 B* 代数,即连续函数代数 $C(\Omega)$. 如例5.4.1(ii)已指明的, $C(\Omega)$ 呈现出特别直观清晰的面貌,用其作为交换 B* 代数的标本是特别有利的. 或许会认为,上述结果固然美妙,可惜只能用于交换 B* 代数. 那么可以指出,将定理 5.4.3 用于一般 B* 代数的闭交换(∗)子代数是不成问题的. 我们马上就要看到,沿这一方向将获得多大成功.

为达到所需要的结论,先建立两个预备性结果.

引理 5.4.1　设 B 是 B* 代数 A 的闭(∗)子代数,$e, x \in B$,$\sigma(x,B)$ 记 x 在 B 中的谱,则 $\sigma(x,B) = \sigma(x)$.

证　令 $G_B = \{x \in G: x^{-1} \in B\}$,则显然 $G_B \subset G$,因而 $\sigma(x) \subset \sigma(x,B)$. 只要证 $\sigma(x,B) \subset \sigma(x)$;为此又只要证 $B \cap G \subset G_B$. 用反证法. 设有 $x \in (B \cap G) \setminus G_B$,则 $e \notin xB$,于是 $0 \in \sigma(xx^*, B)$. 因 $\sigma(xx^*) \subset \mathbb{R}$(由定理5.4.1(iii)),故 $\rho(xx^*)$ 是连通集. 可验知 $\rho(xx^*, B) = \mathbb{C} \setminus \sigma(xx^*, B)$ 在 $\rho(xx^*)$ 中既为开集又为闭集,因此 $\rho(xx^*, B) = \rho(xx^*)$,从而 $0 \in \sigma(xx^*, B) = \sigma(xx^*)$,这与 $xx^* \in G$ 相矛盾. □

引理 5.4.2(Fuglede)　设 x 是 B* 代数 A 中的正规元,$y \in A$,$xy = yx$,则 $x^* y = yx^*$.

证　由 $xy = yx$ 推出 $x^n y = yx^n$,从而 $(\exp x)y = y \exp x$. 于是

$$\begin{aligned} & \| (\exp x^*) y \exp(-x^*) \| \\ = & \| \exp(x^* - x) y \exp(x - x^*) \| \\ \leqslant & \| y \| \, \| \exp(x^* - x) \| \, \| \exp(x - x^*) \| \\ = & \| y \| \, \| \exp(x^* - x) \exp(x - x^*) \| = \| y \|. \end{aligned}$$

以 $\bar{\lambda} x$ 取代 x 得到

$$\| f(\lambda) \| \leqslant \| y \|, \quad f(\lambda) = \exp(\lambda x^*) y \exp(-\lambda x^*).$$

由 Liouville 定理(推论4.1.1(iv))有 $f(\lambda) \equiv f(0) = y$,即

$$y \exp(\lambda x^*) = \exp(\lambda x^*) \cdot y, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

上式两边对 λ 求导后置 $\lambda = 0$,即得 $yx^* = x^* y$. □

作了以上准备之后,现在来给出定理 5.4.3 的如下主要应用:

定理 5.4.4　设 x 是 B* 代数 A 中的正规元,B 是由 $\{e, x, x^*\}$ 生成的闭子代数. 则 B 是交换 B* 代数,它等距(∗)代数同构于 $C(\sigma(x))$. 若 $y \in A$ 与 x 可换,则 y 与每个 $b \in B$ 可换.

证　由 x 是正规元推出 B 是交换代数. 若 $b \in B$,则 b 可用 (x, x^*) 的多项式逼

近;显然 b^* 有同一性质,因此 $b^* \in B$. 可见 B 是 A 的闭(*)子代数,因而是 B^* 代数. 于是由定理 5.4.3 有等距的(*)代数同构

$$\Gamma: B \to C(\Delta), \quad b \to \hat{b}, \tag{5.4.4}$$

其中,$\Delta = \Delta(B)$. 由引理 5.4.1 有 $\sigma(x,B) = \sigma(x)$. $\forall \varphi \in \Delta$,由 B 的构成知 φ 由 $\varphi(x)$ 唯一决定. 这结合定理 5.3.2 得出

$$\hat{x}: \Delta \to \sigma(x), \quad \varphi \to \varphi(x) \tag{5.4.5}$$

是一连续双射,因而是一同胚(由命题 1.4.4). 这又导出一个双射

$$h: C(\Delta) \to C(\sigma(x)), \quad \varphi \to \varphi \circ \hat{x}^{-1}.$$

于是

$$h \circ \Gamma: B \to C(\sigma(x)), \quad b \to \hat{b} \circ \hat{x}^{-1} \tag{5.4.6}$$

是一等距的(*)代数同构,其中,$\hat{b}$ 与 $\hat{x}$ 分别依式(5.4.4)与式(5.4.5).

若 $xy = yx$,则由引理 5.4.2 有 $yx^* = x^*y$,这推出 $yb = by(\forall b \in B)$. □

在得到"等距的(*)代数同构"这一点上,定理 5.4.4 与定理 5.4.3 并无不同. 但就对所得结论的用法而言,两者颇有差别. 对于定理 5.4.4,所需要的与其说是同构(5.4.6),不如说是它的逆

$$C(\sigma(x)) \to B, \quad f(\lambda) \to f(x), \tag{5.4.7}$$

其中,$f(\lambda)$ 与 $f(x)$ 分别为式(5.4.6) 中的 $\hat{b} \circ \hat{x}^{-1}$ 与 b,因此 $f(\lambda) = f(x)^\wedge \circ \hat{x}^{-1}$,即

$$f(x)^\wedge = f \circ \hat{x}, \quad f = f(\lambda) \in C(\sigma(x)), \tag{5.4.8}$$

或等价地

$$\varphi(f(x)) = f(\varphi(x)), \quad f(\lambda) \in C(\sigma(x)), \varphi \in \Delta. \tag{5.4.9}$$

注意到同构(5.4.7)的特点,不妨借用 5.2 节中的处理模式. 取非空集 $\Omega \subset \mathbb{C}$,令

$$A_\Omega = \{x \in A: xx^* = x^*x, \sigma(x) \subset \Omega\} \tag{5.4.10}$$

(注意与式(5.2.3)有别!). 若 $f(\lambda) \in C(\Omega)$,$x \in A_\Omega$,则依同构(5.4.7)$f(\lambda)$ 唯一地对应一个正规元 $f(x) \in A$,它由式(5.4.8) 或式(5.4.9) 唯一确定. 这样,$f(\lambda)$ 就唯一地对应一个 A_Ω 上的 A 值函数 $f(x)$. 有趣的是,在若干主要特征上,由式(5.4.7) 确定的对应 $f(\lambda) \to f(x)$ 具有类似于定理 5.2.1 意义下的解析扩张的性质. 以下定理可与定理 5.2.1 相对照,它给出连续函数的"符号演算"规则.

定理 5.4.5 设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是任一非空集,A 为 B^* 代数,A_Ω 依式(5.4.10),则以下结论成立:

(i) 任给 $f(\lambda) \in C(\Omega)$,由条件(5.4.8) 唯一决定一个定义于 A_Ω 上的 A 值函数 $f(x)$,它是 $f(\lambda)$ 的扩张,即 $f(\lambda e) = f(\lambda)e(\lambda \in \Omega)$. $\forall x \in A_\Omega$,$f(x)$ 是正规元,$xy = yx \Rightarrow yf(x) = f(x)y$, $f(\lambda) \equiv \lambda \Rightarrow f(x) = x$,$f(\lambda) \equiv \bar{\lambda} \Rightarrow f(x) = x^*$;

(ii) $f(\lambda) \to f(x)$ 为(*)代数同构,$\|f\|_{\sigma(x)} = \|f(x)\| (x \in A_\Omega)$;

(iii) 若 $\{f_n(\lambda)\} \subset C(\Omega)$,$x \in A_\Omega$,在 $\sigma(x)$ 上 $f_n(\lambda) \rightrightarrows f(\lambda)$,则 $f_n(x) \to f(x)$;

(iv) 谱映射公式:设$f(\lambda) \in C(\Omega)$,$x \in A_\Omega$,则$f(\sigma(x)) = \sigma(f(x))$;

(v) 设$f(\lambda) \in C(\Omega)$,$g(\tau) \in C(\Omega')$,$f(\Omega) \subset \Omega'$,$h(\lambda) = g(f(\lambda))$,$x \in A_\Omega$,则$h(x) = g(f(x))$.

证 结论(i)与(ii)是定理5.4.4及$f(x)$定义的直接推论.(iii)由(ii)推出.

(iv) 取定$x \in A_\Omega$,设$\hat{x}$与Δ依式(5.4.5),则结合式(5.4.8)与定理5.3.2有

$$f(\sigma(x)) = f(\hat{x}(\Delta)) = f(x)^\wedge(\Delta) = \sigma(f(x)).$$

(v) 因$f(x)$是正规元且$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x)) \subset \Omega'$,故$g(f(x))$有定义.由式(5.4.8)有

$$h(x)^\wedge = h \circ x^\wedge = g \circ f \circ x^\wedge = g \circ f(x)^\wedge = [g(f(x))]^\wedge,$$

这得出$h(x) = g(f(x))$. □

与解析扩张的一个明显区别是,连续函数$f(\lambda)$的扩张$f(x)$并无类似于式(5.2.6)的解析表示,因而根本不知道如何去"计算"它,对函数$f(x)$亦未确立任何连续性结论.但这些缺陷似乎并不妨碍对于这种函数的运用,定理5.4.5中那么多结论的确立及相对较简单的论证,已初步证明了这一点,对于定理5.4.5的实际应用将进一步证明这一点.

充分注意到定理5.4.5与定理5.2.1的类似,再来看如下推论就十分自然了,它与推论5.2.1恰相对应.

推论5.4.3 设$\Omega \subset \mathbb{C}$是一非空集,$A$为B*代数,$x \in A_\Omega$,$f(\lambda)$,$g(\lambda) \in C(\Omega)$,则以下结论成立:

(i) $f(x)$与$g(x)$恒可交换.特别地,x与$f(x)$恒可交换;

(ii) $f(x)$可逆$\Leftrightarrow f(\lambda)$在$\sigma(x)$上无零点$\Leftrightarrow 0 \notin f(\sigma(x))$.当$0 \notin f(\sigma(x))$时$[f(x)]^{-1} = h(x)$,$h(\lambda) = [f(\lambda)]^{-1}$;

(iii) 若$f(x) = 0$,则$\sigma(x) \subset \{\lambda : f(\lambda) = 0\}$;

(iv) $\bar{f}(x) = f(x)^*$,$f(x)$是自伴元$\Leftrightarrow f(\sigma(x)) \subset \mathbb{R}$,$f(x)$是U元$\Leftrightarrow f(\sigma(x)) \subset \mathbb{S}^1$.特别地,$x$是自伴元$\Leftrightarrow \sigma(x) \subset \mathbb{R}$,$x$是U元$\Leftrightarrow \sigma(x) \subset \mathbb{S}^1$.

其中唯一值得说明的是结论(iv).$\bar{f}(x) = f(x)^*$直接由$f(\lambda) \to f(x)$的"(*)代数同构"性质得出.$f(x)$是自伴元$\Leftrightarrow f(x) = \bar{f}(x) \Leftrightarrow f(\lambda) = \overline{f(\lambda)}$($\forall \lambda \in \sigma(x)$)$\Leftrightarrow f(\sigma(x)) \subset \mathbb{R}$.类似地可推出其余结论.

类比于定理5.2.1,应用定理5.4.5的基本的思想是:若$f_j(\lambda) \in C(\Omega)$($1 \leqslant j \leqslant n$)满足形如式(5.2.11)的关系式,则对$x \in A_\Omega$亦有$F(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)) = 0$,后者很可能是一个有价值的结论.此处仅需$f_j(\lambda)$连续,对$\Omega$亦无特殊要求,因而应用定理5.4.5较之用定理5.2.1更为灵活.今用若干例子来作说明.

例5.4.2 以下设A是B*代数,$x \in A$.

(i) 若$x = x^*$,$\sigma(x) \subset \mathbb{R}_+$,则称$x$为正元,记作$x \geqslant 0$.现在证明:正元必有正的平方根.设$x \geqslant 0$,取$\Omega = \mathbb{R}_+$,令$f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$(算术根),则$f(\lambda) \in C(\Omega)$,$x \in A_\Omega$,

于是 $y=f(x)\in A$ 有定义. 由 $f^2(\lambda)=\lambda$ 得出 $f^2(x)=x$,即 $y^2=x$,故 y 是 x 的平方根. 其次,由 $\sigma(f(x))=f(\sigma(x))=\{\sqrt{\lambda}:\lambda\in\sigma(x)\}\subset\mathbb{R}_+$ 推出 $y\geqslant 0$,故 y 是 x 的正平方根. 因显然 $0\in\sigma(x)\Leftrightarrow 0\in\sigma(y)$,故 x 可逆 $\Leftrightarrow y$ 可逆.

注意与例5.2.1(i)对照,此处不必 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 是开集及 $\sqrt{\lambda}$ 是 Ω 内的解析函数.

(ii) 令 $y=xx^*$,今说明 $y\geqslant 0$. 以 B 记由 $\{e,y\}$ 生成的闭子代数,则必有 $z\in B$,使得 $\hat{z}=|\hat{y}|-\hat{y}$,$\hat{z}$ 依 B 的 Gelfand 表示. 令 $w=zx=u+\mathrm{i}v$,$u,v\in A$ 是自伴元. 直接计算得

$$ww^*=z^2y,\quad w^*w+ww^*=2u^2+2v^2.$$

因 $\hat{z}^2\hat{y}=-2\hat{z}\hat{y}^2\leqslant 0$,故 $-ww^*\geqslant 0$,从而

$$w^*w=2u^2+2u^2+2v^2-ww^*\geqslant 0.$$

这结合 $\sigma(ww^*)\subset\sigma(w^*w)\cup\{0\}$(见推论5.1.2之证)推出 $ww^*\geqslant 0$,因而 $\hat{z}^2\hat{y}\geqslant 0$. 这推出 $\hat{z}=0$,于是 $\hat{y}=|\hat{y}|\geqslant 0$,因而 $y\geqslant 0$.

(iii) 设 x 可逆,今证有极分解 $x=uv$,其中,u 为U元,$v\geqslant 0$. 由(ii),必 $x^*x\geqslant 0$ 且 x^*x 可逆. 由(i),x^*x 有可逆的正平方根 v. 令 $u=xv^{-1}$,则 $x=uv$,

$$uu^*=xv^{-2}x^*=x(x^*x)^{-1}x^*=e.$$

同理,$u^*u=e$,故 u 为U元.

(iv) 若 $x=x^*$,$y=\exp(\mathrm{i}x)$,则 $\sigma(y)\subset\mathbb{S}^1$,故 y 是U元(由推论5.4.3(iv)). 反之,若 y 是U元,$\sigma(y)\neq\mathbb{S}^1$,$f(\lambda)=\ln\lambda$,则可适当限定 $\arg\lambda$ 使 $f(\lambda)\in C(\sigma(y))$ 且 $\exp f(\lambda)=\lambda$. 令 $x=-\mathrm{i}f(y)$,则 $y=\exp f(y)=\exp(\mathrm{i}x)$,$\sigma(x)\subset\mathbb{R}$,$x$ 是自伴元. 因此,除了 $\sigma(y)=\mathbb{S}^1$ 这种极端情况之外(这种情况可能出现),$y=\exp(\mathrm{i}x)(x=x^*)$ 可作为U元的通式.

定义5.4.2 设 f 是(*)代数 A 上的线性泛函. 若对任给 $x\in A$,有 $f(xx^*)\geqslant 0$,则称 f 为 A 上的**正泛函**.

设 $A=L(H)$ 如例5.4.1(i). 取定 $x\in H$,令 $f(T)=\langle Tx,x\rangle$,则

$$f(TT^*)=\langle TT^*x,x\rangle=\|T^*x\|^2\geqslant 0,$$

可见 f 是 $L(H)$ 上的正泛函. 其次设 $A=C(\Omega)$ 依例5.4.1(ii). 若 f 是 A 上的一个正泛函,则当 $0\leqslant\varphi\in C(\Omega)$ 时 $f(\varphi)=f(\sqrt{\varphi}\sqrt{\varphi})\geqslant 0$,可见 f 就是 Riesz 表示定理3.4.3 所说的正线性泛函,因而它唯一决定 Ω 上一个正测度 μ. 因不难指明 $\|f\|=f(1)$,故 $\mu\in M(\Omega)$. 这些事实启示出一般(*)代数上的某些类似结论.

定理5.4.6 设 f 是(*)代数 A 上的正泛函,则以下结论成立:

(i) $\langle x,y\rangle\triangleq f(y^*x)$ 满足内积公理 (I_1) 与 (I_2)(依定义1.7.1)且 $\langle x,x\rangle\geqslant 0$;

(ii) $f(x^*)=\overline{f(x)}$;

(iii) 若 A 满足 $\|x^*\|=\|x\|(\forall x\in A)$,则 $f\in A^*$ 且 $\|f\|=f(e)$.

证 (i) $\langle x,y\rangle$ 显然满足公理 (I_1) 且 $\langle x,x\rangle\geqslant 0$. 其次,由

$$0 \leqslant \langle x+y,x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$$

推出 $\operatorname{Im}(\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle) = 0$. 以 iy 取代 y 得 $\operatorname{Re}(\langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle) = 0$. 故得 $\overline{\langle x,y\rangle} = \langle y,x\rangle$, 公理$(I_2)$得验.

(ii) $f(x^*) = \langle e,x\rangle = \overline{\langle x,e\rangle} = \overline{f(x)}$.

(iii) 对 $\langle x,y\rangle$ 亦可建立 Schwarz 不等式(见式(1.7.1))

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leqslant \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle, \quad x,y \in A. \tag{5.4.11}$$

若 $x \in A$, $\|x\| < 1$,则

$$|f(x)|^2 = |\langle e,x\rangle|^2 \leqslant \langle e,e\rangle\langle x,x\rangle = f(e)f(y),$$

其中, $y = x^*x = y^*$. 必定 $\sigma(y) \subset (-1,1)$. 令 $\varphi(t) = \sqrt{1-t}$,则 $z = \varphi(y)$ 有定义且 $z \geqslant 0$, $z^2 = e - y$,这推出 $f(e) - f(y) = f(zz^*) \geqslant 0$, $f(y) \leqslant f(e)$. 因此 $|f(x)| \leqslant f(e)$,从而 $\|f\| \leqslant f(e) \leqslant \|f\|\,\|e\|$,故得 $\|f\| = f(e)$. □

定理 5.4.7　设 A 是有单位元 e 的交换 B^* 代数, $\Delta = \Delta(A)$,则 A 上的正泛函之全体与 Δ 上的有限正测度之全体成一一对应.

证　若 $\mu \in M(\Delta)$ 是一正测度,令

$$f_\mu(x) = \int_\Delta \hat{x}\,d\mu, \quad x \in A,$$

则 f_μ 是 A 上的线性泛函. 因

$$f_\mu(xx^*) = \int_\Delta |\hat{x}|^2 d\mu \geqslant 0,$$

故 f_μ 是 A 上的正泛函. 易看出 $\|f_\mu\| = \|\mu\|$. 反之,若 f 是 A 上的正泛函,由定理 5.4.3,不妨认为 f 是 $C(\Delta)$ 上的正线性泛函,因而唯一确定一个正测度 μ,使得

$$f(x) = \int_\Delta \hat{x}\,d\mu.$$

因而 $f = f_\mu$ 且 $\|f\| = \|\mu\| = f(e)$,故 $\mu \in M(\Delta)$. □

5.5　算子代数

本节中设 H 是给定的复 Hilbert 空间. 如例 5.4.1(i) 指出的,算子代数 $L(H)$ 是一个 B^* 代数,而且是典型的 B^* 代数. 对于 $L(H)$ 当然可应用关于 B^* 代数的一般结果,尤其是深刻的定理 5.4.4 与定理 5.4.5. 不过,对于有清晰结构的算子代数,更希望得到一些便于直接应用的结果.

本节的主要结果是关于正规算子的谱分解定理,它是线性算子理论的最重要的成果之一. 简单地说,谱分解定理就是将一个正规算子 T 表成一族正投影算子的某种"线性组合",而这一想法最初源于线性代数中矩阵的对角化. 对角矩阵有分解

$$\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n) = \sum_j \lambda_j P_j,$$

其中，$P_j = \mathrm{diag}(0,\cdots,1,\cdots,0)$ 可看成正投影算子. 就正规算子 $T \in L(H)$ 的谱分解而言，正投影算子应来自 T 的适当函数 $f(T)$. 若 $f(\lambda) \in C(\sigma(T))$, $P = f(T)$ 是正投影算子，则由 $P^2 = P$ 及谱映射公式有 $f(\sigma(T)) = \sigma(P) \subset \{0,1\}$. 由此可见，限于使用连续函数将难以得出非平凡的正投影. 因此本节不能只是简单地应用定理 5.4.5，而应对它作实质性推广，使得对某些不连续函数 $f(\lambda)$ 也能定义 $f(T)$. 这件事做起来颇具技术性，我们将强调主要思路，适当简化某些烦琐的细节.

回忆一下，$P \in L(H)$ 为正投影算子意味着它满足 $P^2 = P = P^*$（根据定理 1.7.6）. 谱分解定理基于特定的正投影族，它由以下定义给出：

定义 5.5.1 设 Ω 是一个 LCH，$\mathscr{B}$ 是其中的 Borel 集族，$P = \{P(B): B \in \mathscr{B}\} \subset L(H)$ 是一族正投影. 若 P 满足条件（以下 $A, B \in \mathscr{B}$）

(i) $P(\varnothing) = 0$, $P(\Omega) = I$;

(ii) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;

(iii) 存在 $\{\mu_{xy}: x, y \in H\} \subset M(\Omega)$，使 $\mu_{xy}(B) = \langle P(B)x, y\rangle$，

则称 P 为一个**谱族**或单位分解.

若 P 是一个谱族，$x \in H$，则直接由定义 5.5.1 推出 μ_{xx} 是一个正测度，$\|\mu_{xx}\| = \|x\|^2$, $A \cap B = \varnothing \Rightarrow R(P(A)) \perp R(P(B))$, $B \to P(B)x$ 是一个 H 值测度.

任给拓扑空间 Ω，本节以 $B(\Omega)$ 表示 Ω 上的有界 Borel 可测复值函数之全体（这与例 1.2.1(i) 的规定稍异），其中采用 sup 范数. 依通常的函数运算并以复共轭为对合运算，$B(\Omega)$ 是一个交换 B^* 代数.

以下就是本节的中心结果，通常称为正规算子的谱分解定理.

定理 5.5.1 设 $T \in L(H)$ 是一正规算子，$\Omega = \sigma(T)$，$\mathscr{B}$ 是 Ω 中的 Borel 集族，则存在（$*$）代数同态

$$B(\Omega) \to L(H), \quad f(\lambda) \to f(T) \tag{5.5.1}$$

与唯一的谱族 $P = \{P(B): B \in \mathscr{B}\}$，使得以下结论成立：

(i) 任给 $f(\lambda) \in B(\Omega)$，有 $\|f(T)\| \leqslant \|f\|_0$ 且

$$\langle f(T)x, y\rangle = \int_\Omega f(\lambda)\,\mathrm{d}\mu_{xy}, \quad x, y \in H, \tag{5.5.2}$$

其中，μ_{xy} 依定义 5.5.1. 若 $f(\lambda) \in C(\Omega)$，则 $f(T)$ 决定于式 (5.4.8)（以 T 换 x），$\|f(T)\| = \|f\|_0$;

(ii) 若 $S \in L(H)$ 与 T 可换，$f(\lambda) \in B(\Omega)$，则 S 与 $f(T)$ 可换. 特别地，由此推出 $f(T)$ 是正规算子；

(iii) 若 $B \subset \Omega$ 是非空相对开集，则 $P(B) \neq 0$;

(iv) 设 $f(\lambda) \in B(\Omega)$，则依算子范数收敛有

$$f(T) = \int_\Omega f(\lambda)\,\mathrm{d}P(\lambda), \tag{5.5.3}$$

积分的准确含义在定理证明中给出. 特别地,

$$T = \int_{\Omega} \lambda \mathrm{d}P(\lambda). \tag{5.5.4}$$

任给 $x \in H$,有

$$\| f(T)x \|^2 = \int_{\Omega} | f(\lambda) |^2 \mathrm{d}\mu_{xx} = \int_{\Omega} | f(\lambda) |^2 \mathrm{d} \| P(B)x \|^2. \tag{5.5.5}$$

式(5.5.4)称为 T 的谱分解. P 称为 T 的谱族, μ_{xy} 称为 T 的**谱测度**.

证 设 $\mathscr{A}$ 是由 $\{I, T, T^*\}$ 生成的 $L(H)$ 的闭子代数. 由定理 5.4.4,存在等距的(*)代数同构(依式(5.4.7))

$$C(\Omega) \to \mathscr{A}, \quad f(\lambda) \to f(T). \tag{5.5.6}$$

今在此基础上构成(*)代数同态(5.5.1)与定理所要求的谱族 P.

任给 $x, y \in H$,令

$$L_{xy}(f) = \langle f(T)x, y \rangle, \quad f(\lambda) \in C(\Omega), \tag{5.5.7}$$

其中, $f(T)$ 依同构(5.5.6). 固定 $x, y \in H$, 显然有 $L_{xy} \in C(\Omega)^*$ 且 $\| L_{xy} \| \leqslant \| x \| \| y \|$. 于是由定理 3.5.3 有 $\mu_{xy} \in M(\Omega)$, 使得式(5.5.2) 对任何 $f(\lambda) \in C(\Omega)$ 成立且 $\| \mu_{xy} \| = \| L_{xy} \| \leqslant \| x \| \| y \|$. 由式(5.5.7) 看出 L_{xy} 对 x 与 y 分别是线性的与共轭线性的, 于是 μ_{xy} 亦有此性质. 现在取 $f(\lambda) \in B(\Omega)$, 显然式(5.5.2) 右端仍有意义且它是关于(x, y) 的一个 Hermite 双线性泛函. 当 $\| x \| = \| y \| = 1$ 时, 有

$$\left| \int_{\Omega} f(\lambda) \mathrm{d}\mu_{xy} \right| \leqslant \| f \|_0 \| \mu_{xy} \| \leqslant \| f \|_0.$$

由定理 1.7.5, 存在唯一的 $f(T) \in L(H)$, 使得式(5.5.2) 成立且 $\| f(T) \| \leqslant \| f \|_0$. 这就构成了映射(5.5.1)且显然它已满足定理之结论(i).

现在验证映射(5.5.1)是(*)代数同态, 这一步有点曲折. 式(5.5.1)是线性的不成问题. 若 $f(\lambda) \in C(\Omega, \mathbb{R})$, 则 $f(T)$ 是自伴算子(推论 5.4.3(iv)). 于是

$$\int_{\Omega} f(\lambda) \mathrm{d}\mu_{xy} = \langle f(T)x, y \rangle = \langle x, f(T)y \rangle$$

$$= \overline{\langle f(T)y, x \rangle} = \int_{\Omega} f(\lambda) \mathrm{d}\bar{\mu}_{yx},$$

这得出 $\mu_{xy} = \bar{\mu}_{yx} (x, y \in H)$. 于是, 对任给 $f(\lambda) \in B(\Omega)$ 有

$$\langle f(T)x, y \rangle = \int_{\Omega} f(\lambda) \mathrm{d}\mu_{xy} = \overline{\int_{\Omega} \overline{f(\lambda)} \mathrm{d}\mu_{yx}}$$

$$= \overline{\langle \bar{f}(T)y, x \rangle} = \langle x, \bar{f}(T)y \rangle, \quad \forall x, y \in H,$$

这得出 $\bar{f}(T) = f(T)^*$. 其次, 对任给 $f(\lambda), g(\lambda) \in C(\Omega)$, 有

$$\int_{\Omega} f(\lambda) g(\lambda) \mathrm{d}\mu_{xy} = \langle f(T) g(T)x, y \rangle = \langle g(T)x, z \rangle$$

$$= \int_\Omega g(\lambda)\,\mathrm{d}\mu_{xz}, \quad z = f(T)^* y,$$

这推出 $\mathrm{d}\mu_{xz} = f\mathrm{d}\mu_{xy}(f(\lambda) \in C(\Omega), z = f(T)^* y)$. 于是对 $g(\lambda) \in B(\Omega)$ 有

$$\langle f(T)g(T)x, y\rangle = \langle g(T)x, z\rangle = \int_\Omega g(\lambda)\,\mathrm{d}\mu_{xz}$$

$$= \int_\Omega f(\lambda)\ g(\lambda)\,\mathrm{d}\mu_{xy} = \langle (fg)(T)x, y\rangle,$$

故得 $(fg)(T) = f(T)g(T)$. 重复以上论证可以得出当 $f(\lambda), g(\lambda) \in B(\Omega)$ 时也有 $(fg)(T) = f(T)g(T)$. 因此式(5.5.1)是一个(*)代数同态.

构成谱族 P. 任给 $B \in \mathscr{B}$, 显然 $\xi_B \in B(\Omega)$, 故 $P(B) \triangleq \xi_B(T)$ 有定义. 由 $\xi_B^2 = \xi_B = \bar{\xi}_B$ 知 $P(B)$ 是正投影. 直接看出 P 满足定义 5.5.1(i)与(ii)且

$$\langle P(B)x, y\rangle = \int_\Omega \xi_B\,\mathrm{d}\mu_{xy} = \mu_{xy}(B),$$

可见 P 是一个谱族. P 由 $\mu_{xy}(B) = \langle P(B)x, y\rangle$ 唯一决定, 从而由算子 T 唯一决定.

验证结论(ii). 设 $S \in L(H)$, $ST = TS$. 任给 $x, y \in H$, 令 $a = Sx$, $b = S^* y$. 若 $f(\lambda) \in C(\Omega)$, 则由定理 5.4.4 有 $Sf(T) = f(T)S$, 因此

$$\int_\Omega f(\lambda)\,\mathrm{d}\mu_{xb} = \langle f(T)x, b\rangle = \langle Sf(T)x, y\rangle$$

$$= \langle f(T)a, y\rangle = \int_\Omega f(\lambda)\,\mathrm{d}\mu_{ay},$$

这推出 $\mu_{xb} = \mu_{ay}$. 于是, 对任给 $f(\lambda) \in B(\Omega)$ 有

$$\langle Sf(T)x, y\rangle = \int_\Omega f(\lambda)\,\mathrm{d}\mu_{xb} = \int_\Omega f(\lambda)\,\mathrm{d}\mu_{ay} = \langle f(T)Sx, y\rangle,$$

这得出 $Sf(T) = f(T)S$.

验证结论(iii). 设 $B \subset \Omega$ 是非空相对开集, 则必有 $f(\lambda) \in C(\Omega)$, 使得 $f \prec B$, $f(\lambda) \neq 0$(由定理 1.3.6), 从而 $f(T) \neq 0$. 取 $x, y \in H$, 使 $\langle f(T)x, y\rangle \neq 0$, 则

$$0 \neq \int_\Omega f(\lambda)\,\mathrm{d}\mu_{xy} = \int_\Omega \xi_B(\lambda) f(\lambda)\,\mathrm{d}\mu_{xy} = \langle P(B)f(T)x, y\rangle,$$

这表明 $P(B) \neq 0$.

验证结论(iv). 设 $f = u + \mathrm{i}v \in B(\Omega)$, 可设 $a \leqslant u < b$, $c \leqslant v < d$. 作分划 $\pi = \{x_j, \rho_j, y_k, \eta_k\}$,

$$a = x_0 \leqslant \rho_1 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant \rho_m \leqslant x_m = b,$$

$$c = y_0 \leqslant \eta_1 \leqslant y_1 \leqslant \cdots \leqslant \eta_n \leqslant y_n = d,$$

令 $|\pi| = \max\limits_{j,k}(\Delta x_j \vee \Delta y_k)$, $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$,

$$\Delta_{jk} = \{\lambda \in \Omega:\ u(\lambda) \in [x_{j-1}, x_j), v(\lambda) \in [y_{k-1}, y_k)\},$$

$$S_\pi = \sum_{j,k} (\rho_j + \mathrm{i}\eta_k) P(\Delta_{jk}).$$

因 f 为 Borel 可测, 必 $\Delta_{jk} \in \mathscr{B}$, 因而 $P(\Delta_{jk})$ 有定义. 因

$$\|f(T) - S_\pi\| \leqslant \left\| f - \sum_{j,k} (\rho_j + \mathrm{i}\eta_k)\xi_{\Delta_{jk}} \right\|_0 \leqslant 2|\pi|,$$

故 $\|S_\pi - f(T)\| \to 0(|\pi| \to 0)$. 今定义

$$\int_\Omega f(\lambda)\mathrm{d}P(\lambda) = \lim_{|\pi|\to 0} S_\pi, \tag{5.5.8}$$

其中，右端依算子范数收敛，则式(5.5.3)成立. 其次，$\forall x \in H$，有

$$\|f(T)x\|^2 = \langle f(T)x, f(T)x\rangle = \langle f(T)^* f(T)x, x\rangle$$
$$= \langle |f|^2(T)x, x\rangle = \int_\Omega |f(\lambda)|^2 \mathrm{d}\mu_{xx},$$

这与 $\mu_{xx}(B) = \|P(B)x\|^2 (B \in \mathscr{B})$ 一起得出式(5.5.5) 成立. □

与定理 5.4.4 比较，定理 5.5.1 的主要改进是将(*)代数同构(5.5.6)扩张成了(*)代数同态(5.5.1)，因而对任何 $f(\lambda) \in B(\sigma(T))$，$f(T)$ 均可定义. 这一改进意义重大，舍此不能定义正投影 $P(B) = \xi_B(T)$，也就更谈不上得到谱分解式(5.5.4) 了.

如同从定理 5.4.4 推出定理 5.4.5 一样，从定理 5.5.1 推出

定理 5.5.2 设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是一非空集，

$$\mathscr{A}_\Omega = \{T \in L(H): TT^* = T^*T, \sigma(T) \subset \Omega\}, \tag{5.5.9}$$

$B_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 记 Ω 上局部有界的 Borel 可测函数之全体，则以下结论成立：

(i) 任给 $f(\lambda) \in B_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，由映射(5.5.1)唯一决定一个定义于 $\mathscr{A}_\Omega$ 上的 $L(H)$ 值函数 $f(T)$，$f(T)$ 恒为正规算子. $f(T)$ 是 $f(\lambda)$ 的扩张，这意味着 $f(\lambda I) = f(\lambda)I(\lambda \in \Omega)$；当 $f(\lambda) = \lambda_0$，$f(\lambda) = \lambda$ 与 $f(\lambda) = \bar{\lambda}$ 时分别有 $f(T) = \lambda_0 I$，$f(T) = T$ 与 $f(T) = T^*$；

(ii) 对应 $f(\lambda) \to f(T)$ 为(*) 代数同态，$\|f(T)\| \leqslant \|f\|_{\sigma(T)} (T \in \mathscr{A}_\Omega)$；

(iii) 设 $T \in \mathscr{A}_\Omega$，$\{f_n(\lambda)\} \subset B_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. 若在 $\sigma(T)$ 上 $f_n(\lambda) \rightrightarrows f(\lambda)$，则 $f_n(T) \to f(T)$. 若 $x \in H$，$f_n(\lambda) \to f(\lambda)$，$|\mu_{xx}|$-a. e.，$|f_n(\lambda)| \leqslant \mathrm{const}(\lambda \in \sigma(T))$，则 $f_n(T)x \to f(T)x$.

证 (i)与(ii)是明显的.

(iii) 前一种情况是明显的. 对于后一种情况，应用式(5.5.5)有

$$\|f_n(T)x - f(T)x\|^2 = \int_{\sigma(T)} |f_n(\lambda) - f(\lambda)|^2 \mathrm{d}\mu_{xx} \to 0, \quad n \to \infty,$$

最后一步依据控制收敛定理. □

类似于推论 5.4.3，可写出定理 5.5.2 的以下推论：

推论 5.5.1 设 $A \in L(H)$ 是正规算子，$f(\lambda)$，$g(\lambda) \in B(\sigma(T))$，$f(T)$ 与 $g(T)$ 依定理 5.5.2(或定理 5.5.1). 则以下结论成立：

(i) $f(T)$ 与 $g(T)$ 可交换. 特别地，T 与 $f(T)$ 可交换；

(ii) 若 $|f(\lambda)| \geqslant \varepsilon(\lambda \in \sigma(T))$，$\varepsilon$ 是正常数，则 $f(T)$ 可逆且 $f(T)^{-1} = h(T)$，

$h(\lambda) = 1/f(\lambda)$;

(iii) $\bar{f}(T) = f(T)^*$, $f(\sigma(T)) \subset \mathbb{R} \Rightarrow f(T)$ 是自伴算子, $f(\sigma(T)) \subset \mathbb{S}^1 \Rightarrow f(T)$ 是 U 算子, $f^2(\lambda) = f(\lambda) \in \mathbb{R}(\lambda \in \sigma(T)) \Rightarrow f(T)$ 是正投影算子.

定理 5.5.1 中的谱族 P 可代以单参数族 $\{P(\lambda): \lambda \in \mathbb{C}\}$,其中,

$$P(\lambda) = P(\{\tau \in \sigma(T): \tau \leqslant \lambda\}), \tag{5.5.10}$$

"$\tau \leqslant \lambda$"依$\mathbb{R}^2$ 中的标准向量序. 设 $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$,则当 $a \vee b$ 充分小时 $P(\lambda) = 0$,当 $a \wedge b$ 充分大时 $P(\lambda) = I$, $\tau \leqslant \lambda \Rightarrow P(\tau) = P(\tau)P(\lambda)$.

你可能不太看好积分表示(5.5.3). 它虽然形式上很简洁,但其意义似乎仍未被清晰表达,且不能归入第 3 章讨论过的任何一种积分之内. 对此可作如下说明:首先,$f(T)$ 实际上已完全由式(5.5.2)确定,式(5.5.2)中的积分根据式(3.3.15)有完全确定的意义. 其次,依据式(5.5.8),式(5.5.3)中的积分已有明确的意义. 如果希望改换成更方便的形式,有多种方法可以考虑,方法的选择依赖于函数 $f(\lambda)$ 及算子 T 的特殊条件, 如对于自伴算子与 U 算子就可得到很清晰的谱分解式,分别考虑如下:

首先设 $T = T^* \in L(H)$,则 $\sigma(T) \subset (\alpha,\beta]$, $-\infty < \alpha < \beta < \infty$. 设 P 是 T 的谱族(由定理 5.5.1),令

$$P(t) = P(\sigma(T) \cap (-\infty, t]), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.5.11}$$

易见当 $t \leqslant \alpha$ 时 $P(t) = 0$,当 $t \geqslant \beta$ 时 $P(t) = I$, $t < s \Rightarrow P_t = P_tP_s$. 令

$$\mu_{xy}((-\infty, t]) = \langle P(t)x, y\rangle, \quad x, y \in H, t \in \mathbb{R}, \tag{5.5.12}$$

则 $\mu_{xy} \in M(\mathbb{R})$. 任给 $f(t) \in B[\alpha,\beta]$,结合式(5.5.2) 与式(3.7.24) 有

$$\langle f(T)x, y\rangle = \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}\langle P(t)x, y\rangle, \quad x, y \in H, \tag{5.5.13}$$

其中, 右端是 LS 积分. 若 $f(t) \in C[\alpha,\beta]$,给定$[\alpha,\beta]$ 的分划

$$\pi: \alpha = t_0 \leqslant \tau_1 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant \tau_n \leqslant t_n = \beta,$$

则

$$\left\| \sum_i f(\tau_i)\Delta P(t_i) - f(T) \right\| \leqslant \left\| \sum_i f(\tau_i)\xi_{(t_{i-1},t_i]\cap\sigma(T)} - f \right\|_0,$$

当 $\max \Delta t_i \to 0$ 时上式右端 $\to 0$. 这就得到

$$f(T) = \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}P(t), \tag{5.5.14}$$

其中, 右端积分是定义 3.7.2 意义下的 RS 积分. 特别地,

$$T = \int_\alpha^\beta t\,\mathrm{d}P(t). \tag{5.5.15}$$

式(5.5.14)与式(5.5.15)都是足以令人满意的积分表示,式(5.5.15)也称为自伴算子 T 的谱分解公式,而 $\{P(t): t \in \mathbb{R}\}$ 称为自伴算子 T 的谱族.

其次设 $T \in L(H)$ 是 U 算子,则 $\sigma(T) \subset \mathbb{S}^1$. 令

$$P(\theta) = P(\{e^{i\varphi} \in \sigma(T): 0 \leqslant \varphi \leqslant \theta\}), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \tag{5.5.16}$$

则类似于式(5.5.13)~式(5.5.15)可建立

$$\langle f(T)x, y\rangle = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\langle P(\theta)x, y\rangle, \quad x, y \in H, \tag{5.5.17}$$

$$f(T) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) dP(\theta), \tag{5.5.18}$$

$$T = \int_0^{2\pi} e^{i\theta} dP(\theta). \tag{5.5.19}$$

式(5.5.17)中$f(\lambda) \in B(\mathbb{S}^1)$，其右端为 LS 积分，式(5.5.18)与式(5.5.19)右端为 RS 积分，$f(\lambda) \in C(\mathbb{S}^1)$.

必须指出，谱分解定理本身并非我们的目的，它不过是用来深入研究正规算子的一个工具而已，它应当引出更多的新结果来. 可惜，此处已不拟充分展开了. 不过，下面几个结果还是很说明问题的.

定理 5.5.3　(i) 若 $T \in L(H)$ 是正规算子，则

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\langle Tx, x\rangle|, \tag{5.5.20}$$

存在极分解 $T = RU$，$R \geqslant 0$，U 是 U 算子(对照例 5.4.2(iii))；

(ii) 若 $T \in L(H)$ 是自伴算子，则

$$\begin{cases} \max \sigma(T) = \sup\limits_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle, \\ \min \sigma(T) = \inf\limits_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle. \end{cases} \tag{5.5.21}$$

证　(i) 以β记式(5.5.20)右端. 为证式(5.5.20)，只要证 $\forall \varepsilon > 0$，有 $x \in H$，$\|x\| = 1$，使 $\|T\| \leqslant |\langle Tx, x\rangle| + \varepsilon$. 取 $\lambda_0 \in \sigma(T)$ 使 $\|T\| = |\lambda_0|$. 令 $B = \sigma(T) \cap D_\varepsilon(\lambda_0)$，则$P(B) \neq 0$(由定理 5.5.1(iii))，因而有 $x \in R(P(B))$，使 $\|x\| = 1$. 令$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)\xi_B$，则$f(T) = (T - \lambda_0 I)P(B)$，$f(T)x = Tx - \lambda_0 x$，$\|f(T)\| \leqslant \|f\|_0 \leqslant \varepsilon$. 于是

$$\begin{aligned} |\langle Tx, x\rangle| &\geqslant |\langle \lambda_0 x, x\rangle| - |\langle f(T)x, x\rangle| \\ &\geqslant |\lambda_0| - \|f(T)\| \geqslant \|T\| - \varepsilon. \end{aligned}$$

T 的极分解由 λ 的极分解 $\lambda = |\lambda| \varphi(\lambda)$ 得出，约定 $\varphi(0) = 1$.

(ii) 只要考虑 $\max \sigma(T)$(否则以 $-T$取代T). 可设$\langle Tx, x\rangle \geqslant 0$(否则以 $T + bI$ 取代 T，$b > 0$ 适当大)，于是结论直接由式(5.5.20)得出. □

定义 5.5.2　设 X 是一复 Banach 空间，$T \in L(X)$，$T_\lambda = \lambda I - T$. 令

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: N(T_\lambda) = \{0\}, \overline{R(T_\lambda)} = X, T_\lambda^{-1} \text{ 无界}\}, \tag{5.5.22}$$

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: N(T_\lambda) = \{0\}, \overline{R(T_\lambda)} \neq X\}, \tag{5.5.23}$$

二者分别称为 T 的连续谱与剩余谱. 若 $T \in L(H)$ 是正规算子，P 是 T 的谱族，令

$$\sigma_e(T) = \{\lambda \in \sigma(T): \text{任给} \lambda \text{ 在} \sigma(T) \text{ 中的开邻域 } U, \text{有} \dim R(P(U)) = \infty\}, \tag{5.5.24}$$

称 $\sigma_e(T)$ 为 T 的本质谱,称 $\sigma_d(T) \triangleq \sigma(T)\backslash\sigma_e(T)$ 为 T 的离散谱.

在定义5.2.1中已定义点谱 $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: N(T_\lambda) \neq \{0\}\}$. 因此,对于正规算子 $T \in L(H)$ 有分解

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T) = \sigma_e(T) \cup \sigma_d(T).$$

对于 $\sigma_p(T)$,$\sigma_c(T)$ 等的精细描述,谱分解定理能发挥重要作用.

定理5.5.4 设 $T \in L(H)$ 是一正规算子, P 是其谱族, 则以下结论成立:

(i) $R(P(\{\lambda_0\})) = N(\lambda_0 I - T)$. 因此,$\lambda_0 \in \sigma_p(T) \Leftrightarrow P(\{\lambda_0\}) \neq 0$. 若 λ_0 是 $\sigma(T)$ 的孤立点,则 $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$;

(ii) $\sigma_r(T) = \varnothing$;

(iii) 设 $\lambda_0 \in \sigma(T)$,则 $\lambda_0 \in \sigma_e(T) \Leftrightarrow \lambda_0$ 是 $\sigma(T)$ 是聚点或 $\dim N(\lambda_0 I - T) = \infty$;

(iv) 若 $\sigma(T) = \{\lambda_i: i \in \mathbb{N}\}$,则每个 $x \in H$ 有唯一分解 $x = \sum x_i, Tx_i = \lambda_i x_i (i \in \mathbb{N})$, 且 $\{x_i\}$ 是一正交系.

证 为记号简便,以下约定 $P_0 = P(\{\lambda_0\})$,$T_0 = \lambda_0 I - T$.

(i) 令 $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)\xi_{\{\lambda_0\}}(\lambda)$,则 $f(\lambda) \equiv 0$,这推出 $T_0 P_0 = 0$,因而 $R(P_0) \subset N(T_0)$. 另一方面, $\forall \varepsilon > 0$,定义

$$f_\varepsilon(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{-1}[1 - \xi_{D_\varepsilon(\lambda_0)}(\lambda)],$$

则当 $\varepsilon \to 0^+$ 时 $(\lambda - \lambda_0)f_\varepsilon(\lambda) \to 1 - \xi_{\{\lambda_0\}}(\lambda)$. 于是由定理5.5.2(iii)有

$$f_\varepsilon(T)T_0 x \to P_0 x - x, \quad \varepsilon \to 0^+,$$

这推出 $N(T_0) \subset R(P_0)$. 故得 $R(P_0) = N(T_0)$.

(ii) 若有 $\lambda_0 \in \sigma_r(T)$,则 $\{0\} \neq R(T_0)^\perp = N(T_0^*)$,这推出 $\bar{\lambda}_0 \in \sigma_p(T^*)$. 于是由已证的(i)有 $Q(\{\bar{\lambda}_0\}) \neq 0$,$Q$ 是 T^* 的谱族. 因可指明 $Q(\{\bar{\lambda}_0\}) = P(\{\lambda_0\})$,故得 $P_0 \neq 0$,$\lambda_0 \in \sigma_p(T)$,得出矛盾. 因此 $\sigma_r(T) = \varnothing$.

(iii) 首先设 λ_0 是 $\sigma(T)$ 的孤立点且 $\dim N(T_0) < \infty$,则 $U = \{\lambda_0\}$ 就是 λ_0 在 $\sigma(T)$ 中的开邻域, 由(i)有 $\dim R(P(U)) = \dim N(T_0) < \infty$,可见 $\lambda_0 \notin \sigma_e(T)$.

其次, 设 U 是 λ_0 在 $\sigma(T)$ 中任一开邻域. 若 λ_0 是 $\sigma(T)$ 的聚点,则有 $\{\lambda_n\} \subset \sigma(T)$,使 $\lambda_n \to \lambda_0$,可设 λ_n 互异,$\{\lambda_n\} \subset U$. 依次取 λ_n 在 $\sigma(T)$ 中的开邻域 V_n,使 $V_n \subset U$ 且 V_n 互不相交. 令 $P_n = P(V_n)$,$P = P(U)$,则 $R(P_n) \subset R(P)$ 且当 $m \neq n$ 时 $R(P_m) \perp R(P_n)$. 这就得出 $\dim R(P(U)) \geqslant \sum \dim R(P_n) = \infty$,因而 $\lambda_0 \in \sigma_e(T)$.

若 $\dim N(T_0) = \infty$,则直接有

$$\dim R(P(U)) \geqslant \dim R(P_0) = \dim N(T_0) = \infty,$$

故同样有 $\lambda_0 \in \sigma_e(T)$.

(iv) 令 $P_i = P(\{\lambda_i\})$,$x \in H$,$x_i = P_i x$,则 $\{x_i\}$ 是一正交系;由 $B \to P(B)x$ 为 H

值测度推出 $x = \sum x_i$. 由(i)推出 $Tx_i = \lambda_i x_i$, 唯一性由 $\{x_i\}$ 为正交系推出. □

下面给出紧正规算子的谱分解,它具有特别简单的形式. 首先建立某些预备结果,其中, 第一个就是虽然简单但很有名的 **Riesz 引理**.

引理 5.5.1 设 A 是赋范空间 X 的闭子空间, $A \neq X$, 则存在 $x \in X$, 使得 $\|x\| = 1, d(x,A) \geqslant 1/2$.

证 取 $y \in A^c, a \in A$, 使 $\|y-a\| < 2d(y,A)$, 则 $x \triangleq (y-a)/\|y-a\|$ 即符合引理的要求. □

引理 5.5.2 设 X 是一 Banach 空间, $T \in CL(X), T_1 = I - T$, 则 $R(T_1)$ 是闭的; $R(T_1) = X \Leftrightarrow N(T_1) = \{0\} \Leftrightarrow T_1 \in \mathrm{GL}(X)$.

证 (i) 证 $R(T_1)$ 闭. 设 $T_1 x_n \to x (n \to \infty)$. 若 $\{x_n\}$ 有界, 则不妨设 $Tx_n \to y$, 因而 $x_n \to x + y$, 这推出 $x = T_1(x+y) \in R(T_1)$. 若 $\{x_n\}$ 无界, 取 $y_n \in N(T_1)$, 使 $\rho_n \triangleq d(x_n, N(T_1)) \leqslant \|x_n - y_n\| \leqslant \rho_n(1+n^{-1})$, 今证 ρ_n 有界(如此则可用 $x_n - y_n$ 代 x_n 同样得出 $x \in R(T_1)$). 反设 ρ_n 无界, 不妨设 $\rho_n \to \infty$. 令 $z_n = (x_n - y_n)/\|x_n - y_n\|$, 则 $T_1 z_n \to 0$. 由 z_n 有界与 T 的紧性推出有子列 $\{z_{n_k}\}$, 使得 $z_{n_k} = (T + T_1) z_{n_k} \to z \in N(T_1)$, 但这矛盾于以下不等式:

$$\rho_{n_k} \leqslant \|x_{n_k} - (y_{n_k} + \|x_{n_k} - y_{n_k}\| z)\| \leqslant \rho_{n_k}(1 + n_k^{-1}) \|z_{n_k} - z\|.$$

(ii) 设 $R(T_1) = X$, 证 $N(T_1) = \{0\}$. 若有 $0 \neq x_1 \in N(T_1)$, 则由 $R(T_1) = X$ 有 $x_1 = T_1 x_2 = T_1^2 x_3 = \cdots = T_1^{n-1} x_n = \cdots$, 从而 $x_n \in N(T_1^n) \backslash N(T_1^{n-1}) (n > 1)$. 由引理5.5.1, 有 $y_n \in N(T_1^n)$, 使得 $\|y_n\| = 1, d(y_n, N(T_1^{n-1})) \geqslant 1/2 (n > 1)$. 设 $m > n > 1$, 则 $T_1^{m-1}(T_1 y_m + T y_n) = 0$, 于是

$$\|Ty_m - Ty_n\| = \|y_n - (T_1 y_m + T y_n)\| \geqslant \frac{1}{2},$$

但这与 $\{Ty_n\}$ 有收敛子列矛盾. 故必 $N(T_1) = \{0\}$.

(iii) 设 $N(T_1) = \{0\}$, 证 $R(T_1) = X$. 因 $R(T_1)$ 闭, 故有拓扑同构 $T_1: X \cong R(T_1)$, 因而 $R(T_1^*) = X^*$ (由定理 1.6.10). 因 $T^* \in CL(X^*)$ (由定理 1.6.11), 故由第(ii)步有 $N(T_1^*) = \{0\}$, 因而 $R(T_1) = X$ (由命题 1.6.3). □

定理 5.5.5 设 X 是一复 Banach 空间, $T \in CL(X)$. 若 $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$, 则 $\lambda \in \sigma_p(T)$, $\dim N(\lambda I - T) < \infty$, $\sigma(T)$ 没有非零聚点, 因此必为可数集.

证 不妨设 $1 \in \sigma(T)$ (否则以 $\lambda^{-1} T$ 代 T), 则 $1 \in \sigma_p(T)$, 否则由引理5.5.2推出 $T_1 = I - T \in \mathrm{GL}(X)$. 因 $B_1(0) \cap N(T_1) = T(B_1(0) \cap N(T_1))$ 相对紧, 故必 $\dim N(T_1) < \infty$ (由定理 1.3.9).

设 $0 \neq \lambda_n \to \lambda, \lambda_n \in \sigma(T)$ 互不相同, 令 $T_n = \lambda_n I - T$. 取 $0 \neq x_n \in N(T_n)$, 则可归纳地证明 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} (n \in \mathbb{N})$ 线性无关. 令 $X_n = \mathrm{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. 由引理 5.5.1, 有 $y_n \in X_n$, 使得 $\|y_n\| = 1, d(y_n, X_{n-1}) \geqslant 1/2 (n > 1)$. 于是当 $m > n$ 时, 有

$$\| Ty_m - Ty_n \| = \| \lambda_m y_m - (T_m y_m + Ty_n) \| \geqslant \frac{|\lambda_m|}{2}.$$

因 $\{Ty_n\}$ 含收敛子列,故必 $\lambda = 0$. □

作了以上准备之后,现在已可建立如下基本结果:

定理 5.5.6 设 $0 \neq T \in L(H)$,T 是正规的.

(i) 若 $T \in CL(H)$,则

$$T = \sum_n \lambda_n P_n, \tag{5.5.25}$$

$$\| Tx \|^2 = \sum_n |\lambda_n|^2 \| P_n x \|^2, \quad x \in H, \tag{5.5.26}$$

其中,$\{\lambda_n\} = \sigma(T) \setminus \{0\}$,$P_n$ 是正投影算子,$R(P_n) = N(\lambda_n I - T)$,式(5.5.25)依算子范数收敛;

(ii) 若 $\sigma(T)$ 无非零极限点,当 $\lambda \neq 0$ 时 $\dim N(\lambda I - T) < \infty$,则 $T \in CL(H)$.

证 (i) 因 $r_\sigma(T) = \| T \| > 0$,故 $\sigma(T) \setminus \{0\} \neq \varnothing$. 由定理 5.5.5,可设 $\sigma(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_n\}$,不妨设 $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots, \lambda_n \to 0$. 设 P 是 T 的谱族,令 $P_n = P(\{\lambda_n\})$,$f(\lambda) = \lambda$,φ_n 是 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ 的特征函数,$f_n = f\varphi_n$. 则由定理 5.5.1 有

$$\left\| T - \sum_{j=1}^n \lambda_j P_j \right\| = \| f(T) - f_n(T) \| \leqslant \| f - f_n \|_0 \to 0, \quad n \to \infty,$$

这表明式(5.5.25)成立. 因 $m \neq n$ 时 $R(P_m)$ 与 $R(P_n)$ 互相正交,故

$$\| Tx \|^2 = \left\| \sum_n \lambda_n P_n x \right\|^2 = \sum_n |\lambda_n|^2 \| P_n x \|^2,$$

这得出式(5.5.26). 由定理 5.5.4(i)有 $R(P_n) = N(\lambda_n I - T)$.

(ii) 设 λ_n 与 P_n 依(i)之证,则仍有式(5.5.25). 由 $\dim R(P_n) < \infty$ 推出 $P_n \in CL(H)$,因而 $T \in CL(H)$(由定理 1.5.4). □

第 6 章　Fourier 分析

在微积分学中,Fourier 级数问题构成一个独具特色的篇章. 一方面,它所处理的问题(如 Fourier 级数的收敛性)已经如此复杂,仅仅运用传统的微积分方法难以获得有效解决,对于新分析工具的需求几乎呼之欲出. 另一方面,处理 Fourier 级数时所提出的一些概念与方法(如正交函数系概念),有力地催生着一些富有生命力的数学理论. 正是与 Fourier 级数问题有关的研究的需要,促成了 Lebesgue 积分论的诞生,并推动了整个实分析的发展. 而实分析方法的改进与成熟,又促成了包括 Fourier 级数、Fourier 积分问题在内的内容丰富的近代 Fourier 分析理论的形成. 随着抽象空间方法在近代分析数学中越来越占有支配地位,Fourier 分析也越来越具有更一般的空间构架与理论形式,以至发展成抽象群上的调和分析. Fourier 分析被公认为是近代分析数学中最优美的部分之一,而且具有广泛的应用,在本书中占有一章的篇幅是理所当然的.

与前面几章比较,Fourier 分析的论题似乎稍欠明晰,而且在其历史演进中历经剧烈变动. 不过,还是可以说出一个大致线索. 首先,Fourier 分析力图求得一定类型函数按某个标准函数系 $\{\varphi_\xi : \xi \in G\}$ 的分解,而 Fourier 级数与 Fourier 积分正是这种分解的原型与主要样本. 要实现上述分解,就不能不研究 Fourier 变换及其种种推广. 所有这些问题都需要在一定函数空间上考虑并涉及大量的算子,因而对于特定函数空间与算子的研究在 Fourier 分析中占有越来越重要的地位. 而以上所有课题都有赖于一个共同的工具——平移不变积分. 借助于这种积分而进行的种种移动平均,乃是 Fourier 分析中达到各种目的的有效手段,也是充分发掘对称性的种种优美结果的源泉.

在本章中, G 总表示某个给定的 σ 紧的局部紧交换群,E 记给定的复 Banach 空间, $\mathbb{T}^n$ 记 n 重环面, $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ 等均表示 n 维 Lebesgue 测度. 如在第 3 章一样,对任何 E 值函数 f, 以 $|f|$ 记绝对值函数 $\|f(x)\|$.

严格地说,唯有在广义函数层次上,Fourier 分析理论才得以达到应有的完备. 但广义函数这一课题太大,只能在下章中单独处理.

6.1　不 变 积 分

“不变积分”这一标题,初看起来似乎远离 Fourier 变换一类的问题. 但实际上, Fourier 分析的基本结论正是以平移不变积分为基础的. 说到“平移不变性”,自然

离不开一定的群结构. 为叙述简便,不能不限制一下对象的一般性,仅考虑交换群上的不变积分,有关它的结论更具直观上的明晰性,处理方法也不至于过繁.

首先定义拓扑群,它是一个很简单的概念.

定义 6.1.1 设 G 满足以下条件:

(i) G 是一个加群,这意味着在 G 上定义了一个加法运算

$$G\times G\to G,\quad (x,y)\to x+y,$$

它满足结合律 $x+(y+z)=(x+y)+z$ 与交换律 $x+y=y+x(x,y,z\in G)$. 存在一个零元 $0\in G$,使得 $x+0=x(\forall x\in G)$. 每个元 $x\in G$ 有一负元 $-x$,使得 $x+(-x)=0$,因而在 G 中可定义减法 $x-y=x+(-y)(x,y\in G)$;

(ii) G 是一个 Hausdorff 拓扑空间;

(iii) 群运算连续,即 $G\times G\to G,(x,y)\to x-y$ 为连续映射,

则称 G 为一个拓扑加群,简称为**拓扑群**.

拓扑群 G 中的唯一运算称作加法,并不是实质问题,仅为了习惯与方便. 将其改称为乘法,对记号与术语也作相应调整,拓扑群概念依然有效. 不过,运算的交换性是一个本质性条件. 非交换拓扑群是一个更复杂的课题,本书并不涉及.

以下设 G 是给定的局部紧拓扑加群. 任给 $A,B\subset G,a\in G$,约定

$$A+B=\{a+b: a\in A,b\in B\},$$

$$a+B=\{a+b: b\in B\},\quad -A=\{-a: a\in A\}.$$

以 $\mathscr{B}$ 记 G 中的 Borel 集族. G 中零元 0 的邻域称为 0 邻域, 若 0 邻域 V 满足 $V=-V$,则称 V 为对称 0 邻域. 任给 0 邻域 U, $V=U\cap(-U)$ 就是一个对称 0 邻域. 定义映射

$$\tau_a: G\to G,\quad x\to x+a^{①},\tag{6.1.1}$$

$$J: G\to G,\quad x\to -x,\tag{6.1.2}$$

其中, $a\in G$ 是给定的. 二者分别称为 G 上的平移与反射,它们都是 G 到自身的同胚. 因此,若 $A\subset G$ 是开集(或闭集、紧集),则 $a+A$ 与 $-A$ 亦为开集(或闭集、紧集). 此外,若 $A,B\subset G$ 是紧集,则 $A\pm B$ 必为紧集. 这些事实是基本而重要的.

定义 6.1.2 设 μ 是 G 上的一个正则测度(由定义 3.4.1), $\mu G>0$ 且 μ 平移不变,即 $\mu(a+A)=\mu A(a\in G,A\in\mathscr{B})$,则称 μ 为 G 上的 **Haar 测度**.

以下例子虽近平凡,但无疑是最常用的.

例 6.1.1 (i) $\mathbb{R}^n$ 依通常的向量加法与通常拓扑是一个拓扑加群,而且是 σ 紧的局部紧群. n 维 Lebesgue 测度 m 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 Haar 测度(见定理 3.6.1).

(ii) $\mathbb{Z}^n$ 看成 $\mathbb{R}^n$ 的子群是一个拓扑加群且也是 σ 紧的局部紧群, $\mathbb{Z}^n$ 上的计数测度 μ 是 Haar 测度.

---

① 有些著作规定 $\tau_a x=x-a$.

(iii) $\mathbb{T}^n$ 看成$\mathbb{S}^1$ 的 n 重积显然是一个紧 Hausdorff 空间. 至于 $\mathbb{T}^n$ 中的群运算,可理解为$\mathbb{R}^n$ 中的等价类的加法. 对 $x,y \in \mathbb{R}^n$,规定

$$x \sim y \Leftrightarrow x_j \equiv y_j (\bmod 2\pi), \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

于是 $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \sim$ (由定义 1.4.2), $\mathbb{T}^n$ 依加法

$$\tilde{x} + \tilde{y} = \widetilde{x+y}, \quad x,y \in \mathbb{R}^n$$

是一紧的拓扑加群. 直观上,不妨就将 $\mathbb{T}^n$ 理解为$\mathbb{R}^n$ 中经平移可与$[-\pi,\pi]^n$ 相合的任何 n 维方体且以$[-\pi,\pi]^n$ 为其代表,$[-\pi,\pi]^n$ 上的 Lebesgue 测度 m 就是$\mathbb{T}^n$ 上的 Haar 测度,注意 $m\mathbb{T}^n = (2\pi)^n$.

再回到一般的拓扑加群, 本章需要以下基本结论:

定理 6.1.1　任何局部紧群 G 上均存在 Haar 测度, 且如不计常数因子的差别时是唯一的.

这一意义重大的结论是 Haar 于 1933 年发现的,它为现代调和分析的诞生奠定了基础. 定理的证明与本章内容无直接关联,可参见文献(Folland, 1984). 本章假定 G 是 σ 紧的,以确保 Haar 测度为 σ 有限,从而可放心地引用第 3 章的一些结果(如 Fubini 定理),而这就带来很大方便. 在本章中,只要提到某个局部紧加群 G 及其上的测度μ,总无例外地认定μ 为 Haar 测度. 对于 $G = \mathbb{R}^n,\mathbb{Z}^n,\mathbb{T}^n$ 这 3 种情况,选定的 Haar 测度μ 总如例 6.1.1 中所述.

G 上的 Haar 测度必定密切地关联着 G 的拓扑结构,以下结论部分地说明了这一点:

命题 6.1.1　对任何非空开集 $U \subset G$,有$\mu U > 0$; $\mu G < \infty \Leftrightarrow G$ 是紧的.

证　由$\mu G > 0$ 与正则性,必有紧集 $K \subset G$,使得$\mu K > 0$. 若 $U \subset G$ 是非空开集,则$\{a + U: a \in G\}$ 是 K 的开覆盖. 取有限子覆盖$\{a_i + U: 1 \leqslant i \leqslant n\}$,则

$$0 < \mu K \leqslant \sum_i \mu(a_i + U) = n\mu U,$$

这得出$\mu U > 0$. 若$\mu G < \infty$, 则有最大的 $n \in \mathbb{N}$,使得存在 $b_i \in G, b_i + K (1 \leqslant i \leqslant n)$ 互不相交. $\forall x \in G, x + K$ 必与某个 $b_i + K$ 有公共点 y. 于是

$$x \in y - K \subset b_i + K - K,$$

这推出 $G = \bigcup\limits_1^n (b_i + K - K)$. 因 $K - K$ 是紧集,故 G 是紧的. 反之,若 G 是紧群,则由μ 的正则性,必定$\mu G < \infty$. □

G 中点的平移与反射诱导出函数的平移与反射. 约定

$$f_a(x) = f(x + a), \quad \check{f}(x) = f(-x), \quad a,x \in G, \tag{6.1.3}$$

其中, f 是定义在 G 上的函数. f_a 也写作 $\tau_a f$. 现在考虑本节的中心问题:在由式(6.1.3)所给出的变量代换下,关于 Haar 测度的积分将如何改变? 正如本节标题所预示的,我们将得到如下的"不变积分"结论:

定理 6.1.2 设$f \in L^1(G,E,\mu)$, $a \in G$,则成立

$$\int_G f_a \mathrm{d}\mu = \int_G f \mathrm{d}\mu, \tag{6.1.4}$$

$$\int_G \check{f} \mathrm{d}\mu = \int_G f \mathrm{d}\mu. \tag{6.1.5}$$

证 (i) 证式(6.1.4). 直接用μ的平移不变性易看出,当f是简单函数时式(6.1.4)成立. 继而用 Levi 定理推出,当f是非负可测函数时式(6.1.4)成立. 下面考虑一般情况. $\forall \varepsilon > 0$,取简单函数g,使$\|f - g\|_1 < \varepsilon$(由定理3.5.1(i)),则

$$\begin{aligned} &\left\| \int_G f_a \mathrm{d}\mu - \int_G f \mathrm{d}\mu \right\| \\ \leqslant &\left\| \int_G f_a \mathrm{d}\mu - \int_G g_a \mathrm{d}\mu \right\| + \left\| \int_G g \mathrm{d}\mu - \int_G f \mathrm{d}\mu \right\| \\ \leqslant &\|f_a - g_a\|_1 + \|g - f\|_1 < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

其中,对非负函数$|f - g|$用了积分平移不变性. 可见式(6.1.4)成立.

(ii) 证式(6.1.5),这基于 Riesz 表示定理3.4.3与定理6.1.1. 定义

$$L(f) = \int_G \check{f} \mathrm{d}\mu, \quad f \in C_c(G),$$

直接看出L是一正线性泛函,因而有G上的正则测度ν,使得

$$L(f) = \int_G f \mathrm{d}\nu, \quad f \in C_c(G).$$

这结合$(f_a)^\vee = (\check{f})_a$得出

$$\int_G f_a \mathrm{d}\nu = \int_G f \mathrm{d}\nu, \quad f \in C_c(G), a \in G,$$

这结合式(3.4.4)与式(3.4.5)得出ν为 Haar 测度. 由定理6.1.1,必有正常数c,使$\nu = c\mu$,因而

$$\int_G \check{f} \mathrm{d}\mu = c\int_G f \mathrm{d}\mu, \quad f \in C_c(G).$$

利用$f^{\vee\vee} = f$,反复利用上式得到

$$\int_G f \mathrm{d}\mu = c^{2n}\int_G f \mathrm{d}\mu, \quad f \in C_c(G), n \in \mathbb{N}.$$

若$c \neq 1$,则令$n \to \infty$推出$\int_G f \mathrm{d}\mu = 0(\forall f \in C_c(G))$. 另一方面,由定理1.3.6必有非空的相对紧开集$U \subset G$及$0 \leqslant f \in C_c(G)$,使得$f|U = 1$. 于是

$$0 = \int_G f \mathrm{d}\mu \geqslant \int_U f \mathrm{d}\mu = \mu U,$$

这与命题6.1.1矛盾. 因此必$c = 1$,故当$f \in C_c(G)$时式(6.1.5)成立. 这一事实结合式(3.4.4),式(3.4.5)得出$\mu(-A) = \mu A(A \in \mathscr{B})$. 然后沿用证式(6.1.4)的路线,即可证得当$f \in L^1(G,E,\mu)$时式(6.1.5)成立. □

综上所述,对于局部紧群 G,在平移与反射变换下以下三者均保持不变:G 上的拓扑结构、G 上的 Haar 测度及 G 上关于 Haar 测度的积分. 这种不变性使得群结构所具有的对称性优势得以充分发挥,因而导向优美而深刻的分析理论. 能畅通无阻地运用变量代换公式(6.1.4)与式(6.1.5)的好处,本章中将有足够多的体验机会. 不过也应注意,式(6.1.4)与式(6.1.5)得以成立,μ 是 Haar 测度与积分取在 G 上(而不是 G 的某个子集上)这两者都是重要的.

以下定理在本章中将起基本作用.

定理 6.1.3　设 $f \in C_0(G,E)$, $g \in L^p(G,E,\mu)$ $(1 \leqslant p < \infty)$,则

$$\lim_{a \to 0} \| f_a - f \|_0 = 0, \tag{6.1.6}$$

$$\lim_{a \to 0} \| g_a - g \|_p = 0. \tag{6.1.7}$$

式(6.1.6)的准确含义是: $\forall \varepsilon > 0$,存在 G 的 0 邻域 V,使得

$$\| f_a - f \|_0 < \varepsilon, \quad \forall a \in V,$$

式(6.1.7)的意义类似. 今后用到类似极限式时将不再解释. 一般地,若 $K \subset G$,

$$\lim_{a \to 0} \| f_a - f \|_K = 0 \tag{6.1.8}$$

(记住本书总约定 $\| f \|_K = \| f | K \|_0$),则说 f 在 K 上一致连续. 式(6.1.6) 正表明 f 在 G 上一致连续,这相当于 $\forall \varepsilon > 0$,存在 G 的 0 邻域 V,当 $x - y \in V(x, y \in G)$ 时 $\| f(x) - f(y) \| < \varepsilon$. 当 $G = \mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{T}^n$ 时,这就是通常的一致连续.

证　(i) 证式(6.1.6). 任给 $\varepsilon > 0$. 取紧集 $K \subset G$,使 $\| f \|_{K^c} < \varepsilon/2$. 取 G 的紧 0 邻域 A,令 $B = K + A$,则 B 是紧集且 $K \subset B$. 令

$$W = \{ (a, x) \in G \times G : \| f_a(x) - f(x) \| < \varepsilon \},$$

则 W 是开集, $\{0\} \times B \subset W$. 于是有 0 邻域 U,使得 $U \times B \subset W$. 令 $V = U \cap (-A)$,则 V 是一个 0 邻域. 取定 $a \in V$. 若 $x \in B$,则 $(a, x) \in W$, $\| f_a(x) - f(x) \| < \varepsilon$. 若 $x \in B^c$, 则必 $x, a + x \in K^c$,因而 $\| f_a(x) - f(x) \| \leqslant 2 \| f \|_{K^c} < \varepsilon$. 综上得 $\| f_a - f \|_0 < \varepsilon$,这表明式(6.1.6) 成立.

(ii) 证式(6.1.7). 任给 $\varepsilon > 0$. 取 $f \in C_c(G,E)$,使 $\| f - g \|_p < \varepsilon$(由定理 3.5.1). 令 $K = \operatorname{supp} f$,取 G 的紧 0 邻域 A,令 $B = K + A$. 由已证的式(6.1.6),有 G 的 0 邻域 V,使得 $\forall a \in V$ 有 $\| f_a - f \|_0^p < \varepsilon^p / \mu B$,可设 $V = -V \subset A$. 取定 $a \in V$,则

$$\| f_a - f \|_p^p = \int_B \| f_a(x) - f(x) \|^p \mathrm{d}\mu \leqslant \varepsilon^p.$$

于是

$$\| g_a - g \|_p \leqslant \| g_a - f_a \|_p + \| f_a - f \|_p + \| f - g \|_p < 3\varepsilon,$$

其中用了式(6.1.4). 这表明式(6.1.7)成立. □

6.2　卷　积

设 G 是给定的 σ 紧的局部紧加群,μ 是 G 上的 Haar 测度, E 是一个给定的复

Banach 空间. 本节及今后都记 $L^p(G,E,\mu)$ 为 $L^p(G,E)$,令 $L^p(G) = L^p(G,\mathbb{C})(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. 在积分记号 $\int_G$ 中均省去 G.

任给一对函数 $f: G \to E$ 与 $g: G \to \mathbb{C}$,令

$$(f*g)(x) = \int f(x-y)g(y)\mathrm{d}\mu(y). \tag{6.2.1}$$

若以上积分对几乎所有 $x \in G$ 存在,因而函数 $f*g$ 在 G 上几乎处处有定义,则称 $f*g$ 为 f 与 g 的**卷积**. 利用式(6.1.4) 与式(6.1.5),可将式(6.2.1) 变换为

$$(f*g)(x) = \int f(y)g(x-y)\mathrm{d}\mu(y),$$

因而不妨认为 $f*g = g*f$[①].

若取 $G = \mathbb{T}^1$,f 与 g 是 $\mathbb{R}$ 上的连续 2π 周期函数,$P = \{y_i\}$ 是区间 $[-\pi,\pi]$ 的一个充分细的分划,则

$$(f*g)(x) \approx \sum_i f(y_i)(\tau_{-y_i}g)(x)\Delta y_i.$$

可见 $f*g$ 是一个加权的移动平均. 任何平均都倾向于改善函数,而这正是卷积概念的本质优势所在.

对于确立卷积的存在性与进行估计,以下结果是基本的:

定理 6.2.1 设 $f \in L^p(G,E)$, $g \in L^q(G)$, $r^{-1} = p^{-1} + q^{-1} - 1$, $p,q,r \in [1,\infty]$, 则 $h = f*g$ 存在, $h \in L^r(G,E)$ 且成立如下 **Hausdorff-Young 不等式**:

$$\| f*g \|_r \leqslant \| f \|_p \| g \|_q. \tag{6.2.2}$$

若 $r = \infty (\Leftrightarrow p^{-1} + q^{-1} = 1)$,则 h 在 G 上一致连续,这意味着

$$\lim_{a \to 0} \| h_a - h \|_0 = 0. \tag{6.2.3}$$

证 (i) 首先考虑 $r = \infty$. 取定 $x \in G$, 由推论 3.2.2(i), $\check{f}_x g: G \to E$ 是可测函数. 由 Hölder 不等式及定理 6.1.2 有

$$\int |\check{f}_x| |g| \mathrm{d}\mu \leqslant \| f \|_p \| g \|_q,$$

这推出 $h(x) = (f*g)(x)$ 由式(6.2.1)在 G 上处处有定义且 $\| h(x) \| \leqslant \| f \|_p \| g \|_q$. 这表明当 $r = \infty$ 时式(6.2.2) 成立. 不妨设 $p < \infty$,于是

$$\| h_a - h \|_0 = \| (f_a - f) * g \|_0 \leqslant \| f_a - f \|_p \| g \|_q,$$

这就可用式(6.1.7)推出式(6.2.3)成立. 由 h 连续推出 $\| h \|_\infty = \| h \|_0$.

(ii) 设 $r < \infty$. 此时必 $p,q < \infty$, $s \triangleq 1 - p/r \in [0,1)$. 由 Hölder 不等式有

$$\varphi(x) \triangleq \int \| f(x-y)g(y) \| \mathrm{d}\mu(y)$$

---

① 任给 $\alpha \in \mathbb{C}, y \in E$,并不区别 αy 与 $y\alpha$,因而也不区别 gf 与 fg.

$$= \int \|f(x-y)\|^s[\|f(x-y)\|^{1-s}|g(y)|]\mathrm{d}\mu(y)$$

$$\leqslant \left[\int \|f(x-y)\|^p \mathrm{d}\mu(y)\right]^{s/p}\left[\int \|f(x-y)\|^{q(1-s)}|g(y)|^q \mathrm{d}\mu(y)\right]^{1/q}$$

$$= \|f\|_p^s\left[\int F(y)(x)\mathrm{d}\mu(y)\right]^{1/q},$$

其中，

$$F: G \to L^{r/q}(G), \quad y \to |\tau_{-y}f|^{q(1-s)}|g(y)|^q.$$

利用将在下面补证的引理 6.2.1 得

$$\|\varphi\|_r \leqslant \|f\|_p^s\left\{\int\left[\int F(y)(x)\mathrm{d}\mu(y)\right]^{r/q}\mathrm{d}\mu(x)\right\}^{1/r}$$

$$= \|f\|_p^s\left\|\int F(y)\mathrm{d}\mu(y)\right\|_{r/q}^{1/q}$$

$$\leqslant \|f\|_p^s\left[\int \|F(y)\|_{r/q}\mathrm{d}\mu(y)\right]^{1/q}$$

$$= \|f\|_p^s\left\{\int\left[\int |F(y)(x)|^{r/q}\mathrm{d}\mu(x)\right]^{q/\gamma}\mathrm{d}\mu(y)\right\}^{1/q}$$

$$= \|f\|_p^s\left\{\int\left[\int \|f(x-y)\|^{r(1-s)}|g(y)|^r\mathrm{d}\mu(x)\right]^{q/r}\mathrm{d}\mu(y)\right\}^{1/q}$$

$$= \|f\|_p^s\|f\|_p^{p/r}\|g\|_q = \|f\|_p\|g\|_q,$$

这推出 $h = f*g$ 有定义且 $\|h\|_r \leqslant \|\varphi\|_r \leqslant \|f\|_p\|g\|_q$, 如所要证. □

要补证的引理如下：

引理 6.2.1　设 (Ω,μ) 与 (Γ,ν) 是两个 σ 有限测度空间, $F \in L^1(\Gamma, L^p(\Omega))$, $1 \leqslant p < \infty$, 则

$$\left(\int_\Gamma F(y)\mathrm{d}\nu(y)\right)(x) = \int_\Gamma F(y)(x)\mathrm{d}\nu(y), \quad \mu\text{-a. e.}. \tag{6.2.4}$$

证　令 $q = p/(p-1)$. 任给 $v \in L^q(\Omega)$, 令

$$T_v u = \int_\Omega u(x)v(x)\mathrm{d}\mu, \quad \mu \in L^p(\Omega),$$

则 $T_v \in L^p(\Omega)^*$ (由定理 3.5.2). 于是

$$\int_\Omega v(x)\left(\int_\Gamma F(y)\mathrm{d}\nu(y)\right)(x)\mathrm{d}\mu(x)$$

$$= T_v\int_\Gamma F(y)\mathrm{d}\nu(y) = \int_\Gamma T_v F(y)\mathrm{d}\nu(y)$$

$$= \int_\Gamma \mathrm{d}\nu(y)\int_\Omega F(y)(x)v(x)\mathrm{d}\mu(x)$$

$$= \int_\Omega v(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\int_\Gamma F(y)(x)\,\mathrm{d}\nu(y),$$

其中用了式(3.2.4)与 Fubini 定理. 由 v 的任意性,得出式(6.2.4)成立. □

卷积之所以能成为一个有明显优势的分析工具,主要基于以下事实:$f*g$ 往往继承了每个因子的"最好的"性质,而这又常常表现为只要 f 与 g 取自适当的函数类,$f*g$ 就属于某个"充分好"的函数类,且映射 $(f,g)\to f*g$ (下面以 $*$ 记此映射)具有一定意义的连续性. 下面给出的 3 个定理分别表明,映射 $*$ 在一定意义上能保持 p 次可积性、光滑性与有界变差性,这些结论通常为应用所需又难为其他分析运算所具有,因而特别值得重视

定理 6.2.2　设 $1\leqslant p<\infty$,则有连续双线性算子

$$*: L^p(G,E)\times L^1(G)\to L^p(G,E), \tag{6.2.5}$$

$$*: L^1_{\mathrm{loc}}(G,E)\times L^p_c(G)\to L^p_{\mathrm{loc}}(G,E), \tag{6.2.6}$$

$$*: L^\infty(G,E)\times L^1(G)\to C_b(G,E), \tag{6.2.7}$$

其中,$L^p_c(G)$ 看成 $L^p(G)$ 的子空间.

证　任给 $f\in L^p(G,E)$,$g\in L^1(G)$,由式(6.2.2)有

$$\|f*g\|_p\leqslant\|f\|_p\|g\|_1, \tag{6.2.8}$$

这得出算子(6.2.5)的连续性. 其次设 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(G,E)$,$g\in L^p_c(G)$,令 $A=\operatorname{supp} g$. 任给紧集 $K\subset G$,有

$$\|(f*g)\mid K\|_p=\|(f\xi_{K-A})*g\|_p\leqslant\|f\mid(K-A)\|_1\|g\|_p,$$

其中用了不等式(6.2.8). 这表明 $f*g\in L^p_{\mathrm{loc}}(G,E)$ 且算子(6.2.6) 连续(用条件(1.5.17)). 算子(6.2.7)的连续性直接由定理 6.2.1(取 $r=\infty$)推出. □

在算子(6.2.5)~算子(6.2.7)中,最常用的是算子(6.2.5),由它得到以下两个结论:

(i) 取定 $\varphi\in L^1(G)$,φ 决定一有界线性算子

$$T_\varphi: L^p(G,E)\to L^p(G,E),\quad f\to\varphi*f.$$

由不等式(6.2.8)推出 $\|T_\varphi\|\leqslant\|\varphi\|_1$;

(ii) 取 $p=1$,$E=\mathbb{C}$ 得到交换的"乘法"

$$L^1(G)\times L^1(G)\to L^1(G),\quad (f,g)\to f*g,$$

它满足 $\|f*g\|_1\leqslant\|f\|_1\|g\|_1$. 用 Fubini 定理可验证卷积是结合的. 因此 $L^1(G)$ 依卷积是一个交换 B 代数,称为**卷积代数**,或称为 G 上的**群代数**. 若令 $f^*=\overline{f^\vee}$ (对复值函数总保持此约定),则可验证运算 $f\to f^*$ 满足定义 5.4.1(S_1)~(S_3),因而使 $L^1(G)$ 成为一个($*$)代数. 特别地,卷积代数 $L^1(\mathbb{R}^n)$,$L^1(\mathbb{T}^n)$ 与 $l^1(\mathbb{Z}^n)$ 都是($*$)代数,后者正是例 5.1.1(iv)(也见例 5.4.1(iii))所界定的 Wiener 代数.

注意,式(6.2.5)中 $L^p(G,E)$ 与 $L^1(G)$ 可以易位,得到有界双线性算子

$$*: L^1(G,E)\times L^p(G)\to L^p(G,E). \tag{6.2.5$'$}$$

相应地,不等式(6.2.8)应修改为 $\|f*g\|_p \leqslant \|f\|_1\|g\|_p$. 对算子(6.2.6), 算子(6.2.7)及下面将考虑的算子(6.2.9) ~ 算子(6.2.11), 算子(6.2.14)均可作类似处理,这一点下面将不再解释.

定理 6.2.3　设 $0 \leqslant r \leqslant \infty$, 则有连续双线性算子

$$*: L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n,E) \times C^r_c(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{E}^r(\mathbb{R}^n,E), \tag{6.2.9}$$

$$*: L^1_c(\mathbb{R}^n,E) \times \mathscr{E}^r(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{E}^r(\mathbb{R}^n,E), \tag{6.2.10}$$

$$*: L^1(\mathbb{T}^n,E) \times \mathscr{E}^r(\mathbb{T}^n) \to \mathscr{E}^r(\mathbb{T}^n,E), \tag{6.2.11}$$

其中, $C^r_c(\mathbb{R}^n)$ 与 $L^1_c(\mathbb{R}^n,E)$ 分别看成 $\mathscr{E}^r(\mathbb{R}^n)$ 与 $L^1(\mathbb{R}^n,E)$ 的子空间. 在以上 3 种情况下有等式

$$\partial^\alpha(f*g) = f*\partial^\alpha g, \quad |\alpha| < r+1. \tag{6.2.12}$$

证　只考虑算子(6.2.9),其余是类似的. 设 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n,E)$, $g \in C^r_c(\mathbb{R}^n)$, 令 $K = \operatorname{supp} g$. 任给有界开集 $V \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, $|\alpha| \leqslant k < r+1$, $x \in V$, 有

$$\|f(y)\partial^\alpha_x g(x-y)\| \leqslant \|f(y)\|\,\|g\|_{K,k}, \quad y \in V-K,$$

其中, $\|g\|_{K,k}$ 依式(2.2.11). 以上不等式保证可用定理 3.2.4 得出

$$\partial^\alpha(f*g)(x) = (f*\partial^\alpha g)(x), \quad x \in V, |\alpha| \leqslant k.$$

这就得出 $(f*g)|V \in C^r$ 且

$$\|\partial^\alpha(f*g)|V\|_0 \leqslant \|f|(V-K)\|_1\|g\|_{K,k},$$

$$\|f*g\|_{V,k} \leqslant \|f|(V-K)\|_1\|g\|_{K,k}.$$

注意 V 与 $V-K$ 相对紧,因此 $\|f|(V-K)\|_1 < \infty$. 以上不等式推出双线性算子(6.2.9)是连续的(用条件(1.5.17)).　□

算子(6.2.9) ~ 算子(6.2.11)的作用都是通过卷积将其中的非光滑因子光滑化. 例如, 由算子(6.2.9)得出:若 $\varphi \in C^r_c(\mathbb{R}^n)$, 则

$$T_\varphi: L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n,E) \to \mathscr{E}^r(\mathbb{R}^n,E), \quad f \to \varphi*f$$

是一个连续线性算子. 因为 T_φ 将“坏函数”f 光滑化了,故常称 T_φ 为光滑化算子. 卷积在应用上的巨大价值,在很大程度上有赖于此. 在下节中将系统地发展这一思想.

任给 $f: \mathbb{T}^1 \to E$, 记 $\mathrm{V}(f) = \mathrm{V}_0^{2\pi}(f)$. 不难验证, $\mathrm{BV}(\mathbb{T}^1,E)$ (记号见定义 3.7.1)依范数

$$\|f\|_V = \mathrm{V}(f) + \|f\|_0 \tag{6.2.13}$$

是一个 Banach 空间. 约定 $\mathrm{BV}(\mathbb{T}^1) = \mathrm{BV}(\mathbb{T}^1,\mathbb{C})$.

定理 6.2.4　由卷积决定如下有界双线性算子:

$$*: L^1(\mathbb{T}^1,E) \times \mathrm{BV}(\mathbb{T}^1) \to \mathrm{BV}(\mathbb{T}^1,E), \tag{6.2.14}$$

$$\|f*g\|_V \leqslant \|f\|_1\|g\|_V. \tag{6.2.15}$$

证　设 $f \in L^1(\mathbb{T}^1,E)$, $g \in \mathrm{BV}(\mathbb{T}^1)$. 因 $\mathrm{BV}(\mathbb{T}^1) \subset L^\infty(\mathbb{T}^1)$, 由算子(6.2.7)有 $h \triangleq f*g \in C_b(G,E)$. 任给 $[0,2\pi]$ 的分划 $P = \{x_i\}$, 有

$$\sum_i \| \Delta h(x_i) \| = \sum_i \left\| \int_0^{2\pi} f(y)[g(x_i - y) - g(x_{i-1} - y)]\mathrm{d}y \right\|$$

$$\leqslant \int_0^{2\pi} \|f(y)\| \sum_i | g(x_i - y) - g(x_{i-1} - y) | \mathrm{d}y$$

$$\leqslant \|f\|_1 \mathrm{V}(g),$$

这推出 $\mathrm{V}(h) \leqslant \|f\|_1 \mathrm{V}(g)$. 于是

$$\|h\|_V \leqslant \|f\|_1 \mathrm{V}(g) + \|h\|_0$$

$$\leqslant \|f\|_1 \mathrm{V}(g) + \|f\|_1 \|g\|_0 = \|f\|_1 \|g\|_V,$$

这得出式(6.2.15),因而算子(6.2.14)是有界的. □

引理 6.2.2　设 $f: G \to E, g: G \to \mathbb{C}, f * g$ 有定义, $\mathrm{supp}\, f$ 与 $\mathrm{supp}\, g$ 之一是紧集(支集定义由式(3.5.22)),则

$$\mathrm{supp}\ (f * g) \subset \mathrm{supp}\, f + \mathrm{supp}\, g.$$

证　令 $A = \mathrm{supp}\, f, B = \mathrm{supp}\, g$, 不妨设 A 是紧集. 首先指明 $A + B$ 是闭集. 设 $\{a_n\} \subset A, \{b_n\} \subset B, a_n + b_n \to x$. 不妨设 $a_n \to a \in A$,则必 $b_n \to x - a \triangleq b \in B$, 因而 $x = a + b \in A + B$. 令 $h = f * g$,为证 $\mathrm{supp}\, h \subset A + B$,只要对任给开集 $V \subset (A + B)^c$,证 $h | V = 0$. $\forall x \in V$,易看出 $A \cap (x - B) = \varnothing$,于是

$$h(x) = \int_G f(y) g(x - y) \mathrm{d}\mu(y)$$

$$= \int_{A \cap (x-B)} f(y) g(x - y) \mathrm{d}\mu(y) = 0,$$

故 $h | V = 0$,如所要证. □

由引理 6.2.2 特别推出,若 f 与 g 均有紧支集, $f * g$ 存在,则 $f * g$ 亦有紧支集. 这就从算子(6.2.5),算子(6.2.6) 与算子(6.2.9) 得出

$$(L_c^p(G,E) * L_c^1(G)) \cup (L_c^1(G,E) * L_c^p(G)) \subset L_c^p(G,E), \quad (6.2.16)$$

$$L_c^1(\mathbb{R}^n, E) * C_c^r(\mathbb{R}^n) \subset C_c^r(\mathbb{R}^n, E), \quad (6.2.17)$$

其中, $F * H$ 记 $\{f * h : f \in F, h \in H\}$. 不那么明显的另一个推论是

推论 6.2.1　设 $1 < p = q/(q - 1) < \infty$,则有连续双线性算子

$$* : L^p(G,E) \times L^q(G) \to C_0(G,E).$$

证　任给 $f \in L^p(G,E), g \in L^q(G)$,由定理 6.2.1 有 $f * g \in C_b(G,E)$ 且 $\|f * g\|_0 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$. 只要证 $f * g \in C_0$. 由定理 3.5.1 有 $\{f_n\} \subset C_c(G,E)$, $\{g_n\} \subset C_c(G)$,使得 $f_n \xrightarrow{L^p} f, g_n \xrightarrow{L^q} g$,因而 $f_n * g_n \rightrightarrows f * g$. 而由引理 6.2.2 有 $f_n * g_n \in C_c(G,E)$,故得 $f * g \in C_0$. □

今将函数之间的卷积推广到测度之间 的卷积. 任给 $\eta, \nu \in M(G), \varphi \in C_0(G)$(下面出现的 φ 皆如此,不再注明),令

$$L(\varphi) = \int \mathrm{d}\eta(x) \int \varphi(x + y) \mathrm{d}\nu(y).$$

易验证 $L \in C_0(G)^*$ 且 $\|L\| \leqslant \|\eta\| \|\nu\|$. 由定理3.5.3,存在唯一 $\zeta \in M(G)$ 使得 $L(\varphi) = \int \varphi d\zeta$ 且 $\|\zeta\| = \|L\|$. 定义 $\zeta = \eta * \nu$,则有

$$\int \varphi d(\eta * \nu) = \int d\eta(x) \int \varphi(x+y) d\nu(y). \tag{6.2.18}$$

类似地,由等式

$$\int \varphi d\nu^* = \overline{\int \varphi^* d\nu}, \quad \varphi^* = \overline{\varphi}^{\vee} \tag{6.2.19}$$

唯一地决定一个 $\nu^* \in M(G)$. 依以上定义,今证明

定理 6.2.5　$M(G)$ 由式(6.2.18)所界定的卷积及式(6.2.19)界定的对合运算是一个交换(*)代数,它以 δ(零元处的 Dirac 测度)为其单位元;若等同 $f \in L^1(G)$ 与 $f d\mu$,则 $L^1(G)$ 是 $M(G)$ 的(*)子代数.

证　今依次验明以下结论:

(i) $M(G)$ 是一个交换的卷积代数. 用 Fubini 定理易验证卷积是交换的与结合的. 例如,对 $\eta, \nu, \zeta \in M(G)$ 有

$$\begin{aligned}
\int \varphi d(\eta * (\nu * \zeta)) &= \int d\eta(x) \int \varphi(x+y) d(\nu * \zeta)(y) \\
&= \int d\eta(x) \int d\zeta(y) \int \varphi(x+y+z) d\nu(z) \\
&= \int d\zeta(y) \int d\eta(x) \int \varphi(x+y+z) d\nu(z) \\
&= \int d\zeta(y) \int \varphi(x+y) d(\eta * \nu)(x) \\
&= \int \varphi d((\eta * \nu) * \zeta),
\end{aligned}$$

这得出 $\eta * (\nu * \zeta) = (\eta * \nu) * \zeta$. 由 $\eta * \nu$ 的定义已得 $\|\eta * \nu\| \leqslant \|\eta\| \|\nu\|$, 故 $M(G)$ 是一个卷积代数.

(ii) 验证对合 $\nu \to \nu^*$ 满足定义 5.4.1(S_1) ~ (S_3). (S_1)与(S_3)是明显的,今验证(S_2). 设 $\eta, \nu \in M(G)$, 则

$$\begin{aligned}
\int \varphi d(\eta * \nu)^* &= \overline{\int \varphi^* d(\eta * \nu)} = \overline{\int d\eta(x) \int \varphi^*(x+y) d\nu(y)} \\
&= \overline{\int d\eta(x)\, \overline{\int \varphi(y-x) d\nu^*(y)}} \\
&= \int d\eta^*(x) \int \varphi(x+y) d\nu^*(y) = \int \varphi d(\eta^* * \nu^*),
\end{aligned}$$

可见 $(\eta * \nu)^* = \eta^* * \nu^*$.

(iii) δ 是单位元. $\forall \nu \in M(G)$,有

$$\int \varphi d(\delta * \nu) = \int d\delta(x) \int \varphi(x+y) d\nu(y) = \int \varphi d\nu,$$

这表明 $\delta * \nu = \nu$.

(iv) 验证 $L^1(G)$ 是 $M(G)$ 的(*)子代数. 设 $f,g \in L^1(G)$,令 $\mathrm{d}\eta = f\mathrm{d}\mu, \mathrm{d}\nu = g\mathrm{d}\mu$,则

$$\begin{aligned}\int \varphi \mathrm{d}(\eta * \nu) &= \int f(x)\mathrm{d}\mu(x)\int \varphi(x+y)g(y)\mathrm{d}\mu(y) \\ &= \int \varphi(y)\mathrm{d}\mu(y)\int f(x)g(y-x)\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int \varphi(y)(f*g)(y)\mathrm{d}\mu(y),\end{aligned}$$

这得出 $\mathrm{d}(\eta * \nu) = (f*g)\mathrm{d}\mu$. 其次易验知 $\mathrm{d}\eta^* = f^*\mathrm{d}\mu$.

综上所证,知定理结论成立. □

今以一个新的表述来取代上面用积分表达的事实. 首先约定

$$\langle \nu, \varphi \rangle = \langle \nu(x), \varphi(x) \rangle = \int \varphi \mathrm{d}\nu. \tag{6.2.20}$$

其次注意,对任给 $f \in L^1(G)$,结合式(6.2.18)与式(6.2.20)有

$$\langle (f\mathrm{d}\mu) * \nu, \varphi \rangle = \int \varphi(x)\mathrm{d}\mu(x)\int f(x-y)\mathrm{d}\nu(y),$$

这表明 $(f\mathrm{d}\mu) * \nu = (f*\nu)\mathrm{d}\mu, f*\nu \in L^1(G)$ 界定为

$$(f*\nu)(x) = \int f(x-y)\mathrm{d}\nu(y). \tag{6.2.21}$$

利用式(6.2.20)与式(6.2.21),可将式(6.2.18)与式(6.2.19)分别缩写成

$$\langle \eta * \nu, \varphi \rangle = \langle \eta, \check{\nu} * \varphi \rangle, \quad \langle \nu^*, \varphi \rangle = \overline{\langle \nu, \varphi^* \rangle}. \tag{6.2.22}$$

式(6.2.21)表明 $L^1(G) * M(G) \subset L^1(G)$,即 $L^1(G)$ 是 $M(G)$ 中的理想.

若 G 是一个离散群(如 $G = \mathbb{Z}^n$),μ 是 G 上的计数测度,$\delta = \xi_{\{0\}}$,则 $\forall \varphi \in L^1(G)$,有 $\delta * \varphi = \varphi$,故 δ 是 $L^1(G)$ 的单位元. 对于 $G = \mathbb{R}^n$,$L^1(\mathbb{R}^n)$ 没有单位元. 实际上,以上事实包含在以下一般定理中:

定理 6.2.6 卷积代数 $L^1(G)$ 有单位元的充要条件是 G 为离散群.

证 充分性是明显的,下面证必要性. 设 $L^1(G)$ 有卷积单位元 φ. 令

$$\alpha = \inf\{\mu V: V 是 G 的紧 0 邻域\}.$$

若 $\alpha = 0$,则必有紧 0 邻域 V 使 μV 充分小,使得 $\int_V |\varphi| \mathrm{d}\mu < 1$. 由群运算的连续性,有 0 邻域 U 使 $U - U \subset V$. 必有 $x \in U$,使得

$$\begin{aligned}1 = \xi_U(x) &= (\varphi * \xi_U)(x) \\ &= \int_{x-U} \varphi \mathrm{d}\mu \leqslant \int_V |\varphi| \mathrm{d}\mu < 1,\end{aligned}$$

得出矛盾. 因此 $\alpha > 0$. 于是有紧 0 邻域 V 使 $\mu V < 2\alpha$. 必定 $V = \{0\}$(因而 G 是离散的). 否则存在 $0 \neq x \in V^\circ$,取紧 0 邻域 U, W,使得 $U \cap (x + W) = \varnothing, U \cup (x +$

$W) \subset V$,于是$\mu V \geqslant \mu U + \mu(x + W) \geqslant 2\alpha$,得出矛盾. □

6.3 近似单位

6.2 节说到,一个"坏函数"f(如$f \in L^p$)经与某个光滑函数φ作卷积后可实现光滑化. 但若$f * \varphi$与f相差甚远,就不能用光滑化后的$f * \varphi$替代f. 最好是通过不断修改φ而得到一个序列$\{\varphi_m\}$,使得$f * \varphi_m$能在一定意义上收敛于f,而且$f * \varphi_m$属于某个预定的"好函数"类. 若如上的序列$\{\varphi_m\}$存在,就得到了一种解逼近问题的系统方法,而这正是运用卷积所要达到的主要目的之一. 形式上看,$f * \varphi_m \to f$似乎意味着$\{\varphi_m\}$收敛于卷积单位元δ(或者说卷积算子$\varphi_m *$逼近单位算子I),这就获得"近似单位"这一名称. 下面是它的准确定义.

定义 6.3.1 设序列$\{\varphi_m\} \subset L^1(G)$满足条件

(A_1) $\int_G \varphi_m \mathrm{d}\mu = 1, \ \forall m \in \mathbb{N}$;

(A_2) 任给 0 邻域$V \subset G$,有$\lim\limits_m \int_V \varphi_m \mathrm{d}\mu = 1$,

则称$\{\varphi_m\}$为一个奇异积分核.

若$\{\varphi_m\}$进而满足条件

(A_3) $\sup\limits_m \| \varphi_m \|_1 < \infty$,对任给 0 邻域$V \subset G$,有$\lim\limits_m \int_{V^c} |\varphi_m| \mathrm{d}\mu = 0$,

则称$\{\varphi_m\}$为一个**近似单位**[①].

为简便起见,今后提到奇异积分核或近似单位$\{\varphi_m\}$时,就写作φ_m.

定义 6.3.1 虽然并不复杂,但还是值得作几点说明:

(i) 定义中的 0 邻域V可限于取某种基邻域. 例如,在$\mathbb{R}^n$中取$V = B_\delta(0)$.

(ii) 若$\varphi_m \geqslant 0$,则条件(A_1)与(A_2)(依定义 6.3.1,下同)蕴涵了条件(A_3). 有些作者甚至将$\varphi_m \geqslant 0$这一条件加入近似单位的定义. 本章中用到的大多数近似单位确实是非负的,但无需作此一般要求. 若$\varphi_m \geqslant 0$满足条件(A_1)且$\operatorname{supp} \varphi_m \to \{0\}$,则条件$(A_2)$自动满足. 这样的近似单位称为 **Dirac 序列**.

(iii) 设定φ_m是一个序列,只是为了表述方便. 实际上,下标m可换成其他参数,只要其极限过程有明确表达就行,如可采用φ_s,极限是对于$s \to 0^+$取的. 在这种情况下,就说近似单位$\varphi_s (s \to 0^+)$,注明$s \to 0^+$是必要的. 在本节中,主要定理通常就φ_m为序列的情况表述,然后自动地认定该定理亦可用于m换成其他参数的情况. 这种变通用法此后将不再另作解释.

---

① 关于近似单位这一概念的条件与用语,文献中歧见颇多,此处所作的选择似乎能合于通常需要.

若 φ_m 是 G 上的奇异积分核，$f \in L^p(G,E)(1 \leqslant p \leqslant \infty)$，则

$$(f * \varphi_m)(x) = \int_G f(x-y)\varphi_m(y)\mathrm{d}\mu(y) \tag{6.3.1}$$

定义出一个函数 $f_m \triangleq f * \varphi_m \in L^p(G,E)$. 通常以核 φ_m 的名称给式(6.3.1)右端的积分命名，如称之为 Dirichlet 积分意味着它由 Dirichlet 核定义，Fejér 积分、Poisson 积分等类似(见例 6.3.1).

本节的主要课题是寻求使 $f_m \to f$ 的各种条件. 在作这件事之前，首先熟悉若干具体的核，这些核是最常用的，特别在后面几节中将起很大作用.

例 6.3.1 (i) **Dirichlet 核** D_m. 它定义于 $\mathbb{T}^1$ 上，

$$D_m(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{|k|\leqslant m} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \frac{\sin(m+1/2)x}{2\pi\sin(x/2)}, \quad m \in \mathbb{Z}_+. \tag{6.3.2}$$

直接看出 $\int_{-\pi}^{\pi} D_m(x)\mathrm{d}x = 1$. $\forall \delta \in (0,\pi)$，由第二积分中值定理有

$$2\pi\int_\delta^\pi D_m(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sin(\delta/2)}\int_\delta^{\tau_m}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x\mathrm{d}x + \int_{\tau_m}^{\pi}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x\mathrm{d}x \to 0,$$

其中，$\tau_m \in [\delta,\pi]$. 这就验证了条件(A_2)，因而 D_m 是一奇异积分核. 另一方面，

$$\begin{aligned}2\pi\int_\delta^\pi |D_m(x)|\mathrm{d}x &\geqslant \int_\delta^\pi\left|\sin\frac{2m+1}{2}x\right|\mathrm{d}x \\ &\geqslant \frac{2}{2m+1}\int_{(m+1)\delta}^{m\pi}|\sin y|\mathrm{d}y \to \frac{2(\pi-\delta)}{\pi}, \quad m\to\infty.\end{aligned}$$

这表明 D_m 不满足条件(A_3)，因而不是近似单位.

类似地，可写出 $\mathbb{R}$ 上的 Dirichlet 核

$$D_m(x) = \frac{\sin mx}{\pi x}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.3.2)'$$

(ii) **Fejér 核** F_m. 设 D_m 依式(6.3.2)，令

$$F_m(x) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} D_k(x) = \frac{1}{2m\pi}\left[\frac{\sin(mx/2)}{\sin(x/2)}\right]^2, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{6.3.3}$$

由 D_m 满足条件(A_1)与(A_2)直接推出 F_m 满足条件(A_1)与(A_2)，而 $F_m \geqslant 0$，因而 F_m 是 $\mathbb{T}^1$ 上的近似单位. $F_m(x)$ 如 $D_m(x)$ 一样是偶函数，$F_m(0) = m/2\pi$，当 m 很大时 $F_m(x)$ 在 $x=0$ 邻近有很高的钟形隆起. 这可以说是近似单位的典型特征.

(iii) **Poisson 核** P_r. 它定义于 $\mathbb{T}^1$ 上，

$$P_r(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}, \quad 0<r<1. \tag{6.3.4}$$

P_r 是非负偶函数，在 $[0,\pi]$ 上单调减. P_r 显然满足条件(A_1). $\forall \delta \in (0,\pi)$，有

$$\int_\delta^\pi P_r(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi-\delta}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta + r^2} \to 0, \quad r\to 1^-.$$

可见 $P_r(r\to 1^-)$ 满足条件(A_2),因而是 $\mathbb{T}^1$ 上的近似单位.

(iv) **Fejér 型核**. 设 $\varphi\in L^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}_+)$, $\|\varphi\|_1=1$(这样的 φ 可看成某个 n 维随机变量的概率密度). 直接看出,

$$\varphi_m(x)=m^n\varphi(mx),\quad x\in\mathbb{R}^n, m\in\mathbb{N}\tag{6.3.5}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 上的近似单位,称它为由函数 φ 生成的 Fejér 型核. 显然 $\varphi\in C^r\Rightarrow\varphi_m\in C^r$, $\operatorname{supp}\varphi\subset B_\rho(0)\Rightarrow\operatorname{supp}\varphi_m\subset B_{\rho/m}(0)$. 鉴于 Fejér 型核结构清晰,条件易于验证,因而人们乐于使用. 下面的(v)~(vii),(ix)是 Fejér 型核的重要例子.

(v) **Gauss 核 Γ_m**, 亦称 Weierstrass 核, $\Gamma_m(x)=m^n\gamma(mx)$,其中,

$$\gamma(x)=\pi^{-n/2}\exp(-|x|^2),\quad x\in\mathbb{R}^n.\tag{6.3.6}$$

注意 $\gamma(x)$ 是某个正态随机变量的概率密度.

(vi) **Poisson 核 P_t**(注意区别于 P_r),定义为 $P_t(x)=t^{-n}P(x/t)(t\to 0^+)$,其中,

$$P(x)=\pi^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)(1+|x|^2)^{-\frac{n+1}{2}},\quad x\in\mathbb{R}^n.\tag{6.3.7}$$

注意,对照式(6.3.5),此处以 t 取代了 $1/m$. 因 n 维单位球面的面积为

$$\sigma_n=2\pi^{n/2}/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right),$$

故

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}P(x)\,\mathrm{d}x&=\sigma_n\pi^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\int_0^\infty(1+r^2)^{-\frac{n+1}{2}}r^{n+1}\,\mathrm{d}r\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(n/2)}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)=1.\end{aligned}$$

(vii) **Fejér 核 F_m** (注意区别于(ii)),定义为 $F_m(x)=mF(mx)$,其中,

$$F(x)=\frac{\sin^2x}{\pi x^2},\quad x\in\mathbb{R},\tag{6.3.8}$$

用分部积分易验证 $\int_{\mathbb{R}}F(x)\,\mathrm{d}x=1$.

(viii) 张量积型核 Φ_m. 设 φ_m 是$\mathbb{T}^1$ 或$\mathbb{R}$ 上的非负近似单位,取 $G=\mathbb{T}^n$ 或$\mathbb{R}^n$,令

$$\Phi_m(x)=\varphi_m(x_1)\varphi_m(x_2)\cdots\varphi_m(x_n),\quad x\in G.\tag{6.3.9}$$

显然 $\int_G\Phi_m(x)\,\mathrm{d}x=1$. 若 $0<\delta<b, b=\pi$ 或 ∞,则

$$\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\cdots\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_m(x)\,\mathrm{d}x=\left[\int_{-\delta}^{\delta}\varphi_m(t)\,\mathrm{d}t\right]^n\to 1,\quad n\to\infty.$$

可见 Φ_m 是 G 上的近似单位. 注意 Gauss 核 Γ_m 实际上是 n 个一维 Gauss 核的张量积. 此外, $\mathbb{T}^1$ 上的 Fejér 核 F_m ,Poissan 核 P_r 及$\mathbb{R}$ 上的 Fejér 核 F_m,均可通过作张量积过渡到$\mathbb{T}^n$ 与$\mathbb{R}^n$ 上的近似单位. 例如,$\mathbb{T}^n$ 上的 Poisson 核可写成

$$P_r(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}r^{|k|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x},\quad x\in\mathbb{T}^n,\tag{6.3.10}$$

其中，$|k| = \sum_j |k_j|$ $(k \in \mathbb{Z}^n)$.

(ix) 非光滑核. 仅看一例：$\varphi_r(x) = r^{-n}\varphi(x/r)$，其中，$\varphi = v_n^{-1}\xi_B$，$v_n$ 是 n 维单位球的体积，B 是 n 维单位球. $\varphi_r(r \to 0^+)$ 就是$\mathbb{R}^n$ 上的近似单位，$\operatorname{supp}\varphi_r \subset B_r(0)$. 对任给 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, E)$，有

$$(f * \varphi_r)(x) = \frac{1}{V(r)}\int_{B_r(x)} f(y)\mathrm{d}y = A_r f(x),$$

其中，$V(r)$，$A_r f(x)$ 依式(3.6.2).

如前所述，本节的主要任务是利用近似单位来建立适当的逼近定理. 在着手实现这一设想之前，首先粗略地描述一下将遵循的一般思路. 设 φ_m 是 G 上的一个近似单位，$f: G \to E$ 使得 $f_m \triangleq f * \varphi_m$ 有定义. 为验证在某种意义上 $f_m \to f$，常不免要估计 $\|f_m(x) - f(x)\|$ $(x \in G)$. 任取 G 的 0 邻域 V，有

$$\begin{aligned}
\|f_m(x) - f(x)\| &= \left\| \int_G [f(x-y) - f(x)]\varphi_m(y)\mathrm{d}\mu(y) \right\| \\
&\leqslant \int_G \|f(x-y) - f(x)\| \, |\varphi_m(y)| \, \mathrm{d}\mu(y) \\
&\leqslant \int_V \|f(x-y) - f(x)\| \, |\varphi_m(y)| \, \mathrm{d}\mu(y) \\
&\quad + \int_{V^c} \|f(x-y)\| \, |\varphi_m(y)| \, \mathrm{d}\mu(y) + \|f(x)\| \int_{V^c} |\varphi_m| \, \mathrm{d}\mu \\
&\triangleq I_1 + I_2 + I_3,
\end{aligned} \tag{6.3.11}$$

注意其中用到关键条件(A_1). 因由条件(A_3)有 $I_3 \to 0$ $(m \to \infty)$，故只需估计 I_1 与 I_2，这自然要用到 f 与 φ_m 的一定条件. 顺便指出，使用某种类似于式(6.3.11)的"拆项估计"，是 Fourier 分析中的一个基本技巧.

定理 6.3.1(Fejér) 设 φ_m 是 G 上的近似单位，$f_m = f * \varphi_m$.

(i) 设 $f \in L^\infty(G, E)$. 若 $K \subset G$，f 在 K 上一致连续(由式(6.1.8))，则在 K 上 $f_m \rightrightarrows f$. 因此，若 f 在 x 连续，则 $f_m(x) \to f(x)$. 若 $f \in C_0(G, E)$，则在 G 上 $f_m \rightrightarrows f$；

(ii) 若 $f \in L^p(G, E)$ $(1 \leqslant p < \infty)$，则 $f_m \xrightarrow{L^p} f$.

证 (i) $\forall \varepsilon > 0$，取 G 的对称 0 邻域 V，使 $\|f_a - f\|_K < \varepsilon$ $(\forall a \in V)$. 设 $x \in K$，$I_1 \sim I_3$ 依式(6.3.11)，则 $I_1 \leqslant \varepsilon \|\varphi_m\|_1$，

$$I_2 + I_3 \leqslant 2\|f\|_\infty \int_{V^c} |\varphi_m| \, \mathrm{d}\mu \to 0, \quad m \to \infty.$$

综上，知在 K 上 $f_m \rightrightarrows f$.

(ii) 定义映射

$$\Phi_m: G \to L^p(G), \quad y \to |\tau_{-y}f - f| \, |\varphi_m(y)|.$$

任取 G 的 0 邻域 V，估计

$$\|f_m - f\|_p \leqslant \left\{\int_G \left[\int_G \Phi_m(y)(x)\,\mathrm{d}\mu(y)\right]^p \mathrm{d}\mu(x)\right\}^{1/p}$$

$$= \left\|\int_G \Phi_m(y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right\|_p \leqslant \int_G \|\Phi_m(y)\|_p \mathrm{d}\mu(y)$$

$$= \int_G \|f_y - f\|_p \,|\,\varphi_m(-y)\,|\,\mathrm{d}\mu(y)$$

$$\leqslant \int_V \|f_y - f\|_p \,|\,\varphi_m(-y)\,|\,\mathrm{d}\mu(y) + 2\|f\|_p \int_{V^c} |\,\varphi_m(-y)\,|\,\mathrm{d}\mu$$

$$\triangleq J_1 + J_2,$$

其中用了引理 6.2.1. 由定理 6.1.3 有 $\|f_y - f\|_p \to 0(y \to 0)$. 而由条件 ($A_3$) 有 $J_2 \to 0(m \to \infty)$, 故类似于(i)之证有 $\|f_m - f\|_p \to 0(m \to \infty)$, 如所要证. □

今指出一个有趣的事实. 设 $f \in L^p(G)(1 \leqslant p < \infty)$, 令 $F(x) = f_x(x \in G)$, 则 $F \in C_b(G, L^p(G))$ (由定理 6.1.3). 于是取 $E = L^p(G)$ 用定理 6.3.1(i) 得出 $(F * \varphi_m)(0) \xrightarrow{L^p} F(0) = f$, 而由引理 6.2.1 有

$$(F * \varphi_m)(0)(x) = \int_G F(-y)\varphi_m(y)\,\mathrm{d}\mu(y)(x) = (f * \varphi_m)(x), \text{a. e.},$$

故得 $f * \varphi_m \xrightarrow{L^p} f$. 由此可见, 在一定程度上, 定理 6.3.1 中结论(i)蕴涵了结论(ii). 以上事实也说明了, 在无限维向量值函数的层次上构建 Fourier 分析, 是必要而有效的.

就一致收敛与 L^p 收敛而言, 似乎已不必指望比定理 6.3.1 更好的结果了. 至于点态收敛, 情况就较复杂, 不能指望通过一个定理完全解决问题. 下面给出几个结果, 它们所依据的条件与处理方法都各有不同. 首先看一个较一般的结果.

定理 6.3.2　设 φ_m 是 G 上的近似单位, 它满足以下条件:

(i) $\operatorname{supp} \varphi_m \subset K, K \subset G$ 是与 m 无关的紧集;

(ii) 任给 0 邻域 $V \subset G$, 存在 m_0, 使得 $\sup\limits_{m \geqslant m_0} \|\varphi_m \,|\, V^c\|_\infty < \infty$.

设 $f \in L^1(G,E)$, $f_m = f * \varphi_m$, x 是 f 的连续点, 则 $f_m(x) \to f(x)$.

证　$\forall \varepsilon > 0$, 取 0 邻域 $V \subset G$, 使得

$$\|f(x-y) - f(x)\| < \varepsilon / \sup_m \|\varphi_m\|_1, \qquad y \in V.$$

设 $I_1 \sim I_3$ 依式(6.3.11), 则 $I_1 < \varepsilon$. 令

$$A_k = \{y \in K \backslash V:\ \|f(x-y)\| \geqslant k\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

则 $\{A_k\}$ 是一降列, $\cap A_k = \varnothing$, $\mu A_k \leqslant \mu K < \infty$, 故必 $\mu A_k \to 0(k \to \infty)$. 取充分大的 k 与 $m \geqslant m_0$, 使

$$\int_{A_k} \|f(x-y)\| \,|\,\varphi_m(y)\,|\,\mathrm{d}\mu(y)$$

$$\leqslant \sup_{m \geqslant m_0} \|\varphi_m \,|\, V^c\|_\infty \int_{A_k} \|f(x-y)\|\,\mathrm{d}\mu(y) < \varepsilon.$$

固定一个如上的 k,有

$$I_2 \leqslant \varepsilon + k\int_{V^c} |\varphi_m| \,\mathrm{d}\mu \to \varepsilon, \quad m \to \infty.$$

综上所证,由式(6.3.11)看出 $f_m(x) \to f(x)(m \to \infty)$. □

满足定理 6.3.2 中条件的近似单位并不少见. 例如, $\mathbb{T}^1$ 上的 Fejér 核与 Poisson 核显然均满足定理 6.3.2 中的条件. 其次,设 φ_m 是 Fejér 型核, φ 有紧支集,则 φ_m 亦满足定理 6.3.2 的条件. 因此,对于连续性较好的函数应用定理 6.3.2 是值得考虑的. 但对于连续性很差的函数,定理 6.3.2 就没有什么意义.

如果不对 f 作任何连续性假设,但仍希望使用类似于证定理 6.3.2 的方法,就要用"L 点"条件(由式(3.6.4))来代替连续性条件,而这就只能在 $\mathbb{R}^n$ 中考虑. 设 φ_m 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个近似单位, $f \in L^1(\mathbb{R}^n,E)$, $f_m = f * \varphi_m$, x 是 f 的一个 L 点. 任取 $\delta \in (0,\infty)$,类似于式(6.3.11)可建立

$$\begin{aligned}\|f_m(x) - f(x)\| \leqslant & \int_{|y| \leqslant \delta} \|f(x-y) - f(x)\| \, |\varphi_m(y)| \,\mathrm{d}y \\ & + \int_{|y| > \delta} \|f(x-y)\varphi_m(y)\| \,\mathrm{d}y + \|f(x)\| \int_{|y| > \delta} |\varphi_m| \,\mathrm{d}y \\ & \triangleq I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \tag{6.3.12}$$

为估计 I_1,令

$$F(r) = \int_{|y| \leqslant r} \|f(x-y) - f(x)\| \,\mathrm{d}y, \quad r \geqslant 0.$$

$\forall \varepsilon > 0$,由 x 为 L 点推出存在 $\delta > 0$,使得 $\forall r \in [0,\delta]$,有 $F(r) \leqslant \varepsilon r^n$. 设有单调减函数 $\psi_m \in L^1(\mathbb{R}_+)$,使得 $|\varphi_m(x)| \leqslant \psi_m(|x|)$,则

$$\begin{aligned} I_1 & \leqslant \int_{|y| \leqslant \delta} \|f(x-y) - f(x)\| \psi_m(|y|) \,\mathrm{d}y \\ & = \int_0^\delta \psi_m(r) \,\mathrm{d}F(r) = \psi_m(\delta)F(\delta) - \int_0^\delta F(r)\,\mathrm{d}\psi_m(r) \\ & \leqslant \varepsilon\, \delta^n \psi_m(\delta) - \varepsilon \int_0^\delta r^n \,\mathrm{d}\psi_m(r) \\ & = n\,\varepsilon \int_0^\delta \psi_m(r) r^{n-1} \,\mathrm{d}r, \end{aligned} \tag{6.3.13}$$

其中用了两次分部积分. 以上分析引出如下结果:

定理 6.3.3 设 φ_m 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个 Fejer 型核(由例 6.3.1(iv)并用那里的记号), $\varphi(x) \leqslant \psi(|x|)$, $\psi(r)$ 是 $\mathbb{R}_+$ 上的单调减函数, $\psi(r)r^{n-1} \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n,E)(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, $f_m = f * \varphi_m$,则以下结论成立:

(i) $f_m \to f$, a. e. $m \to \infty$;

(ii) 若 f 在点 x 连续,则 $f_m(x) \to f(x)$;

(iii) 若 f 在开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 内连续,则 f_m 在 Ω 内紧一致收敛于 f.

证　(i) 由定理3.6.3,只要对 f 的 L 点 x 证 $f_m(x) \to f(x)(m \to \infty)$. 设 $I_1 \sim I_3$ 依式(6.3.12). 任给 $\varepsilon > 0$,设已取 $\delta > 0$ 使式(6.3.13) 满足,其中, $\psi_m(r) = m^n\psi(mr)$,显然, $\varphi_m(x) \leqslant \psi_m(|x|)$. 于是

$$I_1 \leqslant n\,\varepsilon\int_0^\delta m^n\psi(mr)r^{n-1}\mathrm{d}r = n\,\varepsilon\int_0^{m\delta}\psi(r)r^{n-1}\mathrm{d}r$$

$$\leqslant n\,\varepsilon\int_0^\infty \psi(r)r^{n-1}\mathrm{d}r \triangleq c\,\varepsilon,$$

c 是正常数. 令 $q = p/(p-1)$, 则由 Hölder 不等式有

$$I_2 \leqslant \|f\|_p\left[\int_{|y|>\delta}\psi_m^q(|y|)\mathrm{d}y\right]^{1/q} \leqslant \|f\|_p\psi_m^{1/p}(\delta)\left[\int_{|y|>\delta}\psi_m(|y|)\mathrm{d}y\right]^{1/q}$$

$$\leqslant \mathrm{const}\,\psi_m^{\frac{1}{p}}(\delta)\left[\int_\delta^\infty \psi_m(r)r^{n-1}\mathrm{d}r\right]^{1/q} = \mathrm{const}\,\psi_m^{1/p}(\delta)\left[\int_{m\delta}^\infty\psi(r)r^{n-1}\mathrm{d}r\right]^{1/q}.$$

由 $\psi(r)$ 单调减有

$$\int_{\delta/2}^\delta\psi(r)r^{n-1}\mathrm{d}r \geqslant \psi(\delta)\int_{\delta/2}^\delta r^{n-1}\mathrm{d}r \geqslant \frac{\delta^n\psi(\delta)}{2n},$$

这推出

$$\psi_m(\delta) = m^n\psi(m\delta) \leqslant \frac{2n}{\delta^n}\int_{m\delta/2}^{m\delta}\psi(r)r^{n-1}\mathrm{d}r.$$

于是

$$I_2 \leqslant \frac{\mathrm{const}}{\delta^{n/p}}\left[\int_{m\delta/2}^{m\delta}\psi(r)r^{n-1}\mathrm{d}r\right]^{1/p}\left[\int_{m\delta}^\infty\psi(r)r^{n-1}\mathrm{d}r\right]^{1/q}$$

$$\leqslant \frac{\mathrm{const}}{\delta^{n/p}}\int_{m\delta/2}^\infty\psi(r)r^{n-1}\mathrm{d}r.$$

因此,对固定的 δ 有 $I_2 \to 0(m \to \infty)$. 显然也有 $I_3 \to 0(m \to \infty)$. 综上即得 $f_m(x) \to f(x)$.

(ii) 直接由(i)的证明看出.

(iii) 取定 $x_0 \in \Omega$ 与 x_0 的充分小的邻域 V, 只要证对 $x \in V$ 有 $f_m(x) \rightrightarrows f(x)$ $(m \to \infty)$. 任给 $\varepsilon > 0$. 类似于定理6.3.1之证,可取 $\delta > 0$,使对任何 $x \in V$ 有 $I_1 < \varepsilon$. 固定 δ, 由(i)的证明看出当 $m \to \infty$ 时与 x 无关地 $I_2 \to 0$. 显然关于 $x \in V$ 一致地有 $I_3 \to 0(m \to \infty)$. 综上,知关于 $x \in V$ 一致地有 $f_m(x) \to f(x)$. □

为应用定理6.3.3,考虑如下3个 Fejer 型核:

(i) Gauss 核 $\Gamma_m(x)$. 设 $\gamma(x)$ 依式(6.3.6), $\psi(r) = \pi^{-n/2}\mathrm{e}^{-r^2}$,则 $\gamma(x) = \psi(|x|)$, $\psi(r)$ 显然满足定理6.3.3之条件.

(ii) Poisson 核 $P_t(x)$. 设 $P(x)$ 依式(6.3.7),则 $P(x) = \psi(|x|)$, 此处

$$\psi(r) = c_n(1 + r^2)^{-(n+1)/2}, \quad c_n = \pi^{-(n+1)/2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right),$$

$$\int_0^\infty \psi(r) r^{n-1} \mathrm{d}r = \frac{c_n}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right) < \infty.$$

可见 $\psi(r)$ 满足定理 6.3.3 之条件.

(iii) $\mathbb{R}$ 上的 Fejer 核 $F_m(x)$. 设 $F(x)$ 依式(6.3.8), $\psi(r) = 4/[\pi(1 + r^2)]$, 则 $\psi(r)$ 满足定理 6.3.3 之条件(取 $n = 1$). $F(x) \leqslant \psi(|x|)$ 基于不等式

$$\sin^2 x \leqslant 4x^2/(1 + x^2), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.3.14}$$

为验证式(6.3.14), 注意 $|\sin x| \leqslant 1 \wedge |x| \leqslant 2|x|/(1 + |x|)$, 由此有

$$\sin^2 x \leqslant \left(\frac{2|x|}{1 + |x|}\right)^2 \leqslant \frac{4x^2}{1 + x^2}.$$

基于以上事实, 从定理 6.3.3 得出

定理 6.3.4 设 Γ_m 与 P_t 分别为 $\mathbb{R}^n$ 上的 Gauss 核与 Poisson 核, F_m 是 $\mathbb{R}$ 上的 Fejér 核. $f \in L^p(\mathbb{R}^n, E)(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. 则 $f * \Gamma_m \to f$, a.e. $(m \to \infty)$. $f * P_t \to f$, a.e. $(t \to 0^+)$. 当 $n = 1$ 时 $f * F_m \to f$, a.e. $(m \to \infty)$. 在以上 3 种情况下, 收敛点包括 f 的连续点且在 f 连续的开集内紧一致收敛.

将以上方法稍作变通后用于 $G = \mathbb{T}^1$ 或 $\mathbb{R}$, 可得

定理 6.3.5 设 $G = \mathbb{T}^1$(或 $\mathbb{R}$), $b = \pi$(或 ∞), $f \in L^1(G, E)$.

(i) 设 φ_m 是 G 上的近似单位, 存在函数 $\psi_m(x)$, 使得 $|\varphi_m(x)| \leqslant \psi_m(x)$, $\psi_m(x)$ 在 $(-b, 0)$ 与 $(0, b)$ 内分别单调增与单调减, $\|\psi_m\|_1 \triangleq \int_{-b}^{b} \psi_m(x)\mathrm{d}x$ 对 m 有界. $\forall \delta \in (0, b)$, $\int_{\delta \leqslant |x| < b} \psi_m(x)\mathrm{d}x \to 0 (m \to \infty)$, 则 $f * \varphi_m \to f$, a.e. $(m \to \infty)$;

(ii) 若 $G = \mathbb{T}^1$, F_m 与 P_r 分别为 $\mathbb{T}^1$ 上的 Fejér 核与 Poisson 核, 则 $f * F_m \to f$, a.e. $(m \to \infty)$, $f * P_r \to f$, a.e. $(r \to 1^-)$;

(iii) 在以上所有情况下, 收敛点包括 f 的连续点, 在 f 连续的开集内紧一致收敛.

证 (i) 取定 f 的 L 点 x, 仍可用式(6.3.12), 只是将其中 $|y| > \delta$ 改为 $\delta < |y| < b$. 令

$$F(y) = \int_0^y \|f(x - t) - f(x)\| \mathrm{d}t.$$

任给 $\varepsilon > 0$. 取 $\delta \in (0, b)$, 使当 $|y| \leqslant \delta$ 时, $|F(y)| \leqslant \varepsilon|y|$, 则

$$I_1 = \int_{-\delta}^{\delta} |\varphi_m(y)| \mathrm{d}F(y) \leqslant \int_{-\delta}^{\delta} \psi_m(y)\mathrm{d}F(y)$$

$$= \psi_m(y)F(y)\Big|_{-\delta}^{\delta} - \int_{-\delta}^{\delta} F(y)\mathrm{d}\psi_m(y)$$

$$\leqslant \varepsilon y\psi_m(y)\Big|_{-\delta}^{\delta} - \varepsilon\int_{-\delta}^{\delta} y\mathrm{d}\psi_m(y)$$

$$= \varepsilon\int_{-\delta}^{\delta}\psi_m(y)\mathrm{d}y \leqslant \varepsilon\|\psi_m\|_1 \leqslant c\,\varepsilon,$$

c 是正常数. 其次,

$$I_2 \leqslant \int_{\delta<|y|<b}\|f(x-y)\|\psi_m(y)\mathrm{d}y \leqslant \|f\|_1[\psi_m(-\delta)+\psi_m(\delta)]$$

$$\leqslant \frac{2\|f\|_1}{\delta}\int_{\delta/2\leqslant|y|\leqslant\delta}\psi_m(y)\mathrm{d}y \leqslant \frac{2\|f\|_1}{\delta}\int_{\delta/2\leqslant|y|<b}\psi_m(y)\mathrm{d}y,$$

可见对固定的 δ 有 $I_2\to 0(m\to\infty)$. 同样有 $I_3\to 0(m\to\infty)$. 因此 $(f*\varphi_m)(x)\to f(x)(m\to\infty)$.

(ii) 利用不等式(6.3.14)及熟知的不等式 $\pi\sin x\geqslant 2x(0\leqslant x\leqslant\pi/2)$ 得

$$F_m(x)\leqslant 2m\pi/(4+m^2x^2)\triangleq\psi_m(x),$$

直接看出 $\psi_m(x)$ 满足(i)中的条件. 其次,即用 $P_r(x)$ 本身作为 $\psi_r(x)$ 自动满足(i)中的条件. 因此这两种情况均可应用(i)的结论.

(iii)成立的理由类似于定理 6.3.3. □

定理 6.3.1 ~ 定理 6.3.5 有多种多样的应用,其中一些应用将在本章后面几节看到. 此处主要强调,上述定理可用来得出函数空间中一些标准的逼近结果. 给定函数空间 X,一个具有基本意义的问题是:求出 X 的稠密子空间或子集 Y,使得 Y 尽可能的"小",且由"充分好"的函数组成. 在这样做时通常要利用以下简单事实:若 Y 在 X 中稠密,而 Z 又在 Y 中稠密,则 Z 必在 X 中稠密(稠密的传递性).

定理 6.3.6 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一非空开集,则以下结论成立:

(i) $C_c^\infty(\Omega,E)$ 在 $L^p(\Omega,E)(1\leqslant p<\infty)$ 中稠密;

(ii) $C_c^\infty(\Omega,E)$ 在 $\mathscr{E}^r(\Omega,E)(0\leqslant r\leqslant\infty)$ 中稠密;

(iii) 系数在 E 中的多项式之全体在 $\mathscr{E}^r(\Omega,E)(0\leqslant r\leqslant\infty)$ 中稠密.

证 (i) 由定理 3.5.1,只需证 $C_c^\infty(\Omega,E)$ 在 $C_c(\Omega,E)$ 中依 L^p 收敛稠密. 取 $\mathbb{R}^n$ 上的 C^∞ 近似单位 φ_m,使得 $\mathrm{supp}\,\varphi_m\subset B_{1/m}(0)$(此种 φ_m 的存在将由引理 6.3.1 补证). 取定 $f\in C_c(\Omega,E)$,f 自然地扩张为 $f\in C_c(\mathbb{R}^n,E)$. 令 $f_m=f*\varphi_m$,则 $f_m\xrightarrow{L^p}f$(由定理 6.3.1),当 m 充分大时由引理 6.2.2 有

$$\mathrm{supp}\,f_m\subset\mathrm{supp}\,f+B_{1/m}(0)\subset\Omega.$$

这结合定理 6.2.3 得 $f_m\in C_c^\infty(\Omega,E)$. 这正表明 $C_c^\infty(\Omega,E)$ 在 $C_c(\Omega,E)$ 中稠密.

(ii) 取 Ω 中紧集的穷竭序列 $\{K_i\}$(由定理 1.3.7),取 $h_i\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$,使得 $K_i\prec h_i\prec K_{i+1}$(由引理 6.3.1). 取 $m_1<m_2<\cdots$,使得 $K_{i+1}+B_{1/m_i}(0)\subset\Omega$. 设 φ_m 如结论(i)之证,$f\in\mathscr{E}^r(\Omega,E)$. 令 $f_i=h_if,g_i=f_i*\varphi_{m_i}$. 由引理 6.2.2 有

$$\mathrm{supp}\,g_i\subset\mathrm{supp}\,h_i+B_{1/m_i}(0)\subset\Omega.$$

再用定理6.2.3得 $g_i \in C_c^\infty(\Omega,E)$. 任给紧集 $K\subset\Omega,\alpha\in\mathbb{Z}_+^n,|\alpha|<r+1$,取 i 充分大,使 $K+B_{1/m_i}(0)\subset K^\circ{}_i$,则

$$\|\partial^\alpha g_i-\partial^\alpha f\|_K=\|\partial^\alpha f_i*\varphi_{m_i}-\partial^\alpha f\|_K\to 0,\quad i\to\infty.$$

最后一步根据定理6.3.1(i),注意在 $K_i{}^\circ$ 上 $\partial^\alpha f_i$ 与 $\partial^\alpha f$ 一致. 这就表明依 $\mathscr{E}^r(\Omega,E)$ 中的拓扑有 $g_i\to f(i\to\infty)$.

(iii) 只要证每个 $f\in C_c^\infty(\Omega,E)$ 可用系数在 E 中的多项式依 $\mathscr{E}^r(\Omega,E)$ 中的拓扑逼近. 设 Γ_m 是 Gauss 核,令 $f_m=f*\Gamma_m$,则 $\forall\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$,有 $\partial^\alpha f_m\rightrightarrows\partial^\alpha f(m\to\infty$, 由定理6.3.1(i)与式(6.2.12)). 因

$$f_m(x)=\left(\frac{m}{\sqrt{\pi}}\right)^n\int_{\mathbb{R}^n}f(y)\exp[-m^2\sum_j(x_j-y_j)^2]\mathrm{d}y$$

可扩张为 $x\in\mathbb{C}^n$ 上的解析函数,故截取其 Taylor 展开式(由定理4.2.2)得到多项式 h_m,使得

$$\sup_{|\alpha|\leqslant m,|x|\leqslant m}\|\partial^\alpha f_m(x)-\partial^\alpha h_m(x)\|<1/m,\quad m\in\mathbb{Z}.$$

由此可见在 $\mathscr{E}^r(\Omega,E)$ 中 $h_m\to f(m\to\infty)$. □

定理6.3.6有广泛的应用,此处仅用来得出几个简单而有趣的推论. 首先,从定理6.3.6(iii)直接推出:

推论6.3.1 若 E 可分,则 F 空间 $\mathscr{E}^r(\Omega,E)(0\leqslant r\leqslant\infty)$ 可分. 特别地,空间 $\mathscr{E}^r(\Omega)$ 必可分.

任给紧集 $K\subset\mathbb{R}^n$,$f\in C(K)$,总可将 f 扩张为 $f\in C_c(\mathbb{R}^n)$ (由定理1.3.6(iii)). 于是可应用定理6.3.6(iii)得出

推论6.3.2 若 $K\subset\mathbb{R}^n$ 是紧集,$f\in C(K)$,则 f 可用多项式一致逼近.

这就重新得到了推论5.4.1(i).

现在补证在定理6.3.6证明中用到的引理.

引理6.3.1 (i) 设 $K\subset V\subset\mathbb{R}^n$,$K$ 是紧集,V 是开集,则存在 $h\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n,[0,1])$,使得 $K<h<V$;

(ii) 存在 $\mathbb{R}^n$ 上的 C^∞ 近似单位 φ_m,使得 $\operatorname{supp}\varphi_m\subset B_{1/m}(0)$.

其中,结论(i)可看成定理1.3.6(ii)的一个加强,Folland(1984)称其为"C^∞ Urysohn 引理".

证 (i) 设 $a\in\mathbb{R}^n$,$r>0$. 令

$$g(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^{-1/x}, & x>0,\end{cases}$$

$$\varphi(x)=\frac{r(2r-|x-a|)}{g(2r-|x-a|)+g(|x-a|-r)},\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

则用初等方法可验证 $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^n,[0,1])$,$B_r(a)<\varphi<B_{3r}(a)$.

任给 $x \in K$，取 $r_x > 0$，使得 $B_{3r_x}(x) \subset V$. 取有限个 $x_i \in K, r_i = r_{x_i}$，使得 $K \subset \cup B_{r_i}(x_i)$. 由已证结论有 $h_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n,[0,1])$，使得 $B_{r_i}(x_i) < h_i < B_{3r_i}(x_i)$. 令

$$h(x) = 1 - \prod_i [1 - h_i(x)], \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

则直接看出 $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n,[0,1])$，$K < h < V$.

(ii) 由已证的(i)有 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n,[0,1])$，使得 $\{0\} < \varphi < B_1(0)$. 令 $\varphi_m(x) = c_m\varphi(mx)$，其中，$c_m > 0$ 决定于 $\|\varphi_m\|_1 = 1$，则 $\mathrm{supp}\,\varphi_m \subset B_{1/m}(0)$，$\varphi_m$ 即为所求的近似单位. □

定理 6.3.1 ~ 定理 6.3.5 还可用于方程问题，这涉及一个极富有内容的专题，此处仅举一例作点说明. 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$，P_t 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 Poisson 核. 令

$$\begin{aligned} u(t,x) &= (f * P_t)(x) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{n+1} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{tf(\xi)}{(t^2 + |x-\xi|^2)^{(n+2)/2}} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{6.3.15}$$

则由直接计算可验证 $u_{tt} + \Delta u = 0$，Δ 是 Laplace 算子. 由定理 6.3.1 与定理 6.3.3，当 $t \to 0^+$ 时依 L^1 收敛与几乎处处收敛有 $u(t,x) \to f(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. 这就得到

推论 6.3.3　由式(6.3.15)表示的函数 $u(t,x)$ 是 Laplace 方程 $u_{tt} + \Delta u = 0$ 在半空间 $(0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ 内的解，当 $t \to 0^+$ 时，$u(t,x)$ 几乎处处收敛与 L^1 收敛到给定的边界值函数 $f(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$.

若取 $n = 1$，则式(6.3.15) 成为上半平面上的调和函数（以 y 换 t）

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(\xi)}{y^2 + |x-\xi|^2} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}, y > 0.$$

6.4　Fourier 级数

本章引言中提到，Fourier 分析的基本课题之一就是将 G 上的一定类型函数依某个标准的函数系分解. 就 $G = \mathbb{T}^n$ 的情况而言，合适的标准函数系就是 $\{e_k : k \in \mathbb{Z}^n\}$，$e_k(x) = e^{ik\cdot x}$. 选择这个函数系的较传统的理由是：$e_k$ 的有限线性组合就是三角多项式，它是用来表达周期量的理想工具. 现在要进而指出的一个理由是：在函数空间 $L^1(\mathbb{T}^n)$ 中，函数系 $\{e_k\}$ 有很特殊的“代数性质”. 首先，易验证公式

$$e_k * e_l = (2\pi)^n \delta_{kl} e_k, \tag{6.4.1}$$

这表明 $\{e_k\}$ 依卷积有某种“正交性”. 而利用式(6.4.1)又推出一个重要事实：若 f 可依函数系 $\{e_k\}$ 分解为 $f = \sum c_k e_k$，则

$$f * e_k = \sum_l c_l e_l * e_k = c_k (2\pi)^n e_k. \tag{6.4.2}$$

因此，若以 Δ 表示由 $\{e_k\}$ 生成的向量空间（它就是三角多项式之全体，下面保持 Δ

这一记号)，则 Δ 必为卷积代数 $L^1(\mathbb{T}^n)$ 中的一个理想：$f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ 与任何三角多项式的卷积仍为三角多项式. 由式(6.4.2)得到

$$c_k = (2\pi)^{-n}(f * e_k)(0).$$

这就清楚了：分解式 $f = \sum c_k e_k$ 中的系数 c_k 依上式唯一确定. 下面的讨论就从一个与上述 c_k 有关的定义开始.

定义 6.4.1 任给 $f \in L^1(\mathbb{T}^n, E)$，$k \in \mathbb{Z}^n$，令

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^n}(f * e_k)(0) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k \cdot x}\mathrm{d}x, \tag{6.4.3}$$

称 $\hat{f}(k)$ $(k \in \mathbb{Z}^n)$ 为 f 的 **Fourier 系数**. 称形式和

$$\sum_k \hat{f}(k) e_k \tag{6.4.4}$$

为 f 的 **Fourier 级数**，其中，求和指标 $k \in \mathbb{Z}^n$（以下保持此约定而不注出）.

式(6.4.3)中的积分显然存在且 $\|\hat{f}(k)\| \leqslant (2\pi)^{-n}\|f\|_1$. 若 $k \neq 0$，则

$$\begin{aligned}
2\|\hat{f}(k)\| &= \|\hat{f}(k) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\hat{f}(k)\| \\
&= \left\|\hat{f}(k) - \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x - k\pi|k|^{-2})}\mathrm{d}x\right\| \\
&\leqslant \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n}\left\|f(x) - f\left(x + \frac{k\pi}{|k|^2}\right)\right\|\mathrm{d}x \\
&= (2\pi)^{-n}\|f - f_a\|_1 \to 0, \quad a = \pi k|k|^{-2} \to 0.
\end{aligned}$$

最后一步用了定理 6.1.3. 可见 $\hat{f}(k) \to 0$ $(|k| \to \infty)$，因此 $\hat{f} \in C_0(\mathbb{Z}^n, E)$（记号依式(1.3.6)，注意 $\mathbb{Z}^n$ 是一个 LCH). 于是定义 6.4.1 实际上界定出以下映射：

$$F: L^1(\mathbb{T}^n, E) \to C_0(\mathbb{Z}^n, E), \quad f \to \hat{f}, \tag{6.4.5}$$

称之为 $\mathbb{T}^n$ 上的 **Fourier 变换**. 我们将看到，对于 Fourier 系数的这一理解具有本质意义. 以 $c_k = \hat{f}(k)$ 代入式(6.4.2)，得到

$$f * e_k = (2\pi)^n \hat{f}(k) e_k. \tag{6.4.2$'$}$$

要强调指出，定义 6.4.1 中真正本质的东西是给出变换(6.4.5). 至于 Fourier 级数(6.4.4)，在目前徒具形式而已，并无超出 Fourier 系数之外的实质含义. 与传统微积分学不同，此处的关注点不是个别函数的 Fourier 系数，而是施于整个空间 $L^1(\mathbb{T}^n, E)$ 上的 Fourier 变换(6.4.5)，乃是一系列重大理论演进的开端，其丰富结果要在稍后的讨论中才得以充分展开. 即使在目前，变换的观点也有助于形成并清晰表述一些初步结果. 在以下命题中，Fourier 系数的一些性质已被看成是 Fourier 变换的运算性质，因而获得某种一般意义.

命题 6.4.1 Fourier 变换(6.4.5)有以下性质：

(i) F 是一个有界线性算子且 $\|F\| \leqslant (2\pi)^{-n}$；

(ii) 卷积公式：若 $f \in L^1(\mathbb{T}^n, E)$，$g \in L^1(\mathbb{T}^n)$，则

$$(f*g)^{\wedge}=(2\pi)^n\hat{f}\hat{g}. \tag{6.4.6}$$

这加上易验证的公式 $\widehat{g^*}=\overline{\hat{g}}$ 得出：若在$\mathbb{T}^n$ 中采用正规化的 Haar 测度 $d\mu=(2\pi)^{-n}dx$，则变换 $L^1(\mathbb{T}^n)\to C_0(\mathbb{Z}^n)$，$f\to\hat{f}$ 是一个（ $*$ ）代数同态（见 5.4 节），此处 $L^1(\mathbb{T}^n)$ 看成卷积代数；

（iii）平移规则：$(\tau_a f)^{\wedge}=e_a\hat{f}$，$\tau_k\hat{f}=(e_{-k}f)^{\wedge}$ $(f\in L^1(\mathbb{T}^n,E),a\in\mathbb{R}^n,k\in\mathbb{Z}^n)$；

（iv）微分公式：设 $P(x)$ 是$\mathbb{R}^n$ 上的一个 r 次多项式，$\mathrm{D}=-\mathrm{i}\partial$，$\partial=(\partial_1,\partial_2,\cdots,\partial_n)$，$\partial_j=\partial/\partial x_j$，$f\in C^r(\mathbb{T}^n,E)$，则

$$(P(\mathrm{D})f)^{\wedge}=P\hat{f}, \tag{6.4.7}$$

这意味着 $(P(\mathrm{D})f)^{\wedge}(k)=P(k)\hat{f}(k)\ (k\in\mathbb{Z}^n)$. 特别地，

$$(\mathrm{D}^\alpha f)^{\wedge}(k)=k^\alpha\hat{f}(k),\quad k\in\mathbb{Z}^n,|\alpha|\leqslant r. \tag{6.4.8}$$

以上结论均不难利用定义式(6.4.3)直接验证. 例如，

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}^\alpha f)^{\wedge}(k)&=(2\pi)^{-n}((D^\alpha f)*e_k)(0)\\&=(2\pi)^{-n}(f*D^\alpha e_k)(0)\\&=(2\pi)^{-n}(f*k^\alpha e_k)(0)=k^\alpha\hat{f}(k),\end{aligned}$$

其中，$\mathrm{D}^\alpha e_k=k^\alpha e_k$ 是明显的. 此处显示出以 D 替代 ∂ 的好处.

命题 6.4.1 的结论下面将反复用到. 此处只指出式(6.4.8)的以下推论：若 $f\in C^r(\mathbb{T}^n,E)\ (0\leqslant r<\infty)$，则

$$\|\hat{f}(k)\|=o(|k|^{-r}),\quad |k|\to\infty. \tag{6.4.9}$$

粗略地说，函数越光滑，其 Fourier 系数就下降越快. 对于非光滑函数的 Fourier 系数，也可能由其他条件得出某种（当然较粗）估计，下面就是一例.

命题 6.4.2　设 $f\in \mathrm{BV}(\mathbb{T}^1,E)$，则

$$\|\hat{f}(k)\|=O(|k|^{-1}),\quad |k|\to\infty. \tag{6.4.10}$$

证　任给 $k\in\mathbb{Z}$，不妨设 $k>0$（$k<0$ 可类似处理），则

$$\begin{aligned}4\pi k\|\hat{f}(k)\|&=2k\left\|\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}dx\right\|\\&=\left\|\sum_{j=1}^{k}\Big[\int_{(j-1)\pi/k}^{2\pi+(j-1)\pi/k}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}dx-\int_{j\pi/k}^{2\pi+j\pi/k}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-\pi/k)}dx\Big]\right\|\\&\leqslant\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{k}\left\|f\Big(x+\frac{j\pi}{k}\Big)-f\Big(x+\frac{(j-1)\pi}{k}\Big)\right\|dx\leqslant 2\pi\mathrm{V}(f),\end{aligned}$$

其中，$\mathrm{V}(f)=\mathrm{V}_0^{2\pi}(f)$. 这显然得出式(6.4.10).　□

Fourier 级数的收敛性，无疑是 Fourier 级数理论的中心问题. 如已指出的，此问

题并不简单. 不过,对于“充分好”的函数,Fourier 级数的收敛性倒不成问题.

定理 6.4.1 设$f \in C^r(\mathbb{T}^n, E)$, $n < r \leqslant \infty$ ①,则f的 Fourier 级数在空间 $\mathscr{E}^{r-n-1}(\mathbb{T}^n, E)$ 中收敛于f.

关于 Banach 空间 $\mathscr{E}^r(\mathbb{T}^n, E)$(当 $r = \infty$ 时是 F 空间)参看 2.2 节.

证 只需考虑 $r = n + 1$ 的情况(反复运用已得结果即得一般情况). 由估计式(6.4.9)有 $\|\hat{f}(k)\| = o(|k|^{-n-1})(|k| \to \infty)$,这推出 $\sum \|\hat{f}(k)\| < \infty$. 因此, Fourier 级数 $\sum \hat{f}(k) e_k$ 在$\mathbb{R}^n$ 上的绝对并一致收敛于某个函数$f_0 \in C(\mathbb{T}^n, E)$. 余下证$f = f_0$. 不妨设$E = \mathbb{C}$(否则考虑$\varphi \circ f, \varphi \in E^*$,然后用推论1.6.1). 令$g = f - f_0$,则$\hat{g}(k) \equiv 0$. 因$g \in C(\mathbb{T}^n)$, 而$\Delta$在$C(\mathbb{T}^n)$中稠密(推论5.4.1),故 $\forall \varepsilon > 0$,有 $h \in \Delta$,使 $\|g - h\|_0 < \varepsilon$. 于是

$$\begin{aligned}\|g\|_2^2 = \int_{\mathbb{T}^n} g\bar{g} \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{T}^n} g(\bar{g} - \bar{h}) \mathrm{d}x \\ &\leqslant \varepsilon \|g\|_1 \leqslant \varepsilon \|g\|_2 (2\pi)^{n/2},\end{aligned}$$

其中用到 $\int_{\mathbb{T}^n} g\bar{h} \mathrm{d}x = 0$ 与 Hölder 不等式,前者由 $\hat{g}(k) \equiv 0$ 推出. 由以上不等式推出 $\|g\|_2 = 0$,因而 $g = 0$,即$f = f_0$,如所要证. □

定理 6.4.1 并不能完全令人满意:它要求的条件太强了. Fourier 级数理论的开创者们甚至相信,只需f连续就够了. 下面对f不作任何可微性假设. 考虑到问题的复杂性,只讨论$f \in L^1(\mathbb{T}^1, E)$的情况. 沿用微积分学中的作法,构成 Fourier 级数的对称部分和

$$f_m \triangleq \sum_{|k| \leqslant m} \hat{f}(k) e_k = f * D_m, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{6.4.11}$$

其中用了式(6.4.2)′, D_m 是 Dirichlet 核. 取定 $x \in \mathbb{T}^1$,设$f(x^{\pm})$存在,令

$$2s = f(x^+) + f(x^-). \tag{6.4.12}$$

现在的任务是寻求使$f_m(x) \to s$的条件. 为此,利用式(6.4.11)与式(6.3.2)表出

$$\begin{aligned}f_m(x) - s &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x - y) - s] D_m(y) \mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\pi} [f(x + y) + f(x - y) - 2s] \frac{\sin(m + 1/2)}{2\pi \sin(y/2)} \mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{6.4.13}$$

为估计以上积分,需用到下面将建立的两条引理,它们亦将为下节所用.

引理 6.4.1 若 $g \in L^1((a,b), E)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$,则

$$\lim_{|\beta| \to \infty} \int_a^b g(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x} \mathrm{d}x = 0.$$

---

① 一个稍精细的分析可显著降低 r(如 $r > n/2$),当然也要相应修改 $\mathscr{E}^{r-n-1}$.

证　由定理6.3.6(i),不妨设 $g \in C_c^1((a,b),E)$,因而可用分部积分得出.　□

引理 6.4.2　设 $\varphi \in L^1([0,b),E)$, $0 < b \leqslant \infty$, 存在 $\delta_0 \in (0,b)$,使 $\varphi | [0,\delta_0] \in \mathrm{BV}$(记号依定义3.7.1),则

$$\lim_{\beta\to\infty}\int_0^b \varphi(x)\,\frac{\sin\beta x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\varphi(0^+).$$

证　不妨设 $\varphi(0) = \varphi(0^+)$, 进而可设 $\varphi(0) = 0$(否则以 $\varphi(x) - \varphi(0)$ 取代 $\varphi(x)$,注意 $\int_0^\infty x^{-1}\sin x\,\mathrm{d}x = \pi/2$). 令 $F(x) = \int_0^x t^{-1}\sin\beta t\mathrm{d}t$,则

$$\left\| \int_0^\delta \varphi(x)\mathrm{d}F(x) \right\| = \left\| \varphi(\delta)F(\delta) - \int_0^\delta F(x)\mathrm{d}\varphi(x) \right\|$$
$$\leqslant \|F\|_0[\|\varphi(\delta)\| + \mathrm{V}_0^\delta(\varphi)] \to 0, \quad \delta \to 0.$$

这结合应用引理6.4.1,即得所要证.　□

作了以上准备之后,现在已可建立关于 Fourier 级数点态收敛的以下基本结果:

定理 6.4.2　设 $f \in L^1(\mathbb{T}^1,E)$, $x \in \mathbb{T}^1$, s 依式(6.4.12)有定义, $f_m = f * D_m$, 则以下结论成立:

(i) **局部性原理**: $f_m(x) \to s$ 成立与否仅决定于 f 在 x 邻近的状态;

(ii) **Dini 判别法**:若存在 $\delta \in (0,\pi)$,使 $y^{-1}\|f(x+y) + f(x-y) - 2s\| \in L^1[0,\delta]$,则 $f_m(x) \to s$. 特别地,当以下条件之一满足时, $f_m(x) \to s$(以下 $\alpha > 1$):

$$\|f(x+y) + f(x-y) - 2s\| = O(|\ln y|^{-\alpha}), \quad y \to 0^+, \tag{6.4.14a}$$
$$\|f(x\pm y) - f(x^\pm)\| = O(|\ln y|^{-\alpha}), \quad y \to 0^+, \tag{6.4.14b}$$
$$\|f(x\pm y) - f(x^\pm)\| = O(y^{\alpha-1}), \quad y \to 0^+, \tag{6.4.14c}$$
$$\text{单边导数} f'_\pm(x) = \lim_{y\to 0^\pm} y^{-1}[f(x+y) - f(x^\pm)] \text{ 存在}; \tag{6.4.14d}$$

(iii) **Jordan 判别法**:若存在 $\delta > 0$,使 $f | [x-\delta, x+\delta] \in \mathrm{BV}$,则 $f_m(x) \to s$;

(iv) **一致收敛性**:若 $f \in C(\mathbb{T}^1,E) \cap \mathrm{BV}$,则 $f_m \rightrightarrows f$.

证　(i) 任给 $\delta \in (0,\pi)$, 由式(6.4.13)有

$$f_m(x) - s = \int_0^\pi g(y)\sin\frac{2m+1}{2}y\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^\delta + \int_\delta^\pi \triangleq I_1 + I_2, \tag{6.4.15}$$
$$g(y) = \frac{f(x+y) + f(x-y) - 2s}{2\pi\sin(y/2)}.$$

因显然有 $g \in L^1([\delta,\pi],E)$,故由引理6.4.1有 $I_2 \to 0(m\to\infty)$,因而 $f_m(x) \to s \Leftrightarrow I_1 \to 0(m \to \infty)$,后者仅决定于 f 在 $[x-\delta, x+\delta]$ 上的性质.

(ii) 设 I_1, I_2, g 依式(6.4.15),则在 Dini 判别法的条件下有

$$g(y) = \frac{f(x+y) + f(x-y) - 2s}{y} \cdot \frac{y}{2\pi\sin(y/2)} \in L^1[0,\delta],$$

因而由引理 6.4.1 有 $I_1 \to 0(m\to\infty)$,这推出 $f_m(x)\to s$.

(iii) 将式(6.4.13)改写成

$$f_m(x) - s = \int_0^{\pi} \varphi(y) \frac{\sin(m+1/2)y}{y} \mathrm{d}y,$$

$$\varphi(y) = [f(x+y) + f(x-y) - 2s] \frac{y}{2\pi \sin(y/2)}.$$

则 $\varphi(0^+) = 0$. 而由 $f \mid [x-\delta, x+\delta] \in \mathrm{BV}$ 推出 $\varphi \mid [0,\delta] \in \mathrm{BV}$. 于是可用引理 6.4.2 得出 $f_m(x) \to s(m\to\infty)$.

(iv) 任给 $x \in [-\pi,\pi]$,由式(6.4.13) 有

$$f_m(x) - f(x) = \int_0^{\delta} \varphi_x(y) \frac{\sin \beta_m y}{y} \mathrm{d}y + \int_{\delta}^{\pi} g_x(y) \sin \beta_m y \mathrm{d}y \triangleq I_1 + I_2,$$

其中, $\delta \in (0,\pi)$, $\beta_m = m + 1/2$,

$$\varphi_x(y) = y g_x(y) = \frac{y[f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)]}{2\pi \sin(y/2)}.$$

令 $F_m(y) = \int_0^y t^{-1} \sin \beta_m t \mathrm{d}t$,则 $F_m(y)$ 对 m,y 一致有界. 如同引理 6.4.2 之证有

$$\| I_1 \| \leqslant \mathrm{const}[\| \varphi_x(\delta) \| + \mathrm{V}_0^{\delta}(\varphi_x)].$$

由 f 一致连续推出:当 $\delta \to 0$ 时关于 x 一致地有 $\| \varphi_x(\delta) \| \to 0$. 其次,

$$\begin{aligned}\mathrm{V}_0^{\delta}(\varphi_x) &\leqslant \mathrm{const}\ \mathrm{V}_0^{\delta}(f(x+\cdot) + f(x-\cdot)) \leqslant \mathrm{const}\ \mathrm{V}_{x-\delta}^{x+\delta}(f) \\ &= \mathrm{const}\ [v(x+\delta) - v(x-\delta)],\end{aligned}$$

其中, $v(x) = \mathrm{V}_{-2\pi}^{x}(f)$ 连续(用定理 3.7.1(iii)),因此当 $\delta \to 0$ 时关于 $x \in [-\pi,\pi]$ 一致地有 $\mathrm{V}_0^{\delta}(\varphi_x) \to 0$. 因 $g_x(y)$ 在 $[\delta,\pi]$ 上对 x 一致有界,故

$$\begin{aligned}\| I_2 \| &= \frac{1}{\beta_m} \left\| g_x(y) \cos \beta_m y \Big|_{\pi}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \cos \beta_m y \mathrm{d} g_x(y) \right\| \\ &\leqslant \beta_m^{-1} [\mathrm{const} + \mathrm{V}_{\delta}^{\pi}(g_x)].\end{aligned}$$

易见 $\mathrm{V}_{\delta}^{\pi}(g_x)$ 对 $x \in [-\pi,\pi]$ 有界,因此对 x 一致地有 $I_2 \to 0(m\to\infty)$.

综上,知 $f_m(x) \rightrightarrows f(x)(m\to\infty, |x| \leqslant \pi)$. □

在定理 6.4.2 中,“局部性原理”是最值得注意且颇令人惊异的. 只要想想,如果除了某个极小的区间 $(x-\delta, x+\delta)$ 之外,剧烈地改变 f(当然仍保持其周期性及在 $\mathbb{T}^1$ 上的可积性),则 $\hat{f}(k)$ 一般会显著改变,但这并不影响 Fourier 级数在点 x 的收敛性! 注意这与解析函数的性质恰好相反: $f \in H(\Omega)$ 在任意局部的改变(但仍保持解析性)必定导致 f 在整个解析区域 Ω 内的改变(见 4.1 节).

定理 6.4.2 的收敛性条件固然能为许多常用的函数(如分段单调或分段可微函数)所满足,但毕竟不能为一般的可积函数甚至连续函数所满足. 而且,对于连

续周期函数的 Fourier 级数的收敛性,从定理 6.4.2 得不出任何结论.

认识到 Fourier 级数收敛并不平凡,经历了长期的探索. Fourier 本人并未觉察到 Fourier 级数的收敛性是一个问题. Fourier 之后很多年,人们至少不怀疑连续函数的 Fourier 级数的收敛性. 只是到 1873 年,Du Bois-Reymond 举出了第一个 Fourier 级数并不处处收敛的连续函数的例子之后,人们才开始意识到连续性不足以保证 Fourier 级数收敛,因而探求 Fourier 级数收敛的严格条件成为必要. 今天,我们知道,在 Fourier 级数收敛性这一点上,连续函数远比人们所想象的要差. 试看下面这个否定性结果.

定理 6.4.3　设正数列 $\{\beta_m\}$ 使 $\beta_m \ln m$ 无界,则存在第一纲集 $F \subset C(\mathbb{T}^1, E)$,使得 $\forall f \in F^c$,

$$A_f \triangleq \{x: \sup_m \|\beta_m f_m(x)\| < \infty\} \tag{6.4.16}$$

是 $\mathbb{T}^1$ 中的第一纲集,其中,$f_m = f * D_m$.

若取 $\beta_m = 1$,则定理 6.4.3 的结论可粗略地表述为:几乎每个连续周期函数的 Fourier 级数在一第二纲集上发散. 这就表明了:连续函数的 Fourier 级数收敛性差并非病态,而是常态. 这与是否容易构成其 Fourier 级数在一稠集上发散的连续函数例子并无关系.

证　取定 $x \in \mathbb{T}^1$. 定义 $T_m f = \beta_m f_m(x)$,则直接看出 $T_m \in L(C(\mathbb{T}^1, E), E)$. 取 $a \in E$,使 $\|a\| = 1$. 取 $\varphi_{mk} \in C(\mathbb{T}^1)$,使得 $\varphi_{mk}(y) \to \operatorname{sgn} D_m(x-y)$, a.e. $(k \to \infty)$ 且 $\|\varphi_{mk}\|_0 = 1$(用定理 3.4.2). 显然 $a\varphi_{mk} \in C(\mathbb{T}^1, E)$, $\|a\varphi_{mk}\|_0 = 1$. 于是

$$\begin{aligned}
\|T_m\| &\geqslant \lim_k \|T_m(a\varphi_{mk})\| = \lim_k \beta_m |(\varphi_{mk} * D_m)(x)| \\
&= \beta_m \|D_m\|_1 = \frac{\beta_m}{\pi}\int_0^\pi \left|\frac{\sin(m+1/2)}{\sin(y/2)}\right| \mathrm{d}y \\
&\geqslant \frac{2\beta_m}{\pi}\int_0^{m\pi} \frac{|\sin y|}{y}\mathrm{d}y \geqslant \frac{4\beta_m}{\pi^2}\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \\
&= \frac{4\beta_m}{\pi^2}[\ln m + O(1)],
\end{aligned}$$

这得出 $\sup_m \|T_m\| = \infty$. 由一致有界原理,

$$F_x \triangleq \{f \in C(\mathbb{T}^1, E): \sup_m \|T_m f\| < \infty\}$$

是第一纲集. 取可数稠集 $\{x_i\} \subset \mathbb{T}^1$,则 $F = \cup F_{x_i}$ 是 $C(\mathbb{T}^1, E)$ 中的第一纲集. 任给 $f \in F^c$,设 A_f 依式(6.4.16),则

$$A_f = \bigcup_{k=1}^\infty \{x \in \mathbb{T}^1: \sup_m \beta_m \|f_m(x)\| \leqslant k\} \triangleq \bigcup_{k=1}^\infty A_f^k.$$

任给 $k \geqslant 1$, A_f^k 显然为闭集. 由 $f \in F^c$ 推出 $\{x_i\} \cap A_f^k = \varnothing$, 因而 A_f^k 必无内点,故为疏集,因此 A_f 是第一纲集. □

必须强调的是,断定 $\{f_m\}$ 在一个第二纲集上发散,并不意味着 $\{f_m\}$ 的收敛点一定很少[①]. Caleson(1966)证明了如下可惊结果:若 $f \in L^2(\mathbb{T}^1)$,则必 $f * D_m \to f$, a.e. $(m \to \infty)$. 这一结果又被 Hunt 于 1967 年改进成对 $f \in L^p(\mathbb{T}^1)(p > 1)$ 成立. 由此特别推出,对于 $f \in C(\mathbb{T}^1)$ 有 $f * D_m \to f$, a. e.. 可见,在几乎处处收敛的意义上,连续函数的 Fourier 级数收敛性其实并不差. Hunt 的深刻结果已无法再改进了,因早在 1926 年,Kolmogorov 即已举出 Fourier 级数处处发散的 L^1 函数的例子.

定理 6.4.3 说明了,即使对于 $f \in C(\mathbb{T}^1, E)$, $f * D_m$ 也表现出很复杂的渐近行为,这无疑与核 D_m 的性质欠佳有关(D_m 不是近似单位!). 为改进 Fourier 级数的收敛性,可考虑如下基本策略:取适当的近似单位 φ_m,以 $(f * \varphi_m)^\wedge(k)$ 取代 $\hat{f}(k)$. 因函数 $f * \varphi_m$ 可能优于 f,故可以期望

$$f * \varphi_m = \sum_k (f * \varphi_m)^\wedge(k) e_k. \tag{6.4.17}$$

然后通过一个极限过程,或许可以得出

$$f(x) = \sum_k \hat{f}(k) e_k(x). \tag{6.4.18}$$

下面准确地描述为实现上述设想所需之条件.

引理 6.4.3 设 φ_m 是 $\mathbb{T}^n$ 上的近似单位, $f \in L^1(\mathbb{T}^n, E)$,以下条件满足:

(i) φ_m 的 Fourier 级数处处绝对收敛于 φ_m;

(ii) $f * \varphi_m \to f$, a. e. $(m \to \infty)$,

则式(6.4.17)成立且其右端级数绝对收敛,

$$f(x) = \lim_m (2\pi)^n \sum_k \hat{\varphi}_m(k) \hat{f}(k) e_k(x), \text{ a. e.}. \tag{6.4.19}$$

若进而设 $\hat{f} \in l^1(\mathbb{Z}^n, E)$,则式(6.4.18)几乎处处成立. 若 $f \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$, $\hat{f}, \hat{\varphi}_m \geqslant 0$,则不必验证条件 $\hat{f} \in l^1$ 且条件 $f \in L^\infty$ 可代以条件 $(f * \varphi_m)(0) \to f(0)$.

证 由条件(i)及控制收敛定理有

$$\begin{aligned}(f * \varphi_m)(x) &= \int_{\mathbb{T}^n} f(y) \sum_k \hat{\varphi}_m(k) e_k(x - y)\,dy \\ &= \sum_k \hat{\varphi}_m(k)(f * e_k)(x) \\ &= (2\pi)^n \sum_k \hat{\varphi}_m(k) \hat{f}(k) e_k(x),\end{aligned}$$

这表明式(6.4.17)成立. 由 $\hat{f}(k)$ 有界及条件 (i)知上式右端级数绝对收敛,然后用条件(ii)推出式(6.4.19). 由定理 6.3.1(i)有

$$(2\pi)^n \hat{\varphi}_m(k) = (\varphi_m * e_k)(0) \to e_k(0) = 1, \quad m \to \infty.$$

因 $|\hat{\varphi}_m(k)| \leqslant (2\pi)^{-n} \|\varphi_m\|_1 \leqslant \text{const}$ (用定义 6.3.1(A_3)),故当 $\hat{f} \in l^1$ 时可用控

---

① 见 23 页注①.

制收敛定理从式(6.4.19)得出式(6.4.18)几乎处处成立.

若$f \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$,$\hat{f}(k)$,$\hat{\varphi}_m(k) \geqslant 0$, 则由 Fatou 定理有

$$0 \leqslant \sum_k \hat{f}(k) = (2\pi)^n \sum_k \lim_m \hat{\varphi}_m(k)\hat{f}(k)$$

$$\leqslant \varliminf_m (2\pi)^n \sum_k \hat{\varphi}_m(k)\hat{f}(k) = \varliminf_m (f * \varphi_m)(0).$$

由式(6.2.2)有 $(f*\varphi_m)(0) \leqslant \|f\|_\infty \|\varphi_m\|_1 \leqslant \text{const}$,故得$\hat{f} \in l^1$. □

与定理6.4.2 比较,引理 6.4.3 的收敛性结论有两大优势. 其一是具有整体性:断定式(6.4.18)几乎处处成立,而不是在某个个别点成立;其二是它不受维数 n 的限制.

今取 $\mathbb{T}^1$ 上的 Fejer核 F_m 与 Poisson 核 P_r 应用引理6.4.3. 首先由定理6.4.1 推出二者都满足引理 6.4.3 中的条件(i). 其次不难算出

$$\hat{F}_m(k) = \frac{1}{2\pi}\left(1 - \frac{|k|}{m}\right)^+, \quad \hat{P}_r(k) = \frac{r^{|k|}}{2\pi}. \tag{6.4.20}$$

这结合定理6.3.5 与引理6.4.3 得到

定理 6.4.4 设$f \in L^1(\mathbb{T}^1,E)$, 则对几乎所有 x 成立

$$f(x) = \lim_m \sum_{|k|<m}\left(1 - \frac{|k|}{m}\right)\hat{f}(k)e^{ikx}, \tag{6.4.21}$$

$$f(x) = \lim_{r \to 1^-} \sum_k r^{|k|}\hat{f}(k)e^{ikx}. \tag{6.4.22}$$

式(6.4.21), 式(6.4.22)在f的连续点 x 必成立, 在f连续的开集内任何紧集上一致地成立. 若进而设$\hat{f} \in l^1(\mathbb{Z},E)$,则成立

$$f(x) = \sum_k \hat{f}(k)e^{ikx}, \text{a. e.}. \tag{6.4.23}$$

当$f \in L^\infty(\mathbb{T}^1)$,$\hat{f}(k) \geqslant 0$ 时不必验证条件$\hat{f} \in l^1$, 条件$f \in L^\infty$ 可代以f在 $x = 0$ 连续.

以$f * \varphi_m$ 的 Fourier 级数取代f的 Fourier 级数,称为 Fourier 级数的"φ_m 平均求和法",可以认为它相当于在未必收敛的 Fourier 级数(6.4.4)中引进收敛因子$(2\pi)^n\hat{\varphi}_m(k)$. 当 φ_m 分别取为 Fejér 核与 Poisson 核时,上述的 φ_m 平均求和法分别称为 **Cesàro 求和法**与 **Abel-Poisson 求和法**.

取 $n = 1$. 从 $F_m = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} D_k$ 看出$f * F_m$ 实际上是$f * D_k(0 \leqslant k < m)$ 的算术平均. $f * P_r$ 则可看成对 $\sum \hat{f}(k)e_k$ 所作的某种"Abel 平均". 这两种平均求和法都可用到完全与 Fourier 级数无关的级数求和上. 给定 $\{a_k : k \in \mathbb{Z}\} \subset E$, 分别令

$$S_m = \sum_{|k| \leqslant m} a_k, \quad \sigma_m = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} S_k, \quad A_r = \sum_k r^{|k|} a_k,$$

则有以下结果:

定理 6.4.5 (i) 若 $S_m \to S$,则 $\sigma_m \to S(m \to \infty)$;

(ii) 若 $\sigma_m \to \sigma(m \to \infty)$,则 $A_r \to \sigma(r \to 1^-)$.

以上结论表明,3 种求和法收敛的机会是依次增加的.

证 (i)是明显的,只需证(ii). $\forall \varepsilon > 0$,取 $m \in \mathbb{N}$,使当 $k > m$ 时 $\| \sigma_k - \sigma \| < \varepsilon$. 利用 $(1-r)^{-2} = \sum_0^\infty (k+1) r^k$ 估计

$$\begin{aligned}\| A_r - \sigma \| &= \left\| a_0 + \sum_{k=1}^\infty (a_k + a_{-k}) r^k - \sigma \right\| \\ &= (1-r)^2 \left\| \sum_{k=1}^\infty (S_0 + \cdots + S_{k-1}) r^{k-1} - \sum_{k=1}^\infty \sigma\, k r^{k-1} \right\| \\ &\leqslant (1-r)^2 \sum_{k=1}^\infty k \| \sigma_k - \sigma \| r^{k-1} \\ &\leqslant (1-r)^2 \sum_{k=0}^m k \| \sigma_k - \sigma \| + \varepsilon,\end{aligned}$$

这推出 $A_r \xrightarrow{\bullet} \sigma(r \to 1^-)$. □

从定理 6.4.5 看来,使用求和式(6.4.22)似乎强于式(6.4.21). 但这只是考虑了收敛性一个方面,具体的选择还要兼顾其他因素. 式(6.4.21)至少有一个优势:$f * F_m$ 是一个三角多项式,而 $f * P_r$ 则不是这样. 实际上,甚至可以完全不必提到 Fourier 级数,只要直接对 $f * F_m$ 应用定理 6.3.1 就可以得到

定理 6.4.6 设 $f_m = f * F_m$,F_m 是 $\mathbb{T}^n$ 上的 Fejér 核(见例 6.3.1(viii)). 若 $f \in C^r(\mathbb{T}^n, E)(0 \leqslant r \leqslant \infty)$,则在空间 $\mathscr{E}^r(\mathbb{T}^n, E)$ 中 $f_m \to f(m \to \infty)$. 若 $f \in L^p(\mathbb{T}^n, E)(1 \leqslant p < \infty)$,则 $f_m \xrightarrow{L^p} f(m \to \infty)$.

注意到 f_m 是(系数在 E 中的)三角多项式,从定理 6.4.6 得到

推论 6.4.1 三角多项式构成空间 $\mathscr{E}^r(\mathbb{T}^n, E)(0 \leqslant r \leqslant \infty)$ 中的稠集. 特别地,每个 $f \in C(\mathbb{T}^n, E)$ 可用三角多项式一致逼近.

当 $E = \mathbb{C}$ 时,以上推论中的最后一个结论属于 Weierstrass. 这就重新得到了推论 5.4.1(ii).

因函数 e_k 可用多项式 $\sum_{j=1}^m (\mathrm{i} k \cdot x)^j / j!$ 一致逼近,故三角多项式又可以用多项式(在紧集上)一致逼近. 这就推出,每个 $f \in C(\mathbb{T}^n, E)$ 可用多项式(在紧集上)一致逼近. 若 $f \in C(K)$,$K \subset \mathbb{R}^n$ 为紧集,则不妨设 K 含于 $\mathbb{T}^n$ 之内部(否则作适当变量代换),然后用定理 1.3.6 将 f 扩张为 $f \in C(\mathbb{T}^n)$. 这就得出:f 可用多项式在 K 上一致逼近. 于是再次得到了推论 5.4.1(i)的结论.

若 $f \in L^1(\mathbb{T}^n, E)$,$\hat{f}(k) \equiv 0$,则必 $f * F_m \equiv 0$,这就从定理 6.4.6 推出

推论 6.4.2(唯一性) 若 $f \in L^1(\mathbb{T}^n, E)$,$\hat{f}(k) \equiv 0$,则 $f = 0$, a.e..

以上结论相当于说:Fourier 变换(6.4.5)是一单射. 另一方面,Fourier 变换(6.4.5)却远非满射. 今以 $n = 1, E = \mathbb{C}$ 为例说明如下:令 $A(\mathbb{Z}) = \{\hat{f}: f \in L^1(\mathbb{T}^1)\}$. 直接看出 $\hat{D}_m(k) = 1/2\pi(|k| \leqslant m)$, $\hat{D}_m(k) = 0(|k| > m)$, 因而 $\|\hat{D}_m\|_0 = 1/2\pi$. 另一方面,从定理6.4.3之证可以看出 $\|D_m\|_1$ 无界. 这就表明, Fourier 变换 $F: L^1(\mathbb{T}^1) \to C_0(\mathbb{Z})$ 必非拓扑同构,因而由开映射定理得出$A(\mathbb{Z})$ 必为 $C_0(\mathbb{Z})$ 中的第一纲集. 这就表明, $A(\mathbb{Z})$ 在 $C_0(\mathbb{Z})$ 中仅占微不足道的一部分. 因此,任给一个序列$\{a_k: k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$,即使 $a_k \to 0(|k| \to \infty)$,三角级数 $\sum a_k e_k$ 成为某个 L^1 函数的 Fourier 级数的机会亦极其稀少,因而根本不能将三角级数与 Fourier 级数相提并论! 这一结论是深刻而重要的,值得留意.

一般地,若令 $A(\mathbb{Z}^n, E) = \{\hat{f}: f \in L^1(\mathbb{T}^n, E)\}$, 则由推论 6.4.2 也只能得出

$$F: L^1(\mathbb{T}^n, E) \to A(\mathbb{Z}^n, E), \quad f \to \hat{f}$$

是一个连续线性同构而非拓扑同构. 而且, $A(\mathbb{Z}^n, E)$ 作为 $C_0(\mathbb{Z}^n, E)$ 的子空间是结构不明的,即对于 $\varphi \in C_0(\mathbb{Z}^n, E)$,我们不知道如何判定是否 $\varphi \in A(\mathbb{Z}^n, E)$. 在 $n = 1, E = \mathbb{C}$ 这种特殊情况下,有一些已知的结果可用,下面就是一例.

定理6.4.7 设 $\{a_k: k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$, $\sigma_m = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{|j| \leqslant k} a_j e_j (m \geqslant 1)$,则以下结论成立:

(i) 存在$f \in L^1(\mathbb{T}^1)$ 使$\hat{f}(k) \equiv a_k \Leftrightarrow \{\sigma_m\}$ 在 $L^1(\mathbb{T}^1)$ 中收敛;

(ii) 存在$f \in L^p(\mathbb{T}^1)(1 < p \leqslant \infty)$ 使$\hat{f}(k) \equiv a_k \Leftrightarrow \{\sigma_m\}$ 在 $L^p(\mathbb{T}^1)$ 中有界.

证 (i) 若 $a_k \equiv \hat{f}(k)$, $f \in L^1$,则 $\sigma_m = f * F_m \xrightarrow{L^1} f$. 反之,若 $\sigma_m \xrightarrow{L^1} f$,则

$$2\pi\hat{f}(k) = (f * e_k)(0) = \lim_m (\sigma_m * e_k)(0)$$

$$= \lim_m \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{|j| \leqslant l} a_j (e_j * e_k)(0) = 2\pi a_k,$$

其中, 用到式(6.4.3)与式(6.4.1). 因此有$\hat{f}(k) \equiv a_k$.

(ii) 若 $\{\sigma_m\}$ 在$L^p(\mathbb{T}^1)$ 中有界,因 $L^p(\mathbb{T}^1) = L^q(\mathbb{T}^1)^*$, $1 \leqslant q = p/(p-1) < \infty$,故由定理1.6.8, $\{\sigma_m\}$ 有子列$\{\sigma_{m_i}\}$ 弱* 收敛于某个$f \in L^p(\mathbb{T}^1)$. 取定$k \in \mathbb{Z}$,显然 $\bar{e}_k \in L^q(\mathbb{T}^1)$,于是

$$2\pi\hat{f}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f\bar{e}_k \mathrm{d}x = \lim_i \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{m_i}\bar{e}_k \mathrm{d}x$$

$$= \lim_i (\sigma_m * e_k)(0) = 2\pi a_k,$$

故得$\hat{f}(k) \equiv a_k$. 逆命题由不等式 $\|f * F_m\|_p \leqslant \|f\|_p \|F_m\|_1$ 得出. □

若以 $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ 取代 $L^1(\mathbb{T}^n, E)$,则有较好的肯定结果.

定理6.4.8 Fourier 变换界定一个线性同构

$$F: C^\infty(\mathbb{T}^n, E) \to S(\mathbb{Z}^n, E), \quad f \to \hat{f}, \tag{6.4.24}$$

其中，$S(\mathbb{Z}^n,E) = \{\varphi \in C_0(\mathbb{Z}^n,E): \varphi$ 是速降的$\}$，φ 是速降的意味着任给 $r>0$，当 $|k|\to\infty$ 时有 $\|\varphi(k)\| = o(|k|^{-r})$.

证 若 $f\in C^\infty(\mathbb{T}^n,E)$，则由式(6.4.9) 得出 $\hat{f}\in S(\mathbb{Z}^n,E)$. 反之，任给 $\varphi\in S(\mathbb{Z}^n,E)$，令 $f=\sum\varphi(k)e_k$，则形式地微分得出

$$\mathrm{D}^\alpha f = \sum_k k^\alpha\varphi(k)e_k,\quad \forall\alpha\in\mathbb{Z}_+^n.$$

由于 φ 是速降的，上式右端的级数总绝对并一致收敛，于是由定理 2.2.1 推出逐项微分合理，因而 $f\in C^\infty(\mathbb{T}^n,E)$. 由等式 $f=\sum\varphi(k)e_k$ 直接得出 $\hat{f}(k)=\varphi(k)$. 故式(6.4.24) 是一个满射，因此必为线性同构. □

$L^2(\mathbb{T}^2,E)$ 是 $L^1(\mathbb{T}^n,E)$ 的一个子空间，现在来看 $L^2(\mathbb{T}^n,E)$ 上的 Fourier 变换有何特点. 如通常一样，联系于 Hilbert 空间理论的结果常有非同寻常的深刻性. 现在抱着同样的期待是很自然的.

定理 6.4.9 (i) $\{(2\pi)^{-n/2}e_k: k\in\mathbb{Z}^n\}$ 是 $L^2(\mathbb{T}^n)$ 的标准正交基，$\forall f\in L^2(\mathbb{T}^n)$，$f$ 的 Fourier 级数均方收敛于 f;

(ii) 若 E 是 Hilbert 空间，$f\in L^2(\mathbb{T}^n,E)$，则 f 的 Fourier 级数均方收敛于 f 且成立 Parseval 等式

$$\|f\|_2^2 = (2\pi)^n\sum_k\|\hat{f}(k)\|^2. \tag{6.4.25}$$

证 (i) 直接计算易验证 $\{(2\pi)^{-n/2}e_k: k\in\mathbb{Z}^n\}$ 是 $L^2(\mathbb{T}^n)$ 中的标准正交系. 由定理 6.4.6 推出 $\{e_k: k\in\mathbb{Z}^n\}$ 是 $L^2(\mathbb{T}^n)$ 的基本集. 于是可用定理 1.7.2 得出 $\{(2\pi)^{-n/2}e_k: k\in\mathbb{Z}^n\}$ 是 $L^2(\mathbb{T}^n)$ 的标准正交基. $\forall f\in L^2(\mathbb{T}^n)$，有

$$\langle f,e_k\rangle = \int_{\mathbb{T}^n} fe_{-k}\mathrm{d}x = (2\pi)^n\hat{f}(k),\quad k\in\mathbb{Z}^n. \tag{6.4.26}$$

可见 f 的 Fourier 级数正是 f 按标准正交基的分解式.

(ii) 取定 $f\in L^2(\mathbb{T}^n,E)$. 类似于定理 1.7.2 之证，对任给有限集 $K\subset\mathbb{Z}^n$，有

$$(2\pi)^n\sum_{k\in K}\|\hat{f}(k)\|^2 = \Big\|\sum_{k\in K}\hat{f}(k)e_k\Big\|_2^2 \leqslant \|f\|_2^2,$$

$$\|f\|_2^2 = (2\pi)^n\sum_{k\in K}\|\hat{f}(k)\|^2 + \Big\|f-\sum_{k\in K}\hat{f}(k)e_k\Big\|_2^2. \tag{6.4.27}$$

这就推出，依 L^2 收敛有

$$g = \sum_k\hat{f}(k)e_k\in L^2(\mathbb{T}^n,E).$$

$\forall\varphi\in E^*$，由 L^2 收敛有

$$\varphi\circ f = \sum_k(\varphi\circ f)^\wedge(k)e_k = \sum_k\varphi(\hat{f}(k))e_k,$$

这就推出 $\varphi\circ f=\varphi\circ g$, a.e. ($\forall\varphi\in E^*$)，从而 $f=g$, a.e. (由推论 3.2.1(iv)). 因

此，f 的 Fourier 级数均方收敛于 f. 等式(6.4.25)由式(6.4.27)推出. □

由定理 6.4.9(ii)推出

$$L^2(\mathbb{T}^n,E)\to l^2(\mathbb{Z}^n,E),\quad f\to(2\pi)^{n/2}\hat{f}$$

是一等距同构. 这又推出对任给 $f,g\in L^2(\mathbb{T}^n,E)$，有

$$\int_{\mathbb{T}^n}\langle f(x),g(x)\rangle\mathrm{d}x=(2\pi)^n\sum_k\langle\hat{f}(k),\hat{g}(k)\rangle. \tag{6.4.28}$$

式(6.4.28)也称为 Parseval 等式. 类似的等式也对某些非 L^2 函数成立，下举一例.

定理 6.4.10　设 $f\in L^1(\mathbb{T}^1,E)$，$g\in \mathrm{BV}(\mathbb{T}^1)$，则成立

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\overline{g(x)}\mathrm{d}x=2\pi\sum_k\hat{f}(k)\,\overline{\hat{g}(k)}, \tag{6.4.29}$$

其右端理解为对称部分和的极限(它未必绝对收敛).

证　令 $S_m=\sum_{|k|\leqslant m}\hat{g}(k)e_k$，则由定理 6.4.2(iii)有 $S_m\to g$，a. e. $(m\to\infty)$. 于是

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\overline{g(x)}\mathrm{d}x&=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\lim_m\overline{S_m(x)}\mathrm{d}x\\&=\lim_m\sum_{|k|\leqslant m}\overline{\hat{g}(k)}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\\&=\lim_m 2\pi\sum_{|k|\leqslant m}\hat{f}(k)\,\overline{\hat{g}(k)}\\&=2\pi\sum_k\hat{f}(k)\,\overline{\hat{g}(k)},\end{aligned}$$

其中，关键性的一步用了控制收敛定理，而这用到 $|S_m(x)|\leqslant\text{const}$，其理由如下：

由 $g\in\mathrm{BV}$ 推出 $\hat{g}(k)=O(|k|^{-1})$(命题 6.4.2). 令 $\sigma_m=g*F_m$，F_m 是 Fejér 核，则 $\|\sigma_m\|_0\leqslant\|g\|_0\|F_m\|_1\leqslant\text{const}$. 由 $\sigma_m=\dfrac{1}{m}\sum_0^{m-1}S_k$ 得

$$S_{m-1}=m(\sigma_m-\sigma_{m-1})+\sigma_{m-1}. \tag{6.4.30}$$

由式(6.4.21)有

$$\sigma_m=\sum_{|k|\leqslant m}\left(1-\frac{|k|}{m}\right)\hat{g}(k)e_k. \tag{6.4.31}$$

综合式(6.4.30)，式(6.4.31)及 $k\hat{g}(k)=O(1)$ 即推出 S_m 有界，如所要证. □

如在 1.7 节中提到的，Parseval 等式可看成某种广义的勾股定理，是抽象空间中难得的定量关系，往往导致深刻的结果. Parseval 等式(6.4.25)，式(6.4.28)以及式(6.4.29)都有出色的应用，下面看几个简单例子.

推论 6.4.3　设 $f\in\mathrm{AC}(\mathbb{T}^1,E)$，$f'\in L^2(\mathbb{T}^1,E)$，$E$ 为 Hilbert 空间，$f_m=f*D_m$，则

$$\|f_m-f\|_0\leqslant\|f'\|_2/\sqrt{m\pi},\quad m\in\mathbb{N}. \tag{6.4.32}$$

证　用分部积分直接得出 $\widehat{f'}(k)=\mathrm{i}k\hat{f}(k)$. 若 $n>m\geqslant 1$，则

$$\begin{aligned}\|f_n - f_m\|_0 &= \Big\|\sum_{m<|k|\leqslant n}\hat{f}(k)e_k\Big\|_0 \leqslant \sum_{|k|>m}\|\hat{f}(k)\| \\ &= \sum_{|k|>m}\frac{1}{|k|}\|\widehat{f'}(k)\| \\ &\leqslant \Big(\sum_{k>m}\frac{2}{k^2}\Big)^{1/2}\Big(\sum_k\|\widehat{f'}(k)\|^2\Big)^{1/2} \\ &\leqslant \Big(\frac{2}{m}\Big)^{1/2}\frac{\|f'\|_2}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\|f'\|_2}{\sqrt{m\pi}},\end{aligned}$$

其中用了式(6.4.25). 由定理6.4.2(iv)有$f_m \rightrightarrows f(m\to\infty)$，于是上面得到的不等式推出式(6.4.32). □

推论6.4.4 设$f\in L^1(\mathbb{T}^1,E)$，则有逐项积分公式

$$\int_0^x f(y)\mathrm{d}y = \sum_k \hat{f}(k)\int_0^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\mathrm{d}y,\quad |x|\leqslant\pi. \tag{6.4.33}$$

若E为Hilbert空间，$f\in L^2$，则成立

$$\Big\|\int_0^x f(y)\mathrm{d}y - \sum_{|k|\leqslant m}\hat{f}(k)\int_0^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\mathrm{d}y\Big\| \leqslant \frac{2\|f\|_2}{\sqrt{m\pi}},\quad m\in\mathbb{N}, \tag{6.4.34}$$

因而式(6.4.33)中的级数一致收敛.

证 不妨设$0<x\leqslant\pi$，令$g=\xi_{(0,x)}$，则

$$\hat{g}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky}\mathrm{d}y,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

对f,g应用式(6.4.29)即得式(6.4.33). 若E为Hilbert空间，$f\in L^2$，则

$$\begin{aligned}&\Big\|\int_0^x f(y)\mathrm{d}y - \sum_{|k|\leqslant m}\hat{f}(k)\int_0^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\mathrm{d}y\Big\| \\ &= \Big\|\sum_{|k|>m}\hat{f}(k)\int_0^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\mathrm{d}y\Big\| \\ &\leqslant 2\sum_{|k|>m}\frac{\|\hat{f}(k)\|}{|k|} \leqslant \frac{2\|f\|_2}{\sqrt{m\pi}},\end{aligned}$$

最后一步的论证与推论6.4.3一样. □

式(6.4.33)的有趣之外在于它与Fourier级数$\sum\hat{f}(k)e_k$本身是否收敛完全无关！

推论6.4.5 设$f\in C^1([a,b],E)$，E为Hilbert空间，$f(a)=f(b)=0$，则成立如下**Wirtinger不等式**：

$$\int_a^b \|f(x)\|^2\mathrm{d}x \leqslant \Big(\frac{b-a}{\pi}\Big)^2\int_a^b\|f'(x)\|^2\mathrm{d}x. \tag{6.4.35}$$

证 不妨设$[a,b]=[0,\pi]$，进而又可设$f\in C^1(\mathbb{T}^1,E)$，$f(x)$是奇函数. 因

$\widehat{f'}(k) = \mathrm{i}k\hat{f}(k)$（由式(6.4.8)），故 $\widehat{f'}(0) = 0 = \hat{f}(0)$. 于是由 Parseval 等式有

$$\int_0^{\pi} \|f(x)\|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\|f\|_2^2 = \pi\|\hat{f}\|_2^2 \leqslant \pi\|\widehat{f'}\|_2^2$$

$$= \frac{1}{2}\|f'\|_2^2 = \int_0^{\pi}\|f'(x)\|^2 \mathrm{d}x. \qquad \square$$

取 $f(x) = \sin x\,(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 说明式(6.4.35)右端系数不能再减小.

6.5　Fourier 变换

如果将 6.4 节的内容看成 n 重环面 $\mathbb{T}^n$ 上的 Fourier 分析，那么，以 $\mathbb{R}^n$ 取代 $\mathbb{T}^n$ 之后，就进入 $\mathbb{R}^n$ 上的 Fourier 分析了. 有了 6.4 节的经验之后，似乎能预知本节要做什么：将 $f \in L^1(\mathbb{R}^n, E)$ 依标准的函数族 $\{e_\xi : \xi \in \mathbb{R}^n\}$ 分解，此处 $e_\xi(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi \cdot x}$. 但现在 ξ 是连续参数，分解式不再是级数而是积分. 尽管有这种差别，我们还是尽可能沿用类似于 6.4 节的思路平行地展开本节的内容，依次考虑 Fourier 变换及其基本性质、Fourier 积分的点态收敛、“平均求和法”、L^2- Fourier 变换等. 有些环节进展可称顺畅，但实质性的差别很快就会接踵而至. 与 $\mathbb{T}^n$ 不同，$\mathbb{R}^n$ 是非紧的，不能指望在 $\mathbb{R}^n$ 上会得到一个与 6.4 节完全对应的理论. 不过，$\mathbb{R}^n$ 也有其优势：$f(x)$ 与 $\hat{f}(\xi)$ 定义在同一个空间 $\mathbb{R}^n$ 上，这就可能建立一个更显对称的优美理论.

本节中 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 总表示 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 积分.

定义 6.5.1　任给 $f \in L^1(\mathbb{R}^n, E)$，令

$$\hat{f}(\xi) = (f * e_\xi)(0) = \int f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi \cdot x}\mathrm{d}x^{①}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{6.5.1}$$

称函数 $\hat{f}: \mathbb{R}^n \to E$ 为 f 的 Fourier 变式，而称形式积分

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x \cdot \xi}\mathrm{d}\xi \tag{6.5.2}$$

为 $f(x)$ 的 Fourier 积分.

任给 $f \in L^1(\mathbb{R}^n, E)$，用控制收敛定理易判明 $\hat{f} \in C(\mathbb{R}^n, E)$，用 6.4 节中证明 $\hat{f}(k) \to 0\,(|k| \to \infty)$ 的方法同样可验明 $\hat{f}(\xi) \to 0\,(|\xi| \to \infty)$，从而 $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n, E)$. 这就得到以下对应于式(6.4.5)的变换：

$$F: L^1(\mathbb{R}^n, E) \to C_0(\mathbb{R}^n, E), \quad f \to \hat{f}, \tag{6.5.3}$$

称它为 $\mathbb{R}^n$ 上的 **Fourier 变换**，亦称为 L^1- Fourier 变换.

---

① 在文献中可看到 $\hat{f}(\xi)$ 的多种不同定义. 例如，可用 $(2\pi)^{-n/2}\hat{f}(\xi)$ 取代此处的 $\hat{f}(\xi)$，或者以 $f * e_{2\pi\xi}$ 取代 $f * e_\xi$. 这两种定义都使 Fourier 变换与其逆变换几乎用同一公式，是一个很大优点，但在其他方面则并不尽如人意，故不为本书所用. 总之各种定义互有短长，实质上并无差别.

易验证与式(6.4.2)′对应的公式

$$f * e_\xi = \hat{f}(\xi) e_\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{6.5.4}$$

对应于命题6.4.1,以下命题汇集了直接由定义6.5.1推出的简单结论:

命题6.5.1 Fourier 变换(6.5.3)有以下性质:

(i) F 是一个有界线性算子且 $\|F\| \leqslant 1$;

(ii) 卷积公式:任给 $f \in L^1(\mathbb{R}^n, E)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$,成立

$$(f * g)^\wedge = \hat{f}\hat{g}. \tag{6.5.5}$$

此外有 $\widehat{g^*} = \bar{\hat{g}}$,因此 $L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$, $g \to \hat{g}$ 是一个(*)代数同态[①];

(iii) 平移规则: $(\tau_a f)^\wedge = e_a \hat{f}$, $\tau_a \hat{f} = (e_{-a} f)^\wedge$ $(f \in L^1(\mathbb{R}^n, E), a \in \mathbb{R}^n)$;

(iv) 微分公式:设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n, E)$, $P(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 r 次多项式,则

$$(P(\mathrm{D})f)^\wedge = P\hat{f}, \quad P(\mathrm{D})\hat{f} = (\check{P}f)^\wedge. \tag{6.5.6}$$

前者要求 $\partial^\alpha f \in L^1(|\alpha| \leqslant r)$ 且 $\partial^\alpha f \in C_0(|\alpha| < r)$,后者要求 $x^\alpha f \in L^1(|\alpha| \leqslant r)$;

(v) 变量代换:任给 $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n, E)$,有

$$(f \circ A)^\wedge = |\det A|^{-1} \hat{f} \circ (A^{\mathrm{T}})^{-1}. \tag{6.5.7}$$

特别地, $(f(ax))^\wedge(\xi) = |a|^{-n} \hat{f}(\xi/a)$ $(0 \neq a \in \mathbb{R})$, $f^{\vee\wedge} = f^{\wedge\vee}$;

(vi) 任给 $f \in L^1(\mathbb{R}^n, E)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$,成立 $\int f\hat{g}\mathrm{d}x = \int \hat{f} g \mathrm{d}x$.

唯一值得说明的是微分公式(6.5.6),其中,前一式由反复进行分部积分导出,后者则基于定理3.2.4.

下一个目标是 Fourier 积分的点态收敛性. 取定 $f \in L^1(\mathbb{R}, E)$, $x \in \mathbb{R}$,依式(6.4.12)定义 s. 完全仿照建立定理6.4.2的方法,考虑对称的积分

$$\begin{cases} f_b(x) \triangleq \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-b}^{b} \hat{f}(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} \mathrm{d}\xi = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) \dfrac{\sin by}{y} \mathrm{d}y, \\ f_b(x) - s = \displaystyle\int_0^{\infty} [f(x+y) + f(x-y) - 2s] \dfrac{\sin by}{\pi y} \mathrm{d}y. \end{cases} \tag{6.5.8}$$

类似于定理6.4.2,利用引理6.4.1与引理6.4.2可得到如下收敛定理:

定理6.5.1 设 $f \in L^1(\mathbb{R}, E)$, $x \in \mathbb{R}$, s 依据式(6.4.12)有定义, $f_b(x)$ 依式(6.5.8),则以下结论成立:

(i) 局部性原理:当 $b \to \infty$ 时 $f_b(x) \to s$ 成立与否仅决定于 f 在 x 邻近的状态;

(ii) Dini 判别法:若存在 $\delta > 0$,使 $y^{-1}\|f(x+y) + f(x-y) - 2s\| \in L^1[0, \delta]$,则 $f_b(x) \to s$ $(b \to \infty)$. 特别地,当条件(6.4.14a)~(6.4.14d)中任一个满足时 $f_b(x) \to s$ $(b \to \infty)$;

(iii) Jordan 判别法:若存在 $\delta > 0$,使 $f|[x-\delta, x+\delta] \in \mathrm{BV}$,则 $f_b(x) \to s$.

---

① 此为卷积特别受到重视的重要理由之一.

就与定理 6.4.2 形成完美对应这一点来看,定理 6.5.1 的确不失为一个有趣的结果. 但并不能对之评价过高,它同样具有定理 6.4.2 的那些缺点. 特别地,即使 $f \in L^1(\mathbb{R},E) \cap C(\mathbb{R},E)$,亦不能利用定理 6.5.1 得出关于 $f_b(x)$ (由式(6.5.8))收敛性的任何结论.

更有意义的情况是 $\hat{f} \in L^1$, 此时 Fourier 积分(6.5.2)作为通常的 Lebesgue 积分存在. 若进而成立

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi, \text{a. e.}, \tag{6.5.9}$$

则称它为 Fourier 反演公式,或简称为**反演公式**. 反演公式的特别有趣之处在于它非常接近于 Fourier 变换的定义式. 实际上,式(6.5.9)等价于

$$f^{\wedge\wedge} = (2\pi)^n \check{f}, \text{a. e.}^{①}. \tag{6.5.9}'$$

这表明运算 $f \to \hat{f}$ 几乎成了一个"对合". 这一事实是 Fourier 变换理论中种种优美论证的根源.

现在来解决关键问题:在什么条件下反演公式(6.5.9)成立? 借鉴 6.4 节中的方法,也用某种" φ_m 平均求和法", φ_m 是 $\mathbb{R}^n$ 上的某个近似单位,对于它有

$$(f*\varphi_m)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int (f*\varphi_m)^{\wedge}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi. \tag{6.5.10}$$

一个类似于引理 6.4.3 的结果是

引理 6.5.1　设 φ_m 是 $\mathbb{R}^n$ 上的近似单位, $f \in L^1(\mathbb{R}^n,E)$, 以下条件满足②:

$$\hat{\varphi}_m \in L^1 \text{ 且 } \varphi_m{}^{\wedge\wedge} = (2\pi)^n \check{\varphi}_m, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{6.5.11}$$

$$f*\varphi_m \to f, \text{a. e.}, \quad m \to \infty, \tag{6.5.12}$$

则式(6.5.10)与下式成立:

$$f(x) = \lim_m \frac{1}{(2\pi)^n}\int \hat{\varphi}_m(\xi)\hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi, \text{a. e.}. \tag{6.5.13}$$

若进而设 $\hat{f} \in L^1$,则式(6.5.9)成立. 若 $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f}, \hat{\varphi}_m \geq 0 (m \in \mathbb{N})$,则不必验证条件 $\hat{f} \in L^1$, 条件 $f \in L^\infty$ 可代以 $(f*\varphi_m)(0) \to f(0)$.

证明类似于引理 6.4.3,基于控制收敛定理与 Fubini 定理,不必细述.

应强调的是,只要找到一个满足条件(6.5.11)的近似单位 φ_m,它对任何 $f \in L^1(\mathbb{R}^n,E)$ 有 $f*\varphi_m \to f$, a. e. ,则在 $f, \hat{f} \in L^1$ 时就能确立反演公式(6.5.9). 当然,式(6.5.13)亦有其用处且可以选择不同的 φ_m. 下面看几个例子.

例 6.5.1　(i) 设 $\Gamma_m(x) = (m/\sqrt{\pi})\exp(-m^2x^2)$ 是一维 Gauss 核,则

---

① 在 Fourier 变换定义中适当添加系数可消去此处的 $(2\pi)^n$.

② 若 φ_m 是如例 6.3.1(iv)的 Fejér 型核, $\varphi \in L^\infty$, $\hat{\varphi} \geq 0$, 则条件(6.5.11)必自动满足.

$$\hat{\Gamma}_m(\xi) = \frac{m}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-m^2x^2-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{m}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4m^2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\left(mx+\frac{\mathrm{i}\xi}{2m}\right)^2\right]\mathrm{d}x$$
$$= \frac{m}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4m^2}\right)\int_{-\infty+\mathrm{i}\xi/2m}^{\infty+\mathrm{i}\xi/2m}\mathrm{e}^{-\lambda^2}\mathrm{d}\lambda = \mathrm{e}^{-\xi^2/4m^2}.$$

计算上述积分时,在矩形 $[-a,a]\times[0,\xi/2m]$ 的周界上用了 Cauchy 定理,其中, $a>0$ 充分大. 因 n 维 Gauss 核 Γ_m 是一维 Gauss 核的张量积,这就得到

$$\hat{\Gamma}_m(\xi) = \mathrm{e}^{-|\xi|^2/4m^2},\quad \xi\in\mathbb{R}^n.$$

进而可验证 $\Gamma_m{}^{\wedge\wedge} = (2\pi)^n\Gamma_m$, 故条件(6.5.11)满足.

(ii) 设 Poisson 核 P_t 依例 6.3.1(vi),则有

$$\hat{P}_t(\xi) = \mathrm{e}^{-t|\xi|},\quad P_t{}^{\wedge\wedge}(x) = (2\pi)^nP_t(x),\quad t>0.$$

可由直接计算得 $(\mathrm{e}^{-t|x|})^{\wedge}(\xi) = (2\pi)^nP_t(\xi)$,然后由式(6.5.9)′ 得出以上结果.

(iii) 设 F_m 是$\mathbb{R}$ 上的 Fejer 核(见例 6.3.1(vii)),则可算出

$$\hat{F}_m(\xi) = \left(1-\frac{|\xi|}{2m}\right)^+,\quad F_m{}^{\wedge\wedge}(x) = 2\pi F_m(x).$$

可见条件(6.5.11)满足.

于是,结合引理 6.5.1, 定理 6.3.4 与例 6.5.1 得出

定理 6.5.2 设 $f\in L^1(\mathbb{R}^n,E)$,则以下等式几乎处处成立:

$$f(x) = \lim_m \frac{1}{(2\pi)^n}\int \mathrm{e}^{-|\xi|^2/4m^2}\hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi, \tag{6.5.14}$$

$$f(x) = \lim_{t\to0^+}\frac{1}{(2\pi)^n}\int \mathrm{e}^{-t|\xi|}\hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi. \tag{6.5.15}$$

当 $n=1$ 时还有以下等式几乎处处成立:

$$f(x) = \lim_m \frac{1}{2\pi}\int_{-2m}^{2m}\left(1-\frac{|\xi|}{2m}\right)\hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}\xi. \tag{6.5.16}$$

式(6.5.14) ~ (6.5.16)在f的连续点 x 必成立,在f连续的开集内任何紧集上一致地成立. 若$\hat{f}\in L^1$,则反演公式(6.5.9) 成立且当f连续时反演公式处处成立. 若 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$,$\hat{f}\geqslant 0$,则不必验证条件$\hat{f}\in L^1$;条件$f\in L^\infty$ 可代以f在 $x=0$ 连续.

式(6.5.14) ~ (6.5.16)可与式(6.4.21), 式(6.4.22)对照,都属于某种"平均求和法". 这些公式固然有用,但首先关注的还是更简单的反演公式(6.5.9),它使得 Fourier 变换与反变换显得对等了,因而可依据需要在f与$\hat{f}$之间灵活地互相转换, 如此带来的好处是难以估量的. 下面就用几个例子来说明. 首先由反演公式推出若$f,\hat{f}\in L^1$,则$f=f_0$,a. e. ,$f_0\in C_0$. 可见仅对性质足够好的一部分 L^1 函数可用

反演公式. 其次,类似于推论 6.4.2 有

推论 6.5.1(唯一性)　若 $f \in L^1(\mathbb{R}^n,E)$,$\hat{f}(\xi) \equiv 0$,则 $f = 0$,a. e.. 由此可见 Fourier 变换(6.5.3)是一单射.

如同变换(6.4.5)一样,Fourier 变换(6.5.3)也非满射,而且也没有一个简单的条件用来刻画 $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ 是否为某个 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 的 Fourier 变换.

其次,应用反演公式可建立一些涉及 Fourier 变换的等式.

推论 6.5.2　设 $f,h \in L^1(\mathbb{R}^n,E)$,$g \in L^1(\mathbb{R}^n)$,则

$$\hat{f} * \hat{g} = (2\pi)^n (fg)^{\wedge}, \tag{6.5.17}$$

$$\int \langle \hat{f}(\xi),\hat{h}(\xi)\rangle \mathrm{d}\xi = (2\pi)^n \int \langle f(x),h(x)\rangle \mathrm{d}x, \tag{6.5.18}$$

其中, 式(6.5.17)要求 $\hat{f} \in L^1$ 或 $\hat{g} \in L^1$,式(6.5.18) 要求 E 是 Hilbert 空间,$\hat{f} \in L^1$ 或 $\hat{h} \in L^1$.

式(6.5.17), 式(6.5.18)的证明都基于反演公式与 Fubini 定理,今以证式(6.5.18)为例说明如下:不妨设 $\hat{f} \in L^1$,因而 $\|f\|_\infty \leqslant (2\pi)^{-n}\|\hat{f}\|_1$,

$$|\langle f(x),h(x)\rangle| \leqslant \|f(x)\|\,\|h(x)\| \leqslant (2\pi)^{-n}\|\hat{f}\|_1\,\|h(x)\|,\text{a. e.},$$

这推出式(6.5.18)右端积分存在. 于是

$$\begin{aligned}(2\pi)^n\int\langle f(x),h(x)\rangle\mathrm{d}x &= \int\left\langle\int\hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi,h(x)\right\rangle\mathrm{d}x\\ &= \int\mathrm{d}x\int\langle\hat{f}(\xi),h(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\rangle\mathrm{d}\xi\\ &= \int\mathrm{d}\xi\int\langle\hat{f}(\xi),h(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\rangle\mathrm{d}x\\ &= \int\left\langle\hat{f}(\xi),\int h(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x\right\rangle\mathrm{d}\xi\\ &= \int\langle\hat{f}(\xi),\hat{h}(\xi)\rangle\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

从理论上说,反演公式的最大意义或许在于:它使得 Fourier 变换限制在 $L^1(\mathbb{R}^n,E)$ 的某些子空间上成为拓扑同构,而这一性质并不为变换(6.5.3) 所具有. 首先建立如下预备结果:

引理 6.5.2　设 X 是一 F 空间, $X \subset L^1(\mathbb{R}^n,E)$ 且包含映射连续, $\forall f \in X$,有 $\hat{f},\check{f} \in X$,则 $\Phi: X \to X$,$f \to \hat{f}$ 是一个拓扑同构.

证　$\forall f \in X$,有 $f = (2\pi)^{-n} f^{\vee\wedge\wedge}$(依式(6.5.9)),故 Φ 是双射且 $\Phi^{-1}f = (2\pi)^{-n}\Phi f^{\vee}$,故只要证 Φ 连续,为此用闭图像定理. 设在 X 中 $f_n \to f$,$\hat{f}_n \to g$,今证 $g = \hat{f}$,a. e.. 由 $\hat{f}_n \to g$ 推出 $\hat{f}_n \xrightarrow{L^1} g$,因而 $(2\pi)^n \check{f}_n = f_n^{\wedge\wedge} \rightrightarrows \hat{g}$(由反演公式及命题 6.5.1(i)). 另一方面,由 $f_n \to f$ 推出 $f_n \xrightarrow{L^1} f$,因而有 $\{f_n\}$ 的某个子列 $\{f_{n_k}\}$,使 $f_{n_k} \to f$,a. e. (由命题 3.5.1). 于是 $(2\pi)^n \check{f} = g^{\wedge\vee}$,a. e.,这推出 $\hat{f} =$

g, a. e. ,如所要证. □

以上结果表明,若限制在子空间 X 上,则不仅运用反演公式畅通无阻,而且 Fourier 变换与其反变换完全对等,此中之方便,自不待言. 现在的问题是应如何挑选空间 X?因在 X 中可无限制地作 Fourier 变换, X 必由充分好的函数组成. 今就取 $X \subset C^\infty(\mathbb{R}^n, E)$ 且设 X 对微分运算封闭. 任给 $f \in X$, 由 $D^\alpha f \in \hat{X}$ 推出 $\xi^\alpha \hat{f}(\xi) \in C_0(\mathbb{R}^n, E)$, 因而 $\hat{f}$(从而 f) 在 ∞ 点近处是"速降"的. 于是作以下定义:

定义 6.5.2 若 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, E)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $x^\alpha \partial^\beta f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上有界,则称 f 为**速降函数**. 这种函数的全体记为 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$, 令 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, 也将 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$ 简写作 $\mathscr{S}$.

任给 $m, k \in \mathbb{Z}_+$, 定义

$$\|f\|_{m,k} = \max_{|\alpha| \leqslant m, |\beta| \leqslant k} \|x^\alpha \partial^\beta f\|_0, \quad f \in \mathscr{S}, \tag{6.5.19}$$

则 $\{\|f\|_{m,k} : m, k \in \mathbb{Z}_+\}$ 是 $\mathscr{S}$ 上的一个分离半范族,它将 $\mathscr{S}$ 定义为一个 F 空间,称为速降函数空间或 **Schwartz 空间**,在 $\mathscr{S}$ 中 $f_k \to 0 \Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, 有 $x^\alpha \partial^\beta f_k(x) \rightrightarrows 0$ $(k \to \infty, x \in \mathbb{R}^n)$. 注意半范 $\|\cdot\|_{m,k}$ 对 m, k 都是增加的,因此它构成一个基本半范族. 空间 $\mathscr{S}$ 有一系列良好的性质,在近代分析中是被特别看好的一个空间. 下面列出空间 $\mathscr{S}$ 的几个最基本的性质.

命题 6.5.2 空间 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$ 有如下性质:

(i) $C_c^\infty(\mathbb{R}^n, E) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$ 且 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n, E)$ 在 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$ 中稠密, 存在连续的包含 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E) \subset L^p(\mathbb{R}^n, E)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ 且 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n, E)$ 中稠密, 存在连续的包含 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E) \subset \mathscr{E}(\mathbb{R}^n, E)$ 且 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$ 在 $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n, E)$ 中稠密;

(ii) $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$, $f \to \hat{f}$ 为拓扑同构;

(iii) $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $\partial^\alpha : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$ 是连续线性算子.

综合起来可以说,在空间 $\mathscr{S}$ 中可畅通无阻地进行 Fourier 变换与微分运算,且这些运算不改变 $\mathscr{S}$ 中的极限关系. 对 $f \in \mathscr{S}$ 也可求其"p 次积分"$(1 \leqslant p < \infty)$, 且 $\mathscr{S}$ 中的收敛推出 p 次平均收敛.

证 (i) 显然 $C_c^\infty \subset \mathscr{S} \subset \mathscr{E}$. $\forall f \in \mathscr{S}$, 有

$$\|f\|_p^p \leqslant \|(1 + |x|^2)^{n+1} f\|_0 \|f\|_0^{p-1} \int \frac{\mathrm{d}x}{(1 + |x|^2)^{n+1}} < \infty. \tag{6.5.20}$$

这表明 $\mathscr{S} \subset L^p$ 而且包含是连续的. 依据定理 6.3.6,其余结论是明显的.

(ii) 由引理 6.5.2,只要对任给 $f \in \mathscr{S}$ 说明 $\hat{f} \in \mathscr{S}$. 为此又只要说明,对 $\mathbb{R}^n$ 上的任何多项式 P, Q, 说明 $P(\xi) Q(D) \hat{f}(\xi)$ 有界. 因 $\check{Q} f \in \mathscr{S}$, $P(D)(\check{Q} f) \in \mathscr{S}$, 故可用式 (6.5.6) 得出

$$P(\xi) Q(D) \hat{f}(\xi) = (P(D)(\check{Q} f))^\wedge (\xi) \in C_0(\mathbb{R}^n, E).$$

(iii) 是显然的. □

空间 $\mathscr{S}$ 的多方面的应用都不是目下考虑的问题. 本节引入空间 $\mathscr{S}$ 的主要目的是用它来定义" L^2 -Fourier 变换". 在 6.4 节中, 因 $L^2(\mathbb{T}^n) \subset L^1(\mathbb{T}^n)$, 定义 L^2 函数的 Fourier 系数并无任何问题. 但现在情况有所不同: 空间 $L^1(\mathbb{R}^n, E)$ 与 $L^2(\mathbb{R}^n, E)$ 互不包含, 因而 L^1- Fourier 变换并不能直接转移到 $L^2(\mathbb{R}^2, E)$ 上. 解决这一困难的办法其实很简单: 选取 $X \subset L^1 \cap L^2$, 使得 X 在 L^2 中稠密, 于是 X 上的 Fourier 变换自然就扩张到 L^2 中了. 不消说, 正当其任的空间就是 $\mathscr{S}$. 利用 $\mathscr{S}$ 扩张 Fourier 变换的结果, 就是如下著名的 **Plancherel 定理**:

定理 6.5.3 设 E 是一个 Hilbert 空间, 则存在唯一自同构

$$F: L^2(\mathbb{R}^n, E) \to L^2(\mathbb{R}^n, E), \quad f \to \hat{f},$$

使得以下结论成立:

(i) 反演公式: $f = (2\pi)^{-n} f^{\wedge\wedge\vee}$;

(ii) Parsevel 等式: $\|\hat{f}\|_2^2 = (2\pi)^n \|f\|_2^2$ (对照式(6.4.25)), 因此 $(2\pi)^{-n/2}F$ 是 Hilbert 空间 $L^2(\mathbb{R}^n, E)$ 上的一个 U 算子;

(iii) 任给 $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n, E)$, 成立一般 Parseval 等式

$$\int \langle \hat{f}(\xi), \hat{g}(\xi) \rangle \mathrm{d}\xi = (2\pi)^n \int \langle f(x), g(x) \rangle \mathrm{d}x; \tag{6.5.21}$$

(iv) 对于 $f \in L^1 \cap L^2$, $\hat{f}$ 与定义 6.5.1 一致;

(v) 设 $f \in L^2(\mathbb{R}^n, E)$, $D_r = [-r, r]^n$, l. i. m 表均方收敛极限, 则

$$\hat{f}(\xi) = \underset{r\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \int_{D_r} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} \mathrm{d}x, \tag{6.5.22}$$

$$f(x) = \underset{r\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{D_r} \hat{f}(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi} \mathrm{d}\xi. \tag{6.5.23}$$

式(6.5.23)也称为 L^2 反演公式.

证 $\forall f \in \mathscr{S}$, 由推论 6.5.2 有 $\|\hat{f}\|_2^2 = (2\pi)^n \|f\|_2^2$. 因 $\mathscr{S}$ 在 L^2 中稠密, 故 $\mathscr{S} \to \mathscr{S}$, $f \to \hat{f}$ 可唯一地扩张为 L^2 上的自同构, 且保持 Parseval 等式成立. 由一极限过程推出反演公式成立. 由 Parseval 等式与极化恒等式(1.7.4), 式(6.5.21)亦必成立. 这样, 已确立结论(i) ~ (iii).

(iv) 设 $f \in L^1 \cap L^2$. 分别以 $\hat{f}$ 与 $\tilde{f}$ 记 f 的 L^1- Fourier 变换与" L^2 -Fourier 变换", 今要证 $\hat{f} = \tilde{f}$. 不妨设 $E = \mathbb{C}$ (否则考虑 $\varphi \circ f, \varphi \in E^*$). 取 $\{f_k\} \subset \mathscr{S}$, 使 $f_k \xrightarrow{L^2} f$, $\hat{f}_k \xrightarrow{L^2} \tilde{f}$, 只要证 $\hat{f}_k \xrightarrow{L^2} \hat{f}$. 为此又只要证 $\|\hat{f}_k - \hat{f}\|_2^2 = (2\pi)^n \|f_k - f\|_2^2$. 这就转化为证 $\|\hat{\varphi}\|_2^2 = (2\pi)^n \|\varphi\|_2^2$, 其中, $\varphi \in L^1 \cap L^2$. 令 $g = \varphi * \varphi^*$, 则 $g \in L^1 \cap C(\mathbb{R}^n)$ (由定理 6.2.1), $\hat{g} = |\hat{\varphi}|^2$ (由命题 6.5.1(ii)). 于是由定理 6.5.2 可对 g 用反演公式

$$\|\hat{\varphi}\|_2^2 = \int \hat{g}(\xi) \mathrm{d}\xi = (2\pi)^n g(0) = (2\pi)^n \|\varphi\|_2^2,$$

如所要证.

(v) 只要证式(6.5.22). 令 $f_r = f\xi_{D_r}$,则必定 $f_r \in L^1 \cap L^2$ 且 $f_r \xrightarrow{L^2} f(r\to\infty)$,因而 $\hat{f}_r \xrightarrow{L^2} \hat{f}$,这正表明式(6.5.22) 成立. □

定理中确立的 L^2 上的 Fourier 变换称为 **Fourier-Plancherel 变换**,通常就简称为 L^2- Fourier 变换. 这样,在 $\mathbb{R}^n$ 上就有了两种 Fourier 变换理论,它们在 $L^1\cap L^2$ 上重合,但互不涵盖,两者各有优势. L^2- Fourier 变换的最大优势是它几乎是一个等距同构(适当调整定义,很容易使它变成一个真正的等距同构),因而在其中运用反演公式畅通无阻. 但与 L^1- Fourier 不同, L^2- Fourier 变换并非用一个 Lebesgue 积分直接定义的,这可能有所不便. 但在理论分析中这未必是一个真正的缺陷. 至于 L^1- Fourier 变换,毕竟有直观方便的好处,因而首先受到重视,它也占去了本节的主要篇幅. 但反演公式只能有条件地使用,则是其缺点. 只有在广义函数的框架下,这些缺点才得以消除,而且, L^1 与 L^2 两种 Fourier 变换也将归于一统.

鉴于在广义函数论中将一般地推广 L^1- Fourier 变换的大部分结果,此处并无必要去系统地讨论如何将某个 L^1- Fourier 变换的结论过渡到 L^2- Fourier 变换. 不过,以一个例子作为说明还是值得的. 今建立

$$(f*g)^\wedge = \hat{f}\hat{g},\quad f\in L^2(\mathbb{R}^n,E),g\in L^1(\mathbb{R}^n). \tag{6.5.24}$$

因 $f*g\in L^2$(由定理6.2.2),故式(6.5.24) 两边均有定义. 取 $\{f_k\}\subset\mathscr{S}$,使 $f_k\xrightarrow{L^2} f(k\to\infty)$,则

$$\begin{aligned}\|(f*g)^\wedge-\hat{f}\hat{g}\|_2 &\leqslant \|(f*g)^\wedge-(f_k*g)^\wedge\|_2+\|\hat{f}_k\hat{g}-\hat{f}\hat{g}\|_2\\ &\leqslant (2\pi)^{n/2}\|(f-f_k)*g\|_2+\|\hat{f}_k-\hat{f}\|_2\|\hat{g}\|_0\\ &\leqslant (2\pi)^{n/2}\|f-f_k\|_2(\|g\|_1+\|\hat{g}\|_0)\to 0,\quad k\to\infty.\end{aligned}$$

这正表明式(6.5.24)成立.

在 Fourier 变换的多方面的应用中,对于微分方程问题的应用或许是最典型的. 简单地说,用 Fourier 变换可将一个微分方程转化成另一个较易解出的方程(代数方程或层次较低的微分方程). 例如,为解线性偏微分方程

$$P(\mathrm{D})u = f,$$

两端作 Fourier 变换并用式(6.5.6),得到关于 $\hat{u}$ 的代数方程

$$P\hat{u} = \hat{f}.$$

解出 $\hat{u} = P^{-1}\hat{f}$,然后用反演公式(6.5.9)′ 与式(6.5.17) 得

$$u = (2\pi)^{-n}f*(P^{-1})^{\wedge\vee}. \tag{6.5.25}$$

以上运算所需条件未必都满足,因而所得的 u 还只是一种“形式解”. 但一旦有了形式解(6.2.25),在 f 与 P 的一定条件下就可能利用式(6.2.25) 直接验证 u 确为原方程的解. 看如下简单例子:

例 6.5.2 (i) 考虑二阶常微分方程

$$u''-u+f=0. \tag{6.5.26}$$

以 $n=1, P(x)=1+x^2$ 代入式(6.5.25)得

$$u=\frac{1}{2\pi}f*\left(\frac{1}{1+\xi^2}\right)^{\wedge}(x)=\frac{1}{2}f*\mathrm{e}^{-|x|}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\mathrm{e}^{-|x-y|}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x}f(y)\mathrm{e}^{y}\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\int_{x}^{\infty}f(y)\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y.$$

当 $f\in C(\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R})$ 时,可验证如上的 u 确是方程(6.5.26)的解.

(ii) 考虑以下线性偏微分方程:

$$\begin{cases}u_t=\Delta u, & t>0, x\in\mathbb{R}^n,\\ u(0,x)=f(x), & x\in\mathbb{R}^n,\end{cases}\tag{6.5.27}$$

对 x 作 Fourier 变换得

$$\begin{cases}\hat{u}_t(t,\xi)=-|\xi|^2\hat{u}(t,\xi),\\ \hat{u}(0,\xi)=\hat{f}(\xi).\end{cases}$$

由此解出

$$\hat{u}(t,\xi)=\hat{f}(\xi)\exp(-t|\xi|^2).$$

于是由反演公式及式(6.5.17)有

$$\begin{aligned}u(t,x)&=(2\pi)^{-n}(\hat{f}\mathrm{e}^{-t|\xi|^2})^{\wedge\vee}(x)\\ &=(2\pi)^{-2n}(f^{\wedge\wedge\vee}*(\mathrm{e}^{-t|\xi|^2})^{\wedge})(x)\\ &=(2\pi)^{-n}\left(f*\left(\frac{\pi}{t}\right)^{n/2}\mathrm{e}^{-|x|^2/4t}\right)(x)\\ &=\left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{n/2}\int f(y)\mathrm{e}^{-|x-y|^2/4t}\mathrm{d}y\\ &=(f*\Gamma_m)(x),\quad m=1/2\sqrt{t}.\end{aligned}\tag{6.5.28}$$

只要 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$,就可直接验证,用式(6.5.28)表示的函数 $u(t,x)$ 在 $t>0$ 时满足方程 $u_t=\Delta u$. 当 $t\to 0^+$ 时 $u(t,x)$ 几乎处处收敛且 L^1 收敛于 $f(x)$(分别由定理 6.3.4 与定理 6.3.1).

(iii) 考虑与方程(6.5.27)稍不同的问题

$$\begin{cases}u_{tt}+\Delta u=0, & t>0, x\in\mathbb{R}^n,\\ u(0,x)=f(x), & x\in\mathbb{R}^n.\end{cases}\tag{6.5.29}$$

如同在(ii)中一样作 Fourier 变换后解出

$$\hat{u}(t,\xi)=\hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{-t|\xi|}.$$

于是用反演公式得

$$u(t,x)=(2\pi)^{-n}(\hat{f}\mathrm{e}^{-t|\xi|})^{\wedge\vee}(x)$$

$$= (2\pi)^{-n}(f*(e^{-t|\xi|})^{\wedge})(x)$$
$$= (f*P_t)(x),$$

其中,P_t 是 Poisson 核. 上式正好与式(6.3.15)一致,这就重新得到了推论 6.3.3.

6.6 局部紧群上的 Fourier 变换

我们从以上两节看到,$\mathbb{T}^n$ 与$\mathbb{R}^n$ 上的 Fourier 分析表现出令人注目的类似性. 这就不禁让人设想,也许这两者原不过是一个更一般理论的特殊情形. 这样,我们就来到了一个高度诱人的理论——抽象群上的 Fourier 分析(或称为调和分析)的入口处. 不过,本书并无足够的篇幅深入这一内容宏富的领域了. 仅限于考虑局部紧加群上的 Fourier 变换且只涉及最基本的概念与结论, 但即使如此有限的材料,也足以明确显示这一理论的基本特色. 进到这一步,除了为深入该领域的读者提供初步导引之外,更主要的或许是这将有助于获得对前几节内容的更好理解.

以下设 G 是给定的 σ 紧的局部紧加群,μ 是 G 上的 Haar 测度, E 是给定的复 Banach 空间, $L^p(G,E) = L^p(G,E,\mu)$. 沿用6.1 节 ~6.3 节中的记号与约定.

如我们已多次提到的,Fourier 分析的基本课题就是要寻求一定函数关于某个标准函数系 $\{\varphi_\xi\}$ 的适当分解,这种分解表为某个积分(如在 3.1 节中已强调的,级数原不过是积分的特例). 所说的标准函数系在 $\mathbb{T}^n$ 与$\mathbb{R}^n$ 上分别为$\{e_k : k \in \mathbb{Z}^n\}$ 与$\{e_\xi : \xi \in \mathbb{R}^n\}$. 那么在抽象的群 G 上又是什么呢?不妨注意一下指数函数 $e_\xi(\xi \in \mathbb{R}^n)$ 的两个最起作用的性质:加法公式 $e_\xi(x+y) = e_\xi(x)e_\xi(y)$ 与 $|e_\xi(x)| \equiv 1$. 有经验的读者马上意识到:这是一个群同态!这一观察启示出如下定义:

定义 6.6.1 任何连续群同态 $\varphi: G \to \mathbb{S}^1$ 称为 G 上的**特征**. 以 $\hat{G}$ 记 G 上特征的全体,它依乘法构成一个群,称为 G 的**对偶群**. 任给 $f \in L^1(G,E)$,令

$$\hat{f}(\varphi) = (f*\varphi)(0) = \int_G f\bar{\varphi}\mathrm{d}\mu, \quad \varphi \in \hat{G}, \tag{6.6.1}$$

则得到一个函数 $\hat{f}: \hat{G} \to E$,称它为 f 的 Fourier 变式,而称映射 $f \to \hat{f}$ 为 **Fourier 变换**.

立刻看几个具体例子.

例 6.6.1 (i) $\widehat{\mathbb{R}^n} = \{e_\xi : \xi \in \mathbb{R}^n\}$. 显然$\{e_\xi : \xi \in \mathbb{R}^n\} \subset \widehat{\mathbb{R}^n}$. 任取 $\varphi \in \widehat{\mathbb{R}^n}$. 首先设 $n = 1$. 必有 $b \in \mathbb{R}$,使 $\beta \triangleq \int_0^b \varphi(x)\mathrm{d}x \neq 0$. $\forall x \in \mathbb{R}$,有

$$\varphi(x) = \frac{1}{\beta}\int_0^b \varphi(x)\varphi(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{\beta}\int_x^{x+b}\varphi(y)\mathrm{d}y,$$

这推出 $\varphi'(x) = c\varphi(x), c = \beta^{-1}[\varphi(b) - 1]$. 由此解出 $\varphi(x) = \varphi(0)e^{cx} = e^{cx}$. 然后由 $|\varphi(x)| \equiv 1$ 得 $c = \mathrm{i}\xi, \xi \in \mathbb{R}$. 因此 $\varphi = e_\xi$. 其次设 $n > 1$,以 $\{\varepsilon_j\}$ 记$\mathbb{R}^n$ 的标准

基,则 $\forall x \in \mathbb{R}^n$,有

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_j x_j\varepsilon_j\right) = \prod_j \varphi(x_j\varepsilon_j) = \prod_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi_j x_j} = e_\xi(x),$$

其中,$\xi = (\xi_j) \in \mathbb{R}^n$,可见 $\varphi = e_\xi$.

设 $\mathbb{R}^n$ 与$\widehat{\mathbb{R}^n}$ 分别看成加群与乘法群,则

$$\mathbb{R}^n \to \widehat{\mathbb{R}^n}, \quad \xi \to e_\xi$$

显然是一群同构. 以 $\mathbb{R}^n$ 取代$\widehat{\mathbb{R}^n}$,不妨就说$\mathbb{R}^n$ 的对偶群就是$\mathbb{R}^n$. 但应注意,当将$\mathbb{R}^n$ 看成$\widehat{\mathbb{R}^n}$ 时,$\xi \in \mathbb{R}^n$ 应理解为 e_ξ. 任给$f \in L^1(\mathbb{R}^n, E)$,$\xi \in \mathbb{R}^n$,由式(6.6.1) 有

$$\hat{f}(\xi) = (f * e_\xi)(0),$$

这恰与定义 6.5.1 一致.

(ii) $\widehat{\mathbb{T}^n} = \{e_k : k \in \mathbb{Z}^n\}$. 注意$\varphi \in \widehat{\mathbb{T}^n} \Leftrightarrow \varphi \in \widehat{\mathbb{R}^n}$ 且φ对每变元是以2π 为周期的函数. 这就用(i)得出 $\varphi = e_k, k \in \mathbb{Z}^n$. 类似于对$\widehat{\mathbb{R}^n}$ 的讨论,不妨以 $\mathbb{Z}^n$ 取代$\widehat{\mathbb{T}^n}$作为$\mathbb{T}^n$ 的对偶群,但将$\mathbb{Z}^n$ 看成$\widehat{\mathbb{T}^n}$时,$k \in \mathbb{Z}^n$ 应理解为 e_k. 任给$f \in L^1(\mathbb{T}^n, E)$,依据式(6.6.1) 有

$$\hat{f}(k) = (f * e_k)(0),$$

这与定义 6.4.1 相差因子 $(2\pi)^{-n}$. 但若在$\mathbb{T}^n$ 上采用正规化 Haar 测度 $\mathrm{d}\mu = (2\pi)^{-n}\mathrm{d}x$, 这一差别就消失了.

(iii) $\widehat{\mathbb{Z}^n} = \{e_\xi : \xi \in \mathbb{T}^n\}$. $\forall \varphi \in \widehat{\mathbb{Z}^n}$,有

$$\begin{aligned}\varphi(k) = \varphi\left(\sum_j k_j\varepsilon_j\right) &= \prod_j [\varphi(\varepsilon_j)]^{k_j} \\ &= \prod_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi_j k_j} = e_\xi(k),\end{aligned}$$

其中,$\{\varepsilon_j\}$ 仍为$\mathbb{R}^n$ 的标准基,$\xi = (\xi_j) \in \mathbb{R}^n$. 注意当$\xi_j \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2\pi)(1 \leqslant j \leqslant n)$ 时 $e_\xi(k) \equiv 1$,故ξ 应理解为$\xi \in \mathbb{T}^n$. 同样可认为$\widehat{\mathbb{Z}^n} = \mathbb{T}^n$,只是将$\mathbb{T}^n$ 看成$\widehat{\mathbb{Z}^n}$时,$\xi \in \mathbb{T}^n$ 应理解为 $e_{-\xi}$①. 任给$f \in l^1(\mathbb{Z}^n, E)$,依式(6.6.1) 有

$$\hat{f}(\xi) = (f * e_{-\xi})(0) = \sum_k f(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot\xi}. \tag{6.6.2}$$

因式(6.6.2)中的级数绝对并一致收敛,故$\hat{f} \in C(\mathbb{T}^n, E)$. 这种形式的$\hat{f}$已在例 5.1.1(iv) 中提到了,只是未将其称为 Fourier 变换罢了.

再回到一般群 G 上的 Fourier 变换. 命题 6.4.1 的那些性质,仍有一部分可推

---

① 这里用了群同构 $\mathbb{T}^n \to \widehat{\mathbb{Z}^n}, \xi \to e_{-\xi}$. 用 $e_{-\xi}$ 取代似乎更自然的 e_ξ,意在使式(6.6.2) 右端恰为$\hat{f}(\xi)$ 的 Fourier 级数.

广到现在的一般情况.

命题 6.6.1 群 G 上的 Fourier 变换有以下性质:

(i) 卷积公式:若 $f \in L^1(G,E)$,$g \in L^1(G)$,则

$$(f * g)^\wedge = \hat{f}\hat{g}. \tag{6.6.3}$$

此外亦有 $\widehat{g^*} = \bar{\hat{g}}$. 因此 $g \to \hat{g}$ 是卷积代数 $L^1(G)$ 上的一个$(*)$代数同态;

(ii) 平移规则: $(\tau_a f)^\wedge(\varphi) = \varphi(a)\hat{f}(\varphi)$,$(\psi f)^\wedge(\varphi) = \hat{f}(\varphi\bar{\psi})$($f \in L^1(G, E)$,$\varphi,\psi \in \hat{G}$,$a \in G$).

证 证明是直接的,仅以证式(6.6.3)为例作说明. $\forall \varphi \in \hat{G}$,有

$$\begin{aligned}(f * g)^\wedge(\varphi) &= \int_G \varphi(-x)\mathrm{d}\mu(x)\int_G f(x-y)g(y)\mathrm{d}\mu(y) \\ &= \int_G g(y)\varphi(-y)\mathrm{d}\mu(y)\int_G f(x-y)\varphi(y-x)\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \hat{g}(\varphi)\hat{f}(\varphi).\end{aligned}$$

□

若令 $\tilde{\varphi}(f) = \hat{f}(\varphi)$,则从式(6.6.3)推出:给定 $\varphi \in \hat{G}$,$\forall f,g \in L^1(G)$,有

$$\tilde{\varphi}(f * g) = \hat{f}(\varphi)\hat{g}(\varphi) = \tilde{\varphi}(f)\tilde{\varphi}(g),$$

因而 $\tilde{\varphi}$ 是 $L^1(G)$ 上的复同态. 这就预示着可建立 Fourier 变换与 Banach 代数的 Gelfand 表示的联系,这一点似乎已早显端倪了.

定理 6.6.1 设 $\Delta = \Delta(L^1(G))$,$\tilde{\varphi}(f) = \hat{f}(\varphi)$($\varphi \in \hat{G}$,$f \in L^1(G)$),则 β: $\hat{G} \to \Delta$,$\varphi \to \tilde{\varphi}$ 是一双射.

证 给定 $\varphi \in \hat{G}$,已说明 $\tilde{\varphi}$ 是 $L^1(G)$ 上的复同态. $\forall f \in L^1(G)$,有

$$\tilde{\varphi}(|f|\varphi) = (|f|\varphi)^\wedge(\varphi) = \int_G |f|\varphi\bar{\varphi}\mathrm{d}\mu = \|f\|_1,$$

可见 $\tilde{\varphi} \neq 0$,因此 $\tilde{\varphi} \in \Delta$.

其次证 $\varphi \to \tilde{\varphi}$ 是单射. 设 $\varphi \in \hat{G}$, 取 $f \in L^1(G)$ 使 $\tilde{\varphi}(f) = 1$,则

$$\varphi(x) = \varphi(x)\hat{f}(\varphi) = (\tau_x f)^\wedge(\varphi) = \tilde{\varphi}(f_x), \quad x \in G, \tag{$*$}$$

其中用了命题 6.6.1(ii). 这表明 φ 由 $\tilde{\varphi}$ 唯一决定.

最后证 $\varphi \to \tilde{\varphi}$ 是满射. 取定 $h \in \Delta$. 取 $f \in L^1(G)$,使 $h(f) = 1$. 令 $\varphi(x) = h(f_x)$(如此定义乃受式$(*)$之启发),则

$$\varphi(x+y) = h(f * f_{x+y}) = h(f_x * f_y) = \varphi(x)\varphi(y).$$

由 $|\varphi(x)|^n = |\varphi(nx)| \leqslant \|f_{nx}\|_1 = \|f\|_1$($\forall n \in \mathbb{Z}$)推出 $|\varphi(x)| = 1$,因此 φ: $G \to \mathrm{S}^1$ 是一群同态. 由 h 连续及 $x \to f_x$ 连续(由定理 6.1.3)得出 φ 连续,因此 $\varphi \in \hat{G}$. 余下证 $h = \tilde{\varphi}$. 因 $h \in L^1(G)^*$,故由定理 3.5.2 有 $w \in L^\infty(G)$,使得

$$h(g) = \int_G gw\mathrm{d}\mu, \quad g \in L^1(G).$$

于是, $\forall g \in L^1(G)$ 有

$$h(g) = h(f*g) = \int_G w(x)\mathrm{d}\mu(x)\int_G f(x-y)g(y)\mathrm{d}\mu(y)$$

$$= \int_G g(y)\mathrm{d}\mu(y)\int_G f(x-y)w(x)\mathrm{d}\mu(x)$$

$$= \int_G g(y)\varphi(-y)\mathrm{d}\mu(y) = \hat{g}(\varphi) = \tilde{\varphi}(g),$$

这得出 $h = \tilde{\varphi}$，如所要证. □

一旦确定了 $\hat{G}\to\Delta,\varphi\to\tilde{\varphi}$ 为双射，两个自然的推论即随之而出. 其一是正好将 Δ 上的 Gelfand 拓扑转移至 $\hat{G}$，使 $\hat{G}$ 成为同胚于 Δ 的 LCH. 其二是如同在第5章于类似情况下总要作的，用双射 $\beta: \hat{G}\to\Delta$ 诱导出一个双射 $C_0(\Delta)\to C_0(\hat{G}),u\to u\circ\beta$. 而这就将 Gelfand 表示 $\Gamma: L^1(G)\to C_0(\Delta)$ 过渡到

$$\tilde{\Gamma}: L^1(G)\to C_0(\hat{G}),\quad f\to(\Gamma f)\circ\beta.$$

由 Γf 及 β 的定义，$\forall\varphi\in\hat{G}$，有

$$((\Gamma f)\circ\beta)(\varphi) = (\Gamma f)(\tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi}(f) = \hat{f}(\varphi),$$

这就表明 $\tilde{\Gamma}$ 不是别的，正是 Fourier 变换！或者反过来说，

$$F: L^1(G)\to C_0(\hat{G}),\quad f\to\hat{f}$$

恰是卷积代数 $L^1(G)$ 的 Gelfand 表示，而 $\hat{G}$ 上的拓扑就是 Gelfand 拓扑，它是使每个 $\hat{f}$ 在 $\hat{G}$ 上连续的最弱拓扑，$\sigma(f) = \hat{f}(\hat{G})\cup\{0\}$（当 $\hat{G}$ 紧时 $\sigma(f) = \hat{f}(\hat{G})$，见定理5.3.2与定理5.3.5）. 这就将看来似乎相距甚远的两个领域——交换 B 代数与群上的 Fourier 分析联系起来了. 通常 Fourier 分析中所说的谱也获得了合理的解释. 仅此一端，就很难抵挡抽象 Fourier 分析理论的强烈诱惑.

由于已建立起 $\hat{G}$ 与 Δ 之间的自然联系，往下就直接认定对偶群 $\hat{G}$ 就是卷积代数 $L^1(G)$ 的结构空间，而且直接将 $\varphi\in\hat{G}$ 认作 $L^1(G)$ 上的复同态：$\varphi(f) = \hat{f}(\varphi)$. 联系到例6.6.1，立即得出：$L^1(\mathbb{R}^n)$，$L^1(\mathbb{T}^n)$ 与 $l^1(\mathbb{Z}^n)$ 的结构空间分别为$\mathbb{R}^n$，$\mathbb{Z}^n$ 与$\mathbb{T}^n$，这些空间上的通常拓扑就是其 Gelfand 拓扑，而 Fourier 变换

$$L^1(\mathbb{R}^n)\to C_0(\mathbb{R}^n),\quad f\to\hat{f},$$

$$L^1(\mathbb{T}^n)\to C_0(\mathbb{Z}^n),\quad f\to\hat{f},$$

$$l^1(\mathbb{Z}^n)\to C(\mathbb{T}^n),\quad f\to\hat{f}$$

都是 Gelfand 表示，因之也是（ * ）代数同态.

将有关 Gelfand 表示的种种结果用于 Fourier 变换，可轻而易举地得出一些深刻而有趣的结论，它们的直接证明未必容易. 以下就是一个典型例子.

定理 6.6.2　设 $g(z)(|z|<R)$ 为复解析函数，$f\in L^1(G)$，$\|\hat{f}\|_0 < R$，当 $\mu G = \infty$ 时 $g(0) = 0$. 则存在 $h\in L^1(G)$，使得 $\hat{h} = g\circ\hat{f}$.

证　设 $g(z) = \sum_0^\infty c_k z^k(|z|<R)$，当 $\mu G = \infty$ 时 $c_0 = 0$. 因 $\hat{f}$ 可看成 f 的 Gelfand 表示，故由 $\|\hat{f}\|_0 < R$ 与定理5.3.2得 $r_\sigma(f) < R$. 于是，由定理5.1.2(iv)知

级数 $\sum c_k f^{(k)}$ ($f^{(k)}$ 记 f 的 k 重卷积) L^1 收敛于某个 $h \in L^1(G)$. 由 Gelfand 表示为连续同态,有

$$\hat{h} = \sum_k c_k \widehat{f^{(k)}} = \sum_k c_k \hat{f}^k = g \circ \hat{f}. \qquad \square$$

由定理 6.6.2 特别推出:设 $g(0) = 0$;若 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\|\hat{f}\|_0 < R$,则存在 $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$,使 $\hat{h} = g \circ \hat{f}$;若 $f \in C(\mathbb{T}^n)$, $\hat{f} \in l^1(\mathbb{Z}^n)$, $\|f\|_0 < R$,则 $(g \circ f)^\wedge \in l^1(\mathbb{Z}^n)$. 后一结果(取 $n = 1$)就是所谓 Lévy 定理.

如同在 $\mathbb{R}^n$ 中一样,Fourier 变换的反演是需要解决的基本问题. 因在 G 中缺少具体的结构可用,不得不发展出一些可用作替代的抽象概念,这就使得下面的讨论略显隐晦与曲折.

首先引进一个基本结果而略去其证明.

定理 6.6.3 $\hat{G}$ 依 Gelfand 拓扑是一个交换的局部紧拓扑群.

回忆一下,(*)代数 A 上的线性泛函 f 称为正泛函意指它满足 $f(xx^*) \geq 0$ ($\forall x \in A$,由定义 5.4.2).

定义 6.6.2 设 $\varphi \in C(G)$, 若对任给有限组 $\{\alpha_j\} \subset \mathbb{C}$, $\{x_j\} \subset G$,有

$$\sum_{j,k} \alpha_j \overline{\alpha}_k \varphi(x_j - x_k) \geq 0, \tag{6.6.4}$$

则称 φ 为 G 上的**正定函数**.

式(6.6.4)是一个颇强的条件,它有多种未必显然的推论.

命题 6.6.2 (i) 正定函数 φ 有以下性质: $\varphi = \varphi^*$, $|\varphi(x)| \leq \varphi(0)$, $\varphi(x)$ 一致连续;

(ii) $\varphi \in \hat{G}$ 必正定. 若 $f \in L^2(G)$,则 $f * f^*$ 正定.

其中(ii)的验证是直接的. (i)的验证依赖于选取适当的 α_j, x_j 应用条件(6.6.4). 例如,取 $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$, $x = 0$ 即得 $|\alpha|^2 \varphi(0) \geq 0$,从而 $\varphi(0) \geq 0$. 其次,取 $x_1 = 0, x_2 = x, \alpha_1 = \alpha_2 = 1$ 得

$$2\varphi(0) + \varphi(x) + \varphi(-x) \geq 0,$$

这得出 $\mathrm{Im}[\varphi(x) + \varphi(-x)] = 0$. 改令 $\alpha_2 = \mathrm{i}$ 得 $\mathrm{Re}[\varphi(x) - \varphi(-x)] = 0$,因而 $\varphi(x) = \overline{\varphi(-x)}$,即 $\varphi = \varphi^*$. 其余性质可类似得出.

对于反演公式的建立,以下结果是关键的;

定理 6.6.4 (Bochner) $f: G \to \mathbb{C}$ 是正定函数的充要条件是存在正测度 $\nu \in M(\hat{G})$,使得

$$f(x) = \int_{\hat{G}} \varphi(x) \mathrm{d}\nu(\varphi), \quad x \in G. \tag{6.6.5}$$

证 充分性是明显的,只要证必要性. 设 f 是正定函数,不妨设 $f(0) = 1$. 定义

$$L(g) = \int_G f g \mathrm{d}\mu, \quad g \in L^1(G), \tag{6.6.6}$$

则 $L \in L^1(G)^*$ 且 $\|L\| = \|f\|_0 = 1$（由定理3.5.2与命题6.6.2(i)）. 令 $A(\hat{G}) = \{\hat{g}: g \in L^1(G)\}$，定义

$$T: A(\hat{G}) \to \mathbb{C}, \quad \hat{g} \to L(g).$$

如果能证 $|L(g)| \leqslant \|\hat{g}\|_0$，则 T 是单值的且是一有界线性泛函，因而由 Hahn-Banach 定理可设 $T \in C_0(\hat{G})^*$，于是由定理3.5.3有 $\nu \in M(\hat{G})$，使得

$$L(g) = \int_{\hat{G}} \hat{g}(\varphi)\mathrm{d}\nu(\varphi), \quad g \in L^1(G).$$

因此

$$L(g) = \int_{\hat{G}} \mathrm{d}\nu(\varphi)\int_G g\varphi \mathrm{d}\mu = \int_G g\mathrm{d}\mu \int_{\hat{G}} \varphi \mathrm{d}\nu(\varphi),$$

这与式(6.6.6)对照得出式(6.6.5)（注意 f 连续）. 由 $\|\nu\| = \|T\| \leqslant 1 = f(0) = \nu(\hat{G})$ 得出 $\nu(\hat{G}) = \|\nu\|$. 令 $\mathrm{d}\nu = h\mathrm{d}|\nu|$, $|h| = 1$，则必 $h = 1$, $|\nu|$-a.e.，因而 $\nu = |\nu|$ 是正测度.

现在证 $|L(g)| \leqslant \|\hat{g}\|_0$. 取定 $g \in L^1(G)$，令 $h = g * g^*$. 约定 $h^n = h * h * \cdots * h$（n 重积）. 若能证 $|L(g)|^2 \leqslant L(h)$，则类似于定理5.4.1(i)之证可归纳地得出 $|L(g)|^{2^{n+1}} \leqslant L(h^{2^n})$. 于是

$$\begin{aligned} |L(g)|^2 &\leqslant \overline{\lim_n} [L(h^{2^n})]^{2^{-n}} \leqslant \lim_n \|h^{2^n}\|_1^{2^{-n}} \\ &= r_\sigma(h) = \|\hat{h}\|_0 = \|\hat{g}\|_0^2, \end{aligned}$$

其中，用到谱半径公式与定理5.3.2. 由以上结果得出 $|L(g)| \leqslant \|\hat{g}\|_0$.

余下证 $|L(g)|^2 \leqslant L(g * g^*)$. L 显然是 $L^1(G)$ 上的正泛函. 由定理5.4.6, $\langle g,h\rangle \triangleq L(g * h^*)$ 满足内积公理(I_1), (I_2)（由定义1.7.1），$\langle g,g\rangle \geqslant 0$ 且满足 Schwarz 不等式(5.4.11). 只要证 $|L(g)| \leqslant \sqrt{\langle g,g\rangle}$. 为此注意，对任给 $g,h \in L^1(G)$ 有

$$\begin{aligned} |L(g)| &\leqslant |L(g) - \langle g,h\rangle| + \sqrt{\langle g,g\rangle\langle h,h\rangle} \\ &\leqslant |L(g) - \langle g,h\rangle| + \sqrt{\langle g,g\rangle}\,|\sqrt{\langle h,h\rangle} - 1| + \sqrt{\langle g,g\rangle} \\ &\triangleq I_1 + I_2 + \sqrt{\langle g,g\rangle}. \end{aligned}$$

固定 $g \in L^1(G)$，只要说明适当选取 $h \in L^1(G)$ 可使 I_1, I_2 任意小. $\forall \varepsilon > 0$，取 G 的紧邻域 V，使得

$$|f(x-y) - f(x)| \vee |f(y-z) - 1| < \varepsilon, \quad x \in G, y, z \in V.$$

令 $h = \xi_V/\mu V$，则可直接验证 $I_1 \leqslant \varepsilon\|g\|_1$, $|\langle h,h\rangle - 1| < \varepsilon$，从而 $I_2 \leqslant \varepsilon\sqrt{\langle g,g\rangle}$，如所要证. □

作了以上准备之后，现在已可建立本节的主要结果.

定理6.6.5　设 P 是 $L^1(G)$ 中的正定函数生成的子空间，则存在 $\hat{G}$ 上的 Haar 测度 η，使得对任给 $g \in P$，有 $\hat{g} \in L^1(\hat{G})$（$= L^1(\hat{G},\eta)$，下同）且成立反演公式

$$g(x) = \int_{\hat{G}} \hat{g}(\varphi)\varphi(x)\mathrm{d}\eta(\varphi), \quad x \in G. \tag{6.6.7}$$

证 关键是构成所需的测度 η，为此用 Riesz 表示定理. $\forall g \in P$，由定理6.6.4有 $\nu \in M(\hat{G})$，使得

$$g(x) = \int_{\hat{G}} \varphi(x)\mathrm{d}\nu(\varphi), \quad x \in G. \tag{6.6.8}$$

任给$f \in C_c(\hat{G})$，选取 $g \in P$，使在supp f 上 $\hat{g} > 0$（可说明这样的 g 必存在），然后令

$$L(f) = \int_{\hat{G}} (f/\hat{g})\mathrm{d}\mu. \tag{6.6.9}$$

若有 $h \in P, \lambda \in M(\hat{G})$ 使得

$$h(x) = \int_{\hat{G}} \varphi(x)\mathrm{d}\lambda(\varphi), \quad x \in G,$$

则对任给 $v \in L^1(G)$ 可验证

$$\int_{\hat{G}} \hat{g}\hat{v}\mathrm{d}\lambda = (g * h * v)(0) = \int_{\hat{G}} \hat{h}\hat{v}\mathrm{d}\nu.$$

用推论5.4.2 可说明 $A(\hat{G})$ 在 $C_0(\hat{G})$ 中稠密，故由以上等式得出 $\hat{g}\mathrm{d}\lambda = \hat{h}\mathrm{d}\nu$. 这表明由式(6.6.9)定义的$L(f)$ 与g的选择无关. $L(f)$ 是$C_c(\hat{G})$ 上的正线性泛函，因而唯一决定 $\hat{G}$ 上一正测度 η，显然 $\eta(\hat{G}) > 0$.

平移不变性：设 $\varphi_0 \in \hat{G}, f \in C_c(\hat{G})$，令$f_0(\varphi) = f(\varphi_0\varphi)$，$g_0 = \bar{\varphi}_0 g$，则$\hat{g}_0(\varphi) = \hat{g}(\varphi_0\varphi)$，$g_0(x) = \int_{\hat{G}} \varphi(x)\mathrm{d}\nu(\varphi_0\varphi)$，

$$L(f_0) = \int_{\hat{G}} (f_0/\hat{g}_0)\mathrm{d}\nu(\varphi_0\varphi) = \int_{\hat{G}} (f/\hat{g})\mathrm{d}\nu = L(f).$$

因此，η 是 $\hat{G}$ 上的 Haar 测度.

证式(6.6.7). $\forall f \in C_c(\hat{G})$，有

$$\int_{\hat{G}} f\hat{g}\mathrm{d}\eta = L(f\hat{g}) = \int_{\hat{G}} f\mathrm{d}\nu$$

（其中用了式(6.6.9)），这得出 $\mathrm{d}\nu = \hat{g}\mathrm{d}\eta$，因而 $\hat{g} \in L^1(\hat{G})$. 然后以 $\mathrm{d}\nu = \hat{g}\mathrm{d}\eta$ 代入式(6.6.8)，即得式(6.6.7)，如所要证. □

将反演公式(6.6.7)与反演公式(6.5.9)比较，自然提出一个问题：式(6.6.7)可看成 $\hat{G}$ 上的 Fourier 变换吗? 而这首先又取决于 G 是 $\hat{G}$ 的对偶群吗? 对此，俄罗斯数学家 Pontryagin 给出了肯定回答. 下面不加证明地引述他的结果（刘登胜等，1992）.

定理 6.6.6 设 $\tilde{x}(\varphi) = \varphi(x)\,(x \in G, \varphi \in \hat{G})$，则

$$G \to G^{\wedge\wedge}, \quad x \to \tilde{x}$$

是一个拓扑同构.

以上结果表明，局部紧交换群总是自反的. 这意味着，G 与 $\hat{G}$ 在相互关系上完

全对等,对 G 适用的结论经适当解释后亦可用于 $\hat{G}$,反之亦然. 如此带来的好处有多大是不言而喻的. 下面就是一个例子. 任给 $\nu \in M(G)$, 定义其 Fourier 变换为

$$\hat{\nu}(\varphi) = (\nu * \varphi)(0) = \int_G \bar{\varphi} \mathrm{d}\nu. \tag{6.6.10}$$

$\hat{\nu}$ 也称为 ν 的 **Fourier-Stieltjes 变换.**

定理 6.6.7(唯一性) 设 $\nu \in M(G)$, $\hat{\nu} = 0$, 则 $\nu = 0$.

证 以 $\hat{G}$ 代 G 来证明. 设 $\nu \in M(\hat{G})$, $\hat{\nu} = 0$, 则 $\forall f \in L^1(G)$, 有

$$\begin{aligned}\int_{\hat{G}} \hat{f} \mathrm{d}\nu &= \int_{\hat{G}} \mathrm{d}\nu(\varphi) \int_G f \bar{\varphi} \mathrm{d}\mu \\ &= \int_G f \mathrm{d}\mu \int_{\hat{G}} \bar{\varphi} \mathrm{d}\nu(\varphi) \\ &= \int_G f \hat{\nu} \mathrm{d}\mu = 0.\end{aligned}$$

因 $A(\hat{G})$ 在 $C_0(\hat{G})$ 中稠密,故得 $\nu = 0$. □

除了所需条件比较强之外,式(6.6.7)已是完全与式(6.5.9)相当的反演公式了. 因此凡能从(6.5.9)推出的结论,自然可期待能用式(6.6.7)类似地推出. 这些都可逐一进行讨论,不再详述.

最后指出,在群 G 上也可考虑 L^2- Fourier 变换,这就是一般的 Plancherel 定理(对照定理 6.5.3).

定理 6.6.8 存在唯一等距同构 $F: L^2(G) \to L^2(\hat{G})$, 使得对 $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ 有 $Ff = \hat{f}$.

上述的 F 就称为 G 上的 L^2- Fourier 变换.

证 若 $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$, 则 $g \triangleq f * f^* \in P$(记号依定理 6.6.5), 于是

$$\|f\|_2^2 = g(0) = \int_{\hat{G}} \hat{g}(\varphi)\varphi(0)\mathrm{d}\eta(\varphi) = \|\hat{f}\|_2^2,$$

其中用了式(6.6.7), η 是 $\hat{G}$ 上的 Haar 测度. 可见

$$F: L^1(G) \cap L^2(G) \to L^2(\hat{G}), \quad f \to \hat{f}$$

是一个等距线性算子. 因 $L^1 \cap L^2$ 在 L^2 中稠密,故 F 必可唯一地扩张为 $L^2(G)$ 上的等距线性算子. 余下只要证 F 是满射. 为此只要证 $R(F)^{\perp} = \{0\}$. 设 $g \in R(F)^{\perp}$, $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$, 令 $\mathrm{d}\nu = \hat{f} g \mathrm{d}\eta$, 则 $\nu \in M(\hat{G})$, $\forall x \in G$, 有

$$\begin{aligned}\hat{\nu}(x) &= \int_{\hat{G}} \overline{\varphi(x)} \mathrm{d}\nu(\varphi) = \int_{\hat{G}} \overline{\varphi(x)} \hat{f}(\varphi) g(\varphi) \mathrm{d}\eta(\varphi) \\ &= \int_{\hat{G}} g(\varphi)(\tau_{-x} f)^{\wedge}(\varphi)\mathrm{d}\eta(\varphi) = 0,\end{aligned}$$

其中, 用到命题 6.6.1(ii)与 $(\tau_{-x} f)^{\wedge} \in R(F)$. 由唯一性得 $\nu = 0$, 从而 $\hat{f} g = 0$, η-a. e., 这又推出 $g = 0$, η-a. e., 如所要证. □

紧群上的 Fourier 分析,可看成抽象形式的 Fourier 级数理论.

定理 6.6.9 设 G 是紧的,$\mu G = 1$,$\hat{G}$ 是 σ 紧的,则以下结论成立:

(i) $\hat{G} = \{\varphi_k\}$ 是可数的离散群;

(ii) $\hat{G}$ 是 $C(G)$ 与 $L^p(G)(1 \leqslant p < \infty)$ 的基本集;

(iii) $\{\varphi_k\}$ 是 $L^2(G)$ 的标准正交基, 每个 $f \in L^2(G)$ 可展开为 L^2 收敛的 Fourier 级数 $\sum \hat{f}(\varphi_k)\varphi_k$; $L^2(G) \to l^2(G)$, $f \to \hat{f}$ 为等距同构.

证 (i) 以 1 记 G 上恒等于 1 的函数,则 1 是正定函数. 令 $\delta = \hat{1}$,则 $1 = \hat{\delta}$(由定理 6.6.5). 任给 $h \in L^1(\hat{G})$,由 $(h * \delta)^\wedge = \hat{h}\hat{\delta} = \hat{h}$ 推出 $h * \delta = h$,a.e.(由定理 6.6.7),可见 δ 是 $L^1(\hat{G})$ 的卷积单位元,因此 $\hat{G}$ 是离散的(由定理 6.2.6),因而是可数的.

(ii) 由定理 6.6.6,当 $0 \neq x \in G$ 时必 $\tilde{x}(\varphi) \neq 1$,即有 $\varphi \in \hat{G}$ 使 $\varphi(x) \neq 1$. 这推出若 $x, y \in G, x \neq y$,则有 $\varphi \in \hat{G}$ 使 $\varphi(x - y) = \varphi(x)/\varphi(y) \neq 1$,从而 $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. 可见 $\hat{G}$ 分离 G 中的点. 其次显然 $1 \in \hat{G}$;$\varphi \in \hat{G} \Rightarrow \bar{\varphi} = \varphi^{-1} \in \hat{G}$. 于是由定理 5.4.2 推出 $\hat{G}$ 是 $C(G)$ 的基本集,从而也是 $L^p(G)(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 的基本集(由定理 3.5.1(ii)).

(iii) 任给 $\varphi \in \hat{G}, x \in G$,有

$$\int_G \varphi \mathrm{d}\mu = \int_G \varphi_x \mathrm{d}\mu = \varphi(x)\int_G \varphi \mathrm{d}\mu,$$

这推出 $\int_G \varphi \mathrm{d}\mu = 0$ 或者 $\varphi(x) \equiv 1$,从而 $\int_G \varphi \mathrm{d}\mu = 1$. 以 φ_j/φ_k 代 φ 得

$$\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = \int_G (\varphi_j/\varphi_k)\mathrm{d}\mu = \delta_{jk}.$$

可见 $\{\varphi_k\}$ 是标准正交系. 其次有 $\hat{f}(\varphi_k) = \langle f, \varphi_k \rangle (f \in L^2(G), \varphi_k \in \hat{G})$. 余下结论由定理 1.7.2 与推论 1.7.1 得出. □

6.7 Laplace 变换

Laplace 变换可看成 Fourier 变换的某种变种,它在某些方面有明显优势,因而值得重视. 本节主要是从应用 Fourier 分析的结果与思想的角度展开讨论,并不追求完备性,对于所用的概念与条件都作了适当简化.

任给可测函数 $f: \mathbb{R}_+ \to E$, f 的 **Laplace 变换**定义为复变量函数

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x, \tag{6.7.1}$$

只要 $\tilde{f}(\lambda)$ 至少在某个半平面 $\operatorname{Re}\lambda > \sigma_0$ 上有定义. 对于 $\tilde{f}(\lambda)$ 首先易注意到的关键事实是:若 $\tilde{f}(\lambda)$ 有定义, $\lambda = \sigma + \mathrm{i}\xi \in \mathbb{C}$,约定 $f \mid (-\infty, 0) = 0$,则

$$\tilde{f}(\lambda) = (f(x)\mathrm{e}^{-\sigma x})^\wedge(\xi). \tag{6.7.2}$$

可见只要$f(x)\mathrm{e}^{-\sigma x}\in L^1(\mathbb{R}_+,E)$,$\tilde{f}(\sigma+\mathrm{i}\xi)$ 就存在. 因此约定

$$D(\sigma_0,E)=\{f:f(x)\mathrm{e}^{-\sigma x}\in L^1(\mathbb{R}_+,E),\ \forall\sigma>\sigma_0\},\tag{6.7.3}$$

$$\|f\|_\sigma=\int_0^\infty\|f(x)\|\mathrm{e}^{-\sigma x}\mathrm{d}x,\quad f\in D(\sigma_0,E),\sigma>\sigma_0.\tag{6.7.4}$$

显然 $\|f\|_\sigma$ 对 σ 是单调减的. 任给$f\in D(\sigma_0,E)$,$\tilde{f}(\lambda)$ 在半平面

$$\Omega(\sigma_0)\triangleq\{\lambda\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}\lambda>\sigma_0\}\tag{6.7.5}$$

内有定义,且易由定理 3.2.4 推出$\tilde{f}(\lambda)$ 在 $\Omega(\sigma_0)$ 内处处可微. 这就得到映射

$$L:D(\sigma_0,E)\to H(\Omega(\sigma_0),E),\quad f\to\tilde{f},\tag{6.7.6}$$

自然称 L 为 Laplace 变换. 约定 $D(\sigma_0)=D(\sigma_0,\mathbb{C})$. 任给 $f\in D(\sigma_0,E)$,$g\in D(\sigma_0)$,定义f 与 g 的卷积为

$$(f*g)(x)=\int_0^x f(x-y)g(y)\mathrm{d}y,\quad x\geqslant 0.\tag{6.7.7}$$

易直接验证$f*g\in D(\sigma_0,E)$. $D(\sigma_0)$ 依如上定义的卷积是一个交换代数. 对于 $f\in D(\sigma_0,E)$,下面将总约定$f|(-\infty,0)=0$. 在此约定下,如上的$f*g$可看成式 (6.2.1) 意义下的卷积.

对于 Laplace 变换有对应于命题6.5.1 的如下命题:

命题6.7.1 Laplace 变换(6.7.6)有以下性质:

(i) L 是一个线性算子,对任给$f\in D(\sigma_0,E)$, 成立

$$\|\tilde{f}\|_\sigma\triangleq\sup_{\operatorname{Re}\lambda\geqslant\sigma}\|\tilde{f}(\lambda)\|\leqslant\|f\|_\sigma,\quad\sigma>\sigma_0;\tag{6.7.8}$$

(ii) 卷积公式:任给$f\in D(\sigma_0,E)$,$g\in D(\sigma_0)$,成立

$$(f*g)^\sim=\tilde{f}\tilde{g}.\tag{6.7.9}$$

特别地,$D(\sigma_0)\to H(\Omega(\sigma_0))$,$g\to\tilde{g}$ 是一代数同态;

(iii) 设$f\in D(\sigma_0,E)$,则

$$(f\mathrm{e}^{\tau x})^\sim(\lambda)=\tilde{f}(\lambda-\tau),\quad\operatorname{Re}(\lambda-\tau)>\sigma_0,\tag{6.7.10}$$

$$(f(ax))^\sim(\lambda)=a^{-1}\tilde{f}(\lambda/a),\quad a>0,\operatorname{Re}\lambda>a\sigma_0;\tag{6.7.11}$$

(iv) 微分公式:设$f\in D(\sigma_0,E)$,$P(x)(x\in\mathbb{R})$ 是 m 次多项式,则

$$(P(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)f)^\sim=P(\lambda\cdot)\tilde{f}(\lambda),\quad P(\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda)\tilde{f}(\lambda)=(\check{P}f)^\sim(\lambda),\tag{6.7.12}$$

其中,$\lambda\in\Omega(\sigma_0)$. 前一式要求$f^{(k)}\in D(\sigma_0,E)(0\leqslant k\leqslant m)$ 且

$$f^{(k)}(x)\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big|_0^\infty=0,\quad 0\leqslant k<m.$$

若以上条件代以 $\lim\limits_{x\to\infty}f^{(k)}(x)\mathrm{e}^{-\lambda x}=0(0\leqslant k<m,\operatorname{Re}\lambda>\sigma_0)$, 则有

$$\widetilde{f^{(m)}}(\lambda)=\lambda^m\tilde{f}(\lambda)-\sum_{j=0}^{m-1}\lambda^{m-j-1}f^{(j)}(0),\quad\operatorname{Re}\lambda>\sigma_0.\tag{6.7.13}$$

以上结论的证明与命题6.5.1 是类似的,不必详述.

例6.7.1 (i) 设 $a,b\in\mathbb{R},\tau\in\mathbb{C},x>0$. 首先用 Euler 积分算出

$$(x^a)^\sim(\lambda) = \int_0^\infty x^a e^{-\lambda x} dx = \frac{\Gamma(a+1)}{\lambda^{a+1}}, \quad a > -1, \mathrm{Re}\,\lambda > 0,$$

然后应用式(6.7.10)得

$$(x^a e^{\tau x})^\sim(\lambda) = \Gamma(a+1)(\lambda - \tau)^{-a-1}, \quad a > -1, \mathrm{Re}\,\lambda > \mathrm{Re}\,\tau,$$

$$(x^a \sin bx)^\sim = (1/2\mathrm{i})(x^a e^{ibx} - x^a e^{-ibx})^\sim(\lambda)$$

$$= \frac{(\lambda + \mathrm{i}b)^{a+1} - (\lambda - \mathrm{i}b)^{a+1}}{2\mathrm{i}(\lambda^2 + b^2)^{a+1}} \Gamma(a+1), \quad a > -1, \mathrm{Re}\,\lambda > 0,$$

$$(x^a \cos bx)^\sim = \frac{(\lambda + \mathrm{i}b)^{a+1} + (\lambda - \mathrm{i}b)^{a+1}}{2(\lambda^2 + b^2)^{a+1}} \Gamma(a+1), \quad a > -1, \mathrm{Re}\,\lambda > 0,$$

$$(x e^x \sin x)^\sim(\lambda) = (1/2\mathrm{i})[(x e^{(1-\mathrm{i})x} - x e^{(1-\mathrm{i})x})]^\sim(\lambda)$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{2}\left[\frac{1}{(\lambda - 1 + \mathrm{i})^2} - \frac{1}{(\lambda - 1 - \mathrm{i})^2}\right], \quad \mathrm{Re}\,\lambda > 1.$$

(ii) 设 $P(x)$ 是 m 次常系数多项式,考虑 m 阶线性微分方程

$$P(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)u(x) = f(x), \quad x > 0.$$

假定$\tilde{f}(\lambda)$ 对 $\mathrm{Re}\,\lambda > \sigma_0$ 有定义, 未知函数 $u(x)$ 满足

$$\lim_{x\to\infty} u^{(k)}(x) e^{-\lambda x} = 0, \quad x \leqslant k < m, \mathrm{Re}\,\lambda > \sigma_0,$$

则应用式(6.7.13)可得 $\tilde{f}(\lambda) = P(\lambda)\tilde{u}(\lambda) + Q(\lambda)$, 其中, $Q(\lambda)$ 是与初值 $u^{(k)}(0)(0 \leqslant k < m)$ 有关的 $m-1$ 次多项式. 由上式解出 $\tilde{u}(\lambda)$,形式上得出方程的解

$$u = L^{-1}((\tilde{f} - Q)/P),$$

其中, L^{-1} 表示逆 Laplace 变换. 看如下简单例子:

$$u'' - 2u' + 2u = 2e^x \cos x, \quad u(0) = u'(0) = 0.$$

令 $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$, $f(x) = 2e^x \cos x$, 则

$$\tilde{f}(\lambda) = (e^{(1+\mathrm{i})x} + e^{(1-\mathrm{i})x})^\sim(\lambda) = \frac{2(\lambda - 1)}{P(\lambda)},$$

$$u(x) = L^{-1}\left[\frac{2(\lambda - 1)}{P^2(x)}\right]$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{2} L^{-1}\left[\frac{1}{(\lambda - 1 + \mathrm{i})^2} - \frac{1}{(\lambda - 1 - \mathrm{i})^2}\right]$$

$$= x e^x \sin x.$$

如同对 Fourier 变换一样,关于 Laplace 变换的首要问题亦是建立反演公式. 这一类的结果颇多,其中, 一部分直接基于 Fourier 积分的收敛定理.

设$f \in D(\sigma_0, E)$. 首先形式地由反演公式(6.5.9)得出

$$f(x) = \frac{e^{\sigma x}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\sigma + \mathrm{i}\xi) e^{\mathrm{i}x\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\sigma - \mathrm{i}\infty}^{\sigma + \mathrm{i}\infty} \tilde{f}(\lambda) e^{\lambda x} d\lambda, \qquad (6.7.14)$$

其中, $\sigma > \sigma_0$. 另一方面,参照式(6.5.7),考虑积分

$$f_b(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-ib}^{\sigma+ib}\tilde{f}(\lambda)e^{\lambda x}d\lambda, \quad b > 0, \sigma > \sigma_0. \tag{6.7.15}$$

直接由定理 6.5.1 推出

定理 6.7.1　设 $f \in D(\sigma_0, E)$, $x > 0$, $2s = f(x^+) + f(x^-)$ 有定义, $f_b(x)$ 依式 (6.7.15), 则以下结论成立:

(i) 局部性原理: $f_b(x) \to s(b \to \infty)$ 成立与否仅决定于 f 在 x 邻近的状态;

(ii) Dini 判别法: 若存在 $\delta > 0$, 使 $y^{-1}\|f(x+y)e^{-\sigma y} + f(x-y)e^{\sigma y} - 2s\| \in L^1[0,\delta]$, 则 $f_b(x) \to s(b \to \infty)$;

(iii) Jordan 判别法: 若存在 $\delta > 0$, 使 $f|[x-\delta, x+\delta] \in BV$, 则 $f_b(x) \to s$.

其次, 应用定理 6.5.2 得到

定理 6.7.2　设 $f \in D(\sigma_0, E)$, $\sigma > \sigma_0$, 则对几乎所有 $x > 0$ 成立

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_m \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\tilde{f}(\lambda)\exp\left(\lambda x - \frac{|\operatorname{Im}\lambda|^2}{4m^2}\right)d\lambda \\ &= \lim_m \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-2mi}^{\sigma+2mi}\left(1 - \frac{|\operatorname{Im}\lambda|}{2m}\right)\tilde{f}(\lambda)e^{\lambda x}d\lambda. \end{aligned} \tag{6.7.16}$$

式(6.7.16)在 f 的连续点 x 必成立, 在 f 连续的开集内任何紧集上一致地成立. 若 $\tilde{f}(\lambda)$ 在直线 $\operatorname{Re}\lambda = \sigma$ 上可积, 则式(6.7.14) 对几乎所有 $x > 0$ 成立. 若 $E = \mathbb{C}$, $\tilde{f}(\sigma + i\xi) \geqslant 0$, $f(x)e^{-\sigma x} \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, 则不必验证 $\tilde{f}(\sigma + i\xi)$ 对 ξ 可积.

推论 6.7.1(唯一性)　设 $f \in D(\sigma_0, E)$, $\tilde{f}(\lambda) \equiv 0(\lambda \in \Omega(\sigma_0))$, 则 $f = 0$, a. e.. 因此, Laplace 变换(6.7.6)为单射.

另一些反演公式虽不是 Fourier 反演公式的直接推论, 但其论证方法具有明显的 Fourier 分析特色, 尤其用到近似单位或某种奇异积分逼近. 下面是两个典型结果.

定理 6.7.3(Widder)　设 $f \in L^1(\mathbb{R}_+, E)$, 则对几乎所有 $x > 0$, 成立

$$f(x) = \lim_k \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{k}{x}\right)^{k+1}\tilde{f}^{(k)}\left(\frac{k}{x}\right). \tag{6.7.17}$$

式(6.7.17)在 f 的连续点 $x > 0$ 必成立, 在 f 连续的开集内任何紧集上一致地成立.

证　因 $f \in L^1$, 故 $\tilde{f}(\lambda)$ 在 $\operatorname{Re}\lambda > 0$ 内有定义. 由式(6.7.12) 有

$$\tilde{f}^{(k)}(\lambda) = (-1)^k\int_0^\infty y^k f(y)e^{-\lambda y}dy, \quad k \geqslant 0. \tag{6.7.18}$$

以 $f_k(x)$ 记式(6.7.17)右端极限号下的式子, 则由式(6.7.18)有

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \frac{k}{x}\int_0^\infty \frac{1}{k!}\left(\frac{ky}{x}\right)^k \exp\left(-\frac{ky}{x}\right)f(y)dy \\ &= \frac{1}{x}\int_0^\infty \frac{k^{k+1}}{k!}\exp\left[-k(s-t) - ke^{-(s-t)}\right]f(e^t)e^t dt \end{aligned}$$

$$= x^{-1}(g * \varphi_k)(\ln x), \quad x > 0,$$

其中, $s = \ln x, t = \ln y, g(t) = f(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^t \in L^1(\mathbb{R}, E)$,

$$\varphi_k(t) = (k^{k+1}/k!)\exp(-kt - k\mathrm{e}^{-t}), \quad t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}.$$

今对 $\varphi_k(t)$ 指明以下事实:

(i) $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t)\mathrm{d}t = 1(k \in \mathbb{N})$,这易由直接计算验证.

(ii) $\int_{|t| \geqslant \delta} \varphi_k(t)\mathrm{d}t \to 0(k \to \infty, \delta > 0)$. 设 k 充分大. 首先有

$$\int_{\delta}^{\infty} \varphi_k(t)\mathrm{d}t = \frac{k}{k!}\int_0^{k\mathrm{e}^{-\delta}} t^{k-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{k^2}{k!\mathrm{e}^{\delta}} \sup_{0 \leqslant t \leqslant k\mathrm{e}^{-\delta}} t^{k-1}\mathrm{e}^{-t}$$

$$= \frac{k^{k+1}}{k!}\exp(-k\delta - k\mathrm{e}^{-\delta}) \to 0, \quad k \to \infty.$$

其次,类似地有

$$\int_{-\infty}^{-\delta} \varphi_k(t)\mathrm{d}t = \frac{k}{k!}\int_{k\mathrm{e}^{\delta}}^{\infty} t^{k-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{k}{k!} \sup_{t \geqslant k\mathrm{e}^{\delta}} t^{k+1}\mathrm{e}^{-t}\int_{k\mathrm{e}^{\delta}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

$$= \frac{k^{k+1}}{k!}\exp(k\delta - k\mathrm{e}^{\delta}) \to 0, \quad k \to \infty.$$

综上知 φ_k 是$\mathbb{R}$ 上的近似单位.

(iii) $\varphi_k(t)$ 在 $t < 0$ 与 $t > 0$ 时分别单调增与单调减.

于是由定理6.3.5 推出 $g * \varphi_k \to g$,a. e. $(k \to \infty)$, 在 g 的连续点 t,$(g * \varphi_k)(t) \to g(t)$, 在 g 连续的开集内 $g * \varphi_k$ 紧一致收敛于 g. 由此得定理结论. □

推论 6.7.2 设 $f \in L^1(\mathbb{R}_+, E)$,则 $\|f(x)\| \leqslant M$,a. e. 的充要条件是

$$\sigma^{k+1}\|\tilde{f}^{(k)}(\sigma)\| \leqslant k!M, \quad \sigma > 0, k \geqslant 0. \tag{6.7.19}$$

证 若 $\|f(x)\| \leqslant M$,a. e. ,$\sigma > 0, k \geqslant 0$,则由式(6.7.18) 有

$$\|\tilde{f}^{(k)}(\sigma)\| = \left\| \int_0^{\infty} x^k f(x)\mathrm{e}^{-\sigma x}\mathrm{d}x \right\| \leqslant \frac{k!M}{\sigma^{k+1}}.$$

反之,若式(6.7.19)成立,则用式(6.7.17)直接得出 $\|f(x)\| \leqslant M$,a. e.. □

另一个类似于定理6.7.3 的结果是

定理 6.7.4(Phillips) 设 $f \in D(\sigma_0, E) \cap L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, E)$,则

$$f(x) = \lim_{\sigma \to \infty} \mathrm{e}^{-\sigma x}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\sigma^2 x)^{k+1}}{k!(k+1)!}\tilde{f}^{(k)}(\sigma), \text{a. e.}. \tag{6.7.20}$$

证 以 $f_\sigma(x)$ 记式(6.7.20)右端极限号下的式子,则以式(6.7.18)代入得

$$f_\sigma(x) = \int_0^{\infty} K_\sigma(x,y)f(y)\mathrm{d}y,$$

其中,

$$K_\sigma(x,y) = \mathrm{e}^{-\sigma(x+y)}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sigma^2 x)^{k+1}y^k}{k!(k+1)!}$$

$$= \sigma \sqrt{\frac{x}{y}} e^{-\sigma(x+y)} \varphi(2\sigma \sqrt{xy}),$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}.$$

下面用到关于 $\varphi(x)$ 的以下关键不等式：

$$\varphi(x) \leqslant (x e^x/2) \wedge (C e^x / \sqrt{x}), \quad x > 0, \tag{6.7.21}$$

C 是某个正常数. 将以上不等式代入 $K_\sigma(x,y)$ 得

$$K_\sigma(x,y) \leqslant (\sigma^2 x \wedge C\sigma^{1/2} x^{1/4} y^{-3/4}) \exp[-\sigma(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2]. \tag{6.7.22}$$

直接计算易得

$$\int_0^\infty K_\sigma(x,y) \mathrm{d}y = 1 - e^{-\sigma x}, \quad x > 0.$$

只要证

$$I_\sigma(x) \triangleq \| f_\sigma(x) - (1 - e^{-\sigma x}) f(x) \| \to 0, \text{a. e.}, \quad \sigma \to \infty.$$

取定 f 的 Lebesgue 点 $x > 0$，令

$$G(y) = \int_x^y \| f(z) - f(x) \| \mathrm{d}z. \tag{6.7.23}$$

$\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta > 0$，使当 $|y - x| \leqslant \delta$ 时 $|G(y)| \leqslant \varepsilon |y - x|$. 于是

$$I_\sigma(x) \leqslant \int_0^\infty K_\sigma(x,y) \| f(y) - f(x) \| \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{x-\delta} + \int_{x-\delta}^{x+\delta} + \int_{x+\delta}^\infty \triangleq I_1 + I_2 + I_3.$$

首先由式(6.7.22)有

$$I_1 \leqslant \sigma^2 x e^{-\sigma(\sqrt{x} - \sqrt{x-\delta})^2} \int_0^{x-\delta} \| f(y) - f(x) \| \mathrm{d}y \to 0, \quad \sigma \to \infty.$$

其次，取 $\rho > \sigma_0^+$，仍用式(6.7.22)得

$$I_3 \leqslant C(\sigma,x) \int_{x+\delta}^\infty e^{-\rho y} \| f(y) - f(x) \| \mathrm{d}y,$$

其中，

$$C(\sigma,x) = C \sigma^{1/2} x^{-1/2} \exp[-\sigma(\sqrt{x+y} - \sqrt{x})^2 + \rho(x+\delta)] \to 0, \quad \sigma \to \infty.$$

因而 $I_3 \to 0 (\sigma \to \infty)$. I_2 的估计稍复杂.

$$I_2 \leqslant \int_{x-\delta}^{x+\delta} F_\sigma(y) \mathrm{d}G(y),$$

其中，$G(y)$ 依式(6.7.23)，

$$F_\sigma(y) = C \sigma^{1/2} x^{1/4} y^{-3/4} \exp[-\sigma(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2].$$

用微分法得出 $F_\sigma(y)$ 在点 $x_0 \approx x - 3/2\sigma$（$\sigma$ 充分大）取得极大值，在 $(x-\delta, x_0)$ 与 $(x_0, x+\delta)$ 内分别单调增与单调减，$F_\sigma(x_0) = O(\sigma^{1/2})$. 于是

$$
\begin{aligned}
I_2 &\leqslant F_\sigma(y)G(y)\Big|_{x-\delta}^{x+\delta} - \int_{x-\delta}^{x+\delta} G(y)\,\mathrm{d}F_\sigma(y) \\
&\leqslant \varepsilon(y-x)F_\sigma(y)\Big|_{x-\delta}^{x+\delta} - \varepsilon\int_{x-\delta}^{x_0}(y-x)\,\mathrm{d}F_\sigma(y) - \varepsilon\int_{x}^{x+\delta}(y-x)\,\mathrm{d}F_\sigma(y) \\
&\leqslant 2\varepsilon(x-x_0)F_\sigma(x_0) + \varepsilon\int_{x-\delta}^{x_0}F_\sigma(y)\,\mathrm{d}y + \varepsilon\int_{2x-x_0}^{x+\delta}F_\sigma(y)\,\mathrm{d}y \\
&\triangleq \varepsilon(J_1+J_2+J_3),
\end{aligned}
$$

其中用了两次分部积分. 由 $x - x_0 = O(\sigma^{-1})$ 与 $F_\sigma(x_0) = O(\sigma^{1/2})$ 得 $J_1 \to 0(\sigma \to \infty)$. 作代换 $t = \sigma(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$ 计算

$$\int_{x-\delta}^{x_0} \mathrm{e}^{-\sigma(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}\mathrm{d}y \leqslant \sqrt{\frac{x}{\sigma}}\int_0^\infty t^{-1/2}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = O(\sigma^{-1/2}),$$

由此得 $J_2 = O(1)(\sigma \to \infty)$. 同理, 有 $J_3 = O(1)$. 于是 $I_2 \leqslant \varepsilon\, O(1)(\sigma \to \infty)$. 综上即得 $I_\sigma(x) \to 0(\sigma \to \infty)$, 如所要证. □

现在说明一下不等式(6.7.21), 其中, $x > 0$ 是任给的. 首先易见

$$\frac{2\varphi(x)}{x} = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k}}{k!(k+1)!2^{2k}} \leqslant \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k}}{(2k)!} < \mathrm{e}^x,$$

即 $\varphi(x) < x\mathrm{e}^x/2$. 其次利用一阶 Bessel 函数

$$
\begin{aligned}
J_1(x) &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin\theta \sin(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin xt \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

与 $\varphi(x)$ 对照得出

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\varphi(x) &= -\mathrm{i}\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}J_1(\mathrm{i}x) = -\frac{2\mathrm{i}}{\pi}\int_0^1 t\mathrm{e}^{-x}\sin(\mathrm{i}xt)\sqrt{\frac{x}{1-t^2}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{sh}(xt)\sqrt{\frac{x}{1-t}}\mathrm{d}t \\
&\leqslant \mathrm{const}\int_0^1 \mathrm{e}^{x(t-1)}\sqrt{\frac{x}{1-t}}\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{const}\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leqslant C,
\end{aligned}
$$

其中, C 为正常数. 这得出 $\varphi(x) \leqslant C\mathrm{e}^x/\sqrt{x}$.

第7章　广 义 函 数

传统意义上的函数$f: \Omega \to \mathbb{K}$无非是一个对应$x \to f(x) \in \mathbb{K}(x \in \Omega)$. 这种基于“点点对应”的函数概念已如此深深扎根于人们的习惯,似乎天经地义而不可动摇. 但实际上它隐含着重大缺陷. 首先,与我们的表面印象相反,点函数的现实基础并不可靠,经不起推敲. 例如,若$f(x)$表示某种物理量分布的密度,那么在一点的密度至多是一种抽象,其客观现实性与实际测定都不无问题. 其次,建立在点函数基础上的分析学远非完美,主要缺陷是常用的分析运算(微分、积分、级数求和、Fourier 变换等)大受局限. 例如,微分运算仅对很狭窄的一部分函数有效,对于函数级数通常不能逐项微分. 经典函数的分析学即使迭经改进与推广,仍然不能令人满意. 如果上述的第一个缺陷还可以勉强容忍的话,那么第二个缺陷则从根本上限制了分析学的发展与应用.

扫除上述缺陷的变革初看起来可谓石破天惊:从根本上破除仅用点函数的限制! 那些完全不在点取值的分布(测度就是早已熟悉的一种分布)也应纳入函数概念之内,而且是更合理的函数. 这就是本章要介绍的广义函数的概念,它开始于 Sobolev 等俄罗斯学者关于偏微分方程广义解的研究,而由法国学者 L. Schwartz 于 20 世纪 40 年代末首先奠定其理论基础. 广义函数论整个地革新了分析学,并为分析数学的各个领域提供了一个强有力的新工具. 像 Fourier 分析与偏微分方程论这样十分活跃的数学分支,都在一定程度上被“广义函数化”了.

本章中Ω总记$\mathbb{R}^n$中的非空开子集, 通常以f,g等记广义函数,而以φ,ψ等记检验函数. $\int f(x)\,\mathrm{d}x$总记$f(x)$在$\mathbb{R}^n$上的 Lebesgue 积分.

7.1　基本空间与分布

给定点函数$f: \Omega \to \mathbb{K}$,无论$f(x)$所表达的量的物理含义如何,$f(x)$在Ω内的整体性质或宏观表现都是人们感兴趣的,而且这种兴趣往往超过对个别函数值的关注. 检测$f(x)$分布特征的一种有效方法是:考虑积分

$$F(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中,$\varphi(x)$是适当选取的检验函数,它取自某个检验函数空间Φ. 正是泛函$F(\varphi)(\varphi \in \Phi)$的动态全面反映了$f$的分布特征,$f$在个别点$x$的函数值$f(x)$反而不那么重要了. 一旦意识到这一点,一个全新的想法就豁然而出:何不干脆摒弃点

函数这一限制,将 Φ 上的连续线性泛函也加入到我们所使用的函数中来?

要使上述想法导向有价值的结果,检验函数空间 Φ 的适当选择无疑是关键的. 对此有两点基本的考虑. 首先,鉴于对广义函数的分析运算实际上要转移至 Φ 上进行,自然要求 Φ 由充分好的函数组成,使得在其中容许施行通常的分析运算且服从良好的运算规则. 人们发现取 $\Phi = C_c^\infty(\Omega)$ 就是一个好的选择. 其次,我们希望 Φ 的对偶 Φ^* 尽可能大一些,以使它包含尽可能多的广义函数,且也能包含通常的函数空间(如 L^p 等). 而为此就应在 Φ 上定义较强的拓扑,如此才使 Φ 上的线性泛函更容易成为连续的. 对于 $C_c^\infty(\Omega)$ 而言,它作为 $\mathscr{E}(\Omega)$ (见 2.2 节)的子空间的拓扑并不能令人满意,因而需要在其中引进更强的拓扑,即所谓 LF 拓扑. 有关 LF 拓扑的构成已超出第 1 章所准备的抽象空间知识之外,其详细表述颇不简单,并非我们的兴趣所在. 下面仅概述最必需的那部分结论.

LF 空间的定义基于以下引理:

引理 7.1.1 设 $\{X_i: i \in \mathbb{N}\}$ 是一列 F 空间,每个 $X_i (i \in \mathbb{N})$ 是 X_{i+1} 的闭子空间,$X = \cup X_i$. 则 X 上存在唯一拓扑 τ,使得以下结论成立:

(i) X 依拓扑 τ 是一个 LCS;

(ii) $X_i (i \in \mathbb{N})$ 依原拓扑是 X 的闭子空间;

(iii) 任给序列 $\{x_k\} \subset X$,在 X 中 $x_k \to x \Leftrightarrow$ 存在 $i \in \mathbb{N}$,使得 $\{x_k\} \subset X_i$ 且在 X_i 中 $x_k \to x (k \to \infty)$;

(iv) 若 Y 是一个 LCS, $T: X \to Y$ 是一线性算子,则 $T \in L(X,Y) \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}$, $T | X_i \in L(X_i, Y)$. 特别地, 若 $f: X \to \mathbb{K}$ 是一个线性泛函, 则 $f \in X^* \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}$, $f | X_i \in X_i^*$.

引理 7.1.1 中的拓扑 τ 完全决定于如下 0 邻域基:

$$\mathscr{U} = \{U \subset X: U \text{ 是凸集}, \forall i \in \mathbb{N}, X_i \cap U \text{ 是 } X_i \text{ 的 0 邻域}\}.$$

从如上的 0 邻域基出发,可完成拓扑 τ 的构成并验证引理 7.1.1 中的结论(i) ~ (iv). 但这一工作颇具技术性,并不直接关乎本章的主旨,因此略去,可参见文献中很标准的表述(如(Treves,1967)). 引理 7.1.1 中的拓扑 τ 称为**归纳极限拓扑**,称 (X,τ) 为空间序列 $\{X_i\}$ 的归纳极限,写作 $X = \varinjlim X_i$,并称 X 为 **LF 空间**,其中的拓扑称为 **LF 拓扑**. LF 空间比 F 空间为广,却又保留了 F 空间的许多性质. 正因为如此,基于 LF 空间理论的广义函数论才具有特别优势.

现在利用引理 7.1.1 来构成所需的检验函数空间. 设 $0 \leqslant r \leqslant \infty$,任给紧集 $K \subset \Omega$,令

$$\mathscr{D}^r(K) = \{\varphi \in C^r(\Omega): \operatorname{supp} \varphi \subset K\}.$$

取 Ω 中紧集的穷竭序列 $\{K_i\}$,$\mathscr{D}^r(K_i)$ 作为 F 空间 $\mathscr{E}^r(\Omega)$ (由式(2.2.10))的闭子空间是一个 F 空间. 显然 $\mathscr{D}^r(K_i)$ 是 $\mathscr{D}^r(K_{i+1})$ 的闭子空间,$C_c^r(\Omega) = \bigcup_1^\infty \mathscr{D}^r(K_i)$.

这就可用引理7.1.1得出$\mathscr{D}^r(\Omega) = \varinjlim \mathscr{D}^r(K_i)$是一个LF空间. 必须强调,作为集合,$\mathscr{D}^r(\Omega)$就是$C_c^r(\Omega)$,改用记号$\mathscr{D}^r(\Omega)$,完全是要明确表示其中采用LF拓扑. $\mathscr{D}^\infty(\Omega)$就简写作$\mathscr{D}(\Omega)$. 结合引理7.1.1与命题2.2.2得出若$\{\varphi_k\} \subset \mathscr{D}^r(\Omega)$是一序列,则在$\mathscr{D}^r(\Omega)$中$\varphi_k \to 0$的充要条件是存在$i \in \mathbb{N}$,使得$\{\varphi_k\} \subset \mathscr{D}^r(K_i)$,且当$|\alpha| < r+1$时$\partial^\alpha \varphi_k \rightrightarrows 0 (k \to \infty)$. 而这又等价于存在紧集$K \subset \Omega$,使得$\{\varphi_k\} \subset \mathscr{D}^r(K)$,且当$|\alpha| < r+1$时$\partial^\alpha \varphi_k \rightrightarrows 0 (k \to \infty)$. 这就表明,$\mathscr{D}^r(\Omega)$中的拓扑(或收敛性),实际上与$\{K_i\}$的选择无关. $\{\mathscr{D}^r(K_i)\}$仅在定义空间$\mathscr{D}^r(\Omega)$时起作用,今后几乎不再提到它.

在广义函数文献中,习惯于用"′"来表示对偶空间与对偶算子,而这却与本书一直使用的对偶记号相左,不免让人陷于两难. 经权衡之后,还是如许多作者一样,让两套记号各行其道. 因此,在本章中分别以$\mathscr{D}'(\Omega)$与$\mathscr{D}_r'(\Omega)$表示空间$\mathscr{D}(\Omega)$与$\mathscr{D}^r(\Omega)$的对偶空间. 当不必注明开集Ω时也简写作$\mathscr{D}'$与$\mathscr{D}_r'$.

定义7.1.1 每个$f \in \mathscr{D}'(\Omega)$称为$\Omega$内的**分布**或**广义函数**,空间$\mathscr{D}(\Omega)$称为分布的**基本空间**或检验函数空间,其中的成员称为检验函数.

本章中,在对偶空间上总使用点态收敛拓扑(即弱*拓扑),今后不再另作说明. 因此,若$\{f_k\} \subset \mathscr{D}'(\Omega)$是一分布序列,则$f_k \to 0$总意味着$f_k(\varphi) \to 0 (k \to \infty, \varphi \in \mathscr{D}(\Omega))$. 本章并不像1.6节中一样使用记号$f_k \xrightarrow{*} 0$.

我们将看到,广义函数空间$\mathscr{D}'(\Omega)$极其庞大,它包括了足够应用所需的广义函数. 但其中成员过于庞杂. "好坏"参差不齐,我们希望依据某种"正则性"等级理出一个头绪,所用方法基于如下简单结论:

引理7.1.2 设X与Y是两个LCS, $X \subset Y$且包含映射$i: X \subset Y$连续,X在Y中稠密,则对偶算子

$$i': Y' \to X', \quad f \to f|X \tag{7.1.1}$$

是一个连续单射(记住对偶空间中总使用弱*拓扑).

在引理7.1.2的条件下,通常就认为$Y' \subset X'$,今后将总用这一缩写而不再解释. 因此,若Φ是一个LCS, $\mathscr{D}(\Omega) \subset \Phi$,包含映射$i: \mathscr{D}(\Omega) \subset \Phi$连续且$\mathscr{D}(\Omega)$在$\Phi$中稠密,则不妨就认为$\Phi' \subset \mathscr{D}'(\Omega)$,这意味着任何以$\Phi$为基本空间的分布都被包括在$\mathscr{D}'(\Omega)$之内. 注意:基本空间越小,分布空间就越大. 定义7.1.1中所选择的基本空间$\mathscr{D}(\Omega)$可以说是最小的,可选择一系列空间具有如同上述Φ的性质. 例如,可以写出如下的空间链:

$$\begin{cases} \mathscr{D}(\Omega) \subset \mathscr{D}^r(\Omega) \subset \mathscr{D}^s(\Omega) \subset \mathscr{E}^s(\Omega) \subset \mathscr{E}^0(\Omega), \\ \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{E}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{E}^r(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{E}^0(\mathbb{R}^n), \end{cases} \tag{7.1.2}$$

其中,$0 < s < r < \infty$. 式(7.1.2)中所有包含都是连续的且$\mathscr{D}(\Omega)$在$\mathscr{E}^0(\Omega)$中稠密(由定理6.3.6(ii)). 于是,由引理7.1.2得出反向的空间链

$$\begin{cases}\mathscr{D}'(\Omega)\supset\mathscr{D}_r'(\Omega)\supset\mathscr{D}_s'(\Omega)\supset\mathscr{E}_s'(\Omega)\supset\mathscr{E}_0'(\Omega),\\ \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)\supset\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)\supset\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)\supset\mathscr{E}_r'(\mathbb{R}^n)\supset\mathscr{E}_0'(\mathbb{R}^n).\end{cases}\tag{7.1.3}$$

这样,就有了分布空间 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 的依次缩小的一系列子空间. 或者等价地说,一般的分布被划分成一系列越来越特殊的分布,每种分布都各有适当的名称. 例如, $\mathscr{D}_r'(\Omega)$ 中的成员称为 r 阶分布①,其中, 0 阶分布也称为 **Radon 测度**. 令 $\mathscr{D}_F'(\Omega)=\bigcup\limits_0^{\infty}\mathscr{D}_r'(\Omega)$,其中的成员称为**有限阶分布**,$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中的成员称为**缓增分布**. 粗略地说,分布的阶 r 给出了分布的正则性等级,r 越小,r 阶分布的正则性就越高,这种分布就越接近于通常的函数. 当然,这些说法暂时仅有模糊的含义. 但随着本章内容的展开,它们将逐步获得准确而清晰的解释.

给定一个线性泛函 $f:\mathscr{D}(\Omega)\to\mathbb{K}$,一个重要问题是如何判定 $f\in\mathscr{D}'(\Omega)$ 或 f 属于空间链(7.1.3)中某个空间? 下面给出一组递次加强的条件,它们首先依据一般的条件(1.6.4)与引理 7.1.1(iv),同时也依据空间 $\mathscr{E}'(\Omega)$,$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 等的结构.

(i) $f\in\mathscr{D}'(\Omega)$ 的充要条件是任给紧集 $K\subset\Omega$,存在 $r\in\mathbb{Z}_+$,$C>0$,使得

$$|f(\varphi)|\leqslant C\|\varphi\|_{(r)},\quad\forall\varphi\in\mathscr{D}(K),\tag{7.1.4}$$

其中, $\|\varphi\|_{(r)}$ 依式(2.2.13), r 可能与 K 有关.

(ii) $f\in\mathscr{D}_r'(\Omega)$ $(0\leqslant r<\infty)$ 的充要条件是任给紧集 $K\subset\Omega$,存在正常数 C,使条件(7.1.4)满足. 注意与情形(i)不同,此处 r 是预定而非选择的,r 与 K 无关. 特别地,$f\in\mathscr{D}_0'(\Omega)$ 的充要条件是任给紧集 $K\subset\Omega$,存在正常数 C,使得

$$|f(\varphi)|\leqslant C\|\varphi\|_0,\quad\forall\varphi\in\mathscr{D}(K).\tag{7.1.5}$$

(iii) $f\in\mathscr{E}'(\Omega)$ 的充要条件是存在紧集 $K\subset\Omega$,$r\in\mathbb{Z}_+$ 与 $C>0$,使得

$$|f(\varphi)|\leqslant C\|\varphi\|_{K,r},\quad\forall\varphi\in\mathscr{D}(\Omega),\tag{7.1.6}$$

其中, $\|\varphi\|_{K,r}$ 依式(2.2.11), r 可能与 K 有关.

(iv) $f\in\mathscr{E}_r'(\Omega)$ $(0\leqslant r<\infty)$ 的充要条件是存在紧集 $K\subset\Omega$ 与 $C>0$, 使条件(7.1.6)满足. 注意此处 r 是预给的,与 K 无关.

(v) $f\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 的充要条件是存在 $r\in\mathbb{Z}_+$,$C>0$,使得(见定义 6.5.2)

$$|f(\varphi)|\leqslant C\max_{|\alpha|\vee|\beta|\leqslant r}\|x^\alpha\partial^\beta\varphi\|_0,\quad\forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n).\tag{7.1.7}$$

注意,条件(7.1.4)~条件(7.1.7)作为充分条件使用时,只要对 $\varphi\in\mathscr{D}$ 验证就行了. 若作为必要条件使用,则可依情况扩大 φ 的范围. 例如, 式(7.1.5)中可设 $\varphi\in\mathscr{D}^0(K)$,式(7.1.7)中可设 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

现在该举一些广义函数的例子了.

例 7.1.1　(i) 正则分布. 设 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$,令

---

① 或称阶 $\leqslant r$ 的分布. 但这种似乎更准确的说法好处不多,徒增不便.

$$T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega). \tag{7.1.8}$$

任给紧集 $K \subset \Omega, \varphi \in \mathscr{D}(K)$，显然有

$$| T_f(\varphi) | \leqslant \| f | K \|_1 \| \varphi \|_0,$$

可见 T_f 满足条件(7.1.5)，因而 T_f 是一 Radon 测度. 由命题3.5.2，若 $T_f = 0$，则 $f = 0$, a. e.. 因此，若 $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ 中几乎处处相等的函数不加区别，则 $f \to T_f$ 是一单射，因而不妨将 f 与 T_f 视为等同，就认定 $f \in \mathscr{D}_0'(\Omega)$. 这样，至少已将一部分经典函数归入广义函数之内. 需知，$L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ 是一个很大的空间，实际问题中涉及的经典函数很少越出它之外. 因此，$\mathscr{D}'(\Omega)$ 不能包括所有经典函数未必是很大的缺陷.

式(7.1.8)的右端也写作 $\langle f,\varphi\rangle$ 或 $\langle f(x),\varphi(x)\rangle$. 推而广之，对任给 $f \in \mathscr{D}'(\Omega), \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$，也约定(见式(1.6.10))

$$f(\varphi) = \langle f,\varphi\rangle = \langle f(x),\varphi(x)\rangle. \tag{7.1.9}$$

但式(7.1.9)中的 $f(x)$ 并不表示 f 在 x 的值，需知 f 没有值 $f(x)$！它只不过是标明检验函数 φ 以 x 为变元而已.

$f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ 称为**正则分布**或正则广义函数，正则分布以外的分布称为奇异分布. 在广义函数论中，关注的主要对象无疑是奇异分布，而不是正则分布. 从逻辑上说，奇异分布必定是大量的，而正则分布则不过是少见的特例. 但能实际举出的奇异分布的例子暂时还不太多.

(ii) 复测度. 不难看出有连续的包含 $\mathscr{D}^0(\Omega) \subset C_0(\Omega)$ 且 $\mathscr{D}^0(\Omega)$ 在 $C_0(\Omega)$ 中稠密. 因此根据引理7.1.2与定理3.5.3，不妨认为 $M(\Omega) \subset \mathscr{D}_0'(\Omega)$，这意味着，$\Omega$ 上的复测度均为 Radon 测度或0阶分布. 任给 $\nu \in M(\Omega)$，有

$$\langle \nu,\varphi\rangle = \langle \nu(x),\varphi(x)\rangle = \int_\Omega \varphi \mathrm{d}\nu.$$

这样，同时作为广义函数，复测度与局部可积函数的界线消融了.

同样容易看出有连续的包含 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n)$ 且 $\mathscr{S}$ 在 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 中稠密，因此可以认为 $M(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'$. 这就意味着 $\mathbb{R}^n$ 上的复测度都可看作缓增分布.

(iii) 正测度. 设 μ 是 Ω 上的任一正 Borel 测度(不必有限)，令

$$\langle \mu,\varphi\rangle = \int_\Omega \varphi \mathrm{d}\mu, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

任给紧集 $K \subset \Omega, \varphi \in \mathscr{D}(K)$，显然有 $|\langle \mu,\varphi\rangle| \leqslant \mu K \|\varphi\|_0$，即条件(7.1.5)满足. 因此 μ 是 Ω 上的 Radon 测度. 这样，Radon 测度也包括了所有正 Borel 测度，特别包括了 Lebesgue 测度. 因此，Lebesgue 测度是广义函数！

(iv) δ 函数. 设 δ 是 $x = 0$ 处的 Dirac 测度，则如上所述，它是一个 Radon 测度，对于它有

$$\langle \delta,\varphi\rangle = \langle \delta(x),\varphi(x)\rangle = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n).$$

历史上，人们曾将 $\delta(x)$ 当作一个在 $x = 0$ 取值 ∞，而在它处为零的函数，并称之为

δ 函数. 现在能严格证明,$\delta(x)$ 不是一个点函数(即不是正则分布). 不过,仍保持 δ 函数这一名称,以记住它在广义函数论形成的历史上曾起过的重大作用.

(v) 广义函数 x^{-1}. 任给 $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$,定义

$$f(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \mathrm{d}x.$$

任给紧集 $K \subset \mathbb{R}$,取 $b > 0$,使 $K \subset [-b,b]$. $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{K})$,有

$$|f(\varphi)| = \left| \int_0^b \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \mathrm{d}x \right|$$

$$= \left| \int_0^b 2\varphi'(\xi_x) \mathrm{d}x \right| \leqslant \text{const} \| \varphi' \|_0, \quad \xi_x \in (-x,x).$$

可见取 $r = 1$ 使条件(7.1.4)满足,因而 $f \in \mathscr{D}_1'(\mathbb{R})$,即 f 是 $\mathbb{R}$ 上的一个一阶分布. 不能认为 f 就是点函数 x^{-1},因 x^{-1} 并非局部可积. 将 x^{-1} 看成分布时通常使用记号 $\mathrm{P} \cdot (x^{-1})$. 如果就用记号 x^{-1},则应理解为

$$\left\langle \frac{1}{x}, \varphi(x) \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x. \tag{7.1.10}$$

利用例 7.1.1 中的讨论,现在已可将空间链(7.1.3)稍加扩大

$$\begin{cases} \mathscr{D}(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subset \mathscr{D}_0'(\Omega), & 1 \leqslant p \leqslant \infty, \\ L^1(\Omega) \subset M(\Omega) \subset \mathscr{D}_0'(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega). \end{cases} \tag{7.1.11}$$

可以验证以上包含都是连续的. 实际上,有更进一步的结果

定理 7.1.1 (i) 包含 $\mathscr{D}(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ 连续且 $\mathscr{D}(\Omega)$ 在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中稠密;

(ii) 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$,则包含 $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 连续且 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中稠密.

证 (i) 包含的连续性是显然的. 为证 $\mathscr{D}(\Omega)$ 在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中稠密,由命题 1.6.2,只要证 $\mathscr{D}(\Omega)^\perp = \{0\}$. 由定理 1.6.4,在弱拓扑意义上 $\mathscr{D}(\Omega)$ 是 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 的对偶空间, 而 $\mathscr{D}(\Omega)^\perp = \{0\}$ 是显然的.

(ii) 设 $q = p/(p-1)$. 任给 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,$\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$,当 m 充分大时, 有

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leqslant \|f\|_p \|(1 + |x|^2)^{-m}\|_q \|(1 + |x|^2)^m \varphi\|_0,$$

这推出 $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$(用条件(7.1.7))且包含 $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 连续. 为证稠密性,仍用(i)中的方法. 设 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int f(x) \varphi(x) \mathrm{d}x = 0, \quad \forall \varphi \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

这显然推出 $f = 0$ (如用推论 3.2.3(i)). 这推出 L^p 在 $\mathscr{S}'$ 中稠密. □

以上结果初看起来颇令人惊异:最坏的函数 $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ 居然可用最好的函数(即 $\mathscr{D}(\Omega)$ 中的函数) 无限逼近. 这就说明了,函数空间 $\mathscr{D}(\Omega)$ 与 $\mathscr{D}'(\Omega)$,作为两个极端看来相距遥远,但实际上却很接近. 由此可见,对立的两极是相通的!有了定理 7.1.1 这样的结果,将普通函数的一些结论推广于广义函数,就比较有信心了.

广义函数虽然不是点的函数，无法说及它在某点的性质（如不能说到广义函数的零点），但仍可说到广义函数的局部性质，下面就来严格界定. 任给非空开集 $U\subset\Omega$，有自然的包含 $\mathscr{D}(U)\subset\mathscr{D}(\Omega)$，因而每个 $f\in\mathscr{D}'(\Omega)$ 可限制到 $\mathscr{D}(U)$ 上去，且显然 $f|\mathscr{D}(U)\in\mathscr{D}'(U)$. 就将 $f|\mathscr{D}(U)$ 简写作 $f|U$，并称它为 f 在 U 内的限制. 设 P 是关于分布的某个性质，$f\in\mathscr{D}'(\Omega)$. 若 $\forall x\in\Omega$，存在 x 的开邻域 $V\subset\Omega$，使得 $f|V$ 具有性质 P，则说 f 局部地有性质 P. 若对任何 $f\in\mathscr{D}'(\Omega)$，f 有性质 $P\Leftrightarrow f$ 局部地有性质 P，则说 P 是一个局部性质. 下面建立的定理为研究分布的局部性质创设了条件.

定理 7.1.2　设 Ω 是非空开集 $U_\alpha(\alpha\in A)$ 之并，$f_\alpha\in\mathscr{D}'(U_\alpha)(\alpha\in A)$ 满足条件

$$f_\alpha|U_\alpha\cap U_\beta=f_\beta|U_\alpha\cap U_\beta,\quad \alpha,\beta\in A \tag{7.1.12}$$

（当 $U_\alpha\cap U_\beta=\varnothing$ 时认定式(7.1.12)自动成立），则存在唯一的 $f\in\mathscr{D}'(\Omega)$，使得 $f_\alpha=f|U_\alpha(\alpha\in A)$. 若 $f_\alpha\in\mathscr{D}_r'(U_\alpha)(\forall\alpha\in A)$，则 $f\in\mathscr{D}_r'(\Omega)$.

证　由后面补证的单位分解定理，存在从属于开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解 $\{\lambda_\alpha\}\subset C^\infty(\Omega)$. 定义

$$f(\varphi)=\sum_\alpha f_\alpha(\lambda_\alpha\varphi),\quad \varphi\in\mathscr{D}(\Omega). \tag{7.1.13}$$

因 $\operatorname{supp}\varphi$ 至多与有限多个 $\operatorname{supp}\lambda_\alpha$ 相交，故式(7.1.13)实际上是一个有限和. 由 $\lambda_\alpha\varphi\in\mathscr{D}(U_\alpha)$ 知 $f_\alpha(\lambda_\alpha\varphi)$ 有定义. 因此 $f(\varphi)$ 的定义合理. 任给紧集 $K\subset\Omega$，K 仅与有限个 $\operatorname{supp}\lambda_{\alpha_i}$ 相交，令 $K_i=K\cap\operatorname{supp}\lambda_{\alpha_i}$. 任给 $\varphi\in\mathscr{D}(K)$，有 $\lambda_{\alpha_i}\varphi\in\mathscr{D}(K_i)$. 取 $r\in\mathbb{Z}_+$ 适当大，对每个 f_{α_i} 应用条件(7.1.4)得

$$\begin{aligned}|f(\varphi)|&\leqslant\sum_i|f_{\alpha_i}(\lambda_{\alpha_i}\varphi)|\leqslant\sum_i\text{const}\ \|\lambda_{\alpha_i}\varphi\|_{(r)}\\&\leqslant\text{const}\ \|\varphi\|_{(r)},\end{aligned}$$

其中用了 Leibniz 公式(2.2.7). 可见 f 满足条件(7.1.4)，因而 $f\in\mathscr{D}'(\Omega)$. 若已知 $f_\alpha\in\mathscr{D}_r'(U_\alpha)$，则验证条件(7.1.4)时即可用此固定的 r，因而 $f\in\mathscr{D}_r'(\Omega)$. 若 $\varphi\in\mathscr{D}(U_\alpha)$，则 $\forall\beta\in A$ 有 $\lambda_\beta\varphi\in\mathscr{D}(U_\alpha\cap U_\beta)$，因而由条件(7.1.12)有 $f_\beta(\lambda_\beta\varphi)=f_\alpha(\lambda_\beta\varphi)$. 于是

$$\begin{aligned}f(\varphi)&=\sum_\beta f_\beta(\lambda_\beta\varphi)=\sum_\beta f_\alpha(\lambda_\beta\varphi)\\&=f_\alpha\Big(\sum_\beta\lambda_\beta\varphi\Big)=f_\alpha(\varphi),\end{aligned}$$

这得出 $f|U_\alpha=f_\alpha(\alpha\in A)$. □

由定理 7.1.2 特别推出若 $f\in\mathscr{D}'(\Omega)$，则 $f=0\Leftrightarrow f$ 在 Ω 内局部地为零，f 是 r 阶的 $\Leftrightarrow f$ 局部地是 r 阶的. 利用以上结论，又可将定义支集 $\operatorname{supp}f$ 的式(3.5.11)推广到广义函数. 对任给 $f\in\mathscr{D}'(\Omega)$，f 的支集 $\operatorname{supp}f$ 定义为

$$\operatorname{supp}f=\Omega\backslash\{x\in\Omega:\ \text{存在 } x \text{ 的开邻域 } U \text{ 使 } f|U=0\}. \tag{7.1.14}$$

利用支集概念可建立如下简单而常用的结论：

推论 7.1.1 设$f \in \mathscr{D}'(\Omega)$，$V$是$A = \operatorname{supp} f$的开邻域，$\varphi,\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$，$\varphi | V = \psi | V$，则$f(\varphi) = f(\psi)$.

证 设$\varphi | V = 0$，只要证$f(\varphi) = 0$. 令$U = \Omega \backslash A$，取Ω上从属于$\{U,V\}$的C^∞单位分解$\{\lambda_1,\lambda_2\}$，令$\varphi_i = \lambda_i\varphi(i = 1,2)$. 由$\varphi_1 \in \mathscr{D}(U)$与$f | U = 0$推出$f(\varphi_1) = 0$. 由$\varphi | V = 0$推出$\varphi_2 = 0$，从而$f(\varphi_2) = 0$. 于是$f(\varphi) = f(\varphi_1) + f(\varphi_2) = 0$，如所要证. □

推论 7.1.1 表明，$f(\varphi)$仅决定于φ"在$\operatorname{supp} f$邻近"的状态.

现在来补证定理 7.1.2 之证中用到的**单位分解定理**，此定理在分析中应用甚广，本章中还将多次用到它. 首先给出以下概念：设$\mathscr{A}$是拓扑空间X中的一个集族. 若$\forall x \in X$，x的某个邻域仅交于$\mathscr{A}$中有限多个集，则称$\mathscr{A}$为**局部有限族**. 若$\mathscr{A}$为局部有限族，则易建立等式

$$\overline{\cup \{A : A \in \mathscr{A}\}} = \cup \{\bar{A} : A \in \mathscr{A}\}. \tag{7.1.15}$$

定理 7.1.3 设Ω是一族开集$\{U_\alpha : \alpha \in A\}$的并，则存在$\{\lambda_\alpha\} \subset C^\infty(\Omega)$，使得$\lambda_\alpha < U_\alpha$，$\{\operatorname{supp} \lambda_\alpha\}$是一个局部有限族，$\sum \lambda_\alpha = 1$.

如上的$\{\lambda_\alpha\}$称为Ω上的从属于$\{U_\alpha\}$的C^∞ **单位分解**.

证 取Ω中紧集的穷竭序列$\{K_i\}$，令$K_0 = \varnothing$，

$$E_{\alpha i} = U_\alpha \cap (K_{i+2}{}^\circ \backslash K_{i-1}), \quad i \in \mathbb{N}.$$

$\forall x \in E_{\alpha i}$，取$x$的紧邻域$V_{\alpha i x} \subset E_{\alpha i}$. 固定$i$，取$\{V_{\alpha i x} : \alpha \in A, x \in E_{\alpha i}\}$的有限子族，记作$\{V_j\}$，使之覆盖紧集$K_{i+1} \backslash K_i{}^\circ$. 取某个$E_{\alpha i}$包含$V_j$，并将其记作$W_j$. 然后取遍$i \in \mathbb{N}$，将由如上方式所得的可数个集重新排列为$\{V_j, W_j\}$，则$V_j$是紧集，$W_j$是开集，$V_j \subset W_j$，$\Omega = \cup V_j$，$\{W_j\}$是局部有限族. 由引理 6.3.1，有$g_j \in C_c^\infty(\Omega)$，使$V_j < g_j < W_j$. 令$g = \sum g_j$. 因$\{\operatorname{supp} g_j\}$是局部有限族，故$\sum g_j$局部地是有限和，因而$g \in C^\infty(\Omega)$. 由$\Omega = \cup V_j$推出$g(x) > 0 (x \in \Omega)$，因此$f_j \triangleq g_j / g \in C^\infty(\Omega)$，$\operatorname{supp} f_j = \operatorname{supp} g_j \subset W_j$，$\sum f_j = 1$. 现在将$\{f_j\}$改造成所需的$\{\lambda_\alpha\}$. 因$W_j$必含于某个$U_\alpha$，故可取定$\alpha_j \in A$，使得$W_j \subset U_{\alpha_j}$. 令$\lambda_\alpha = \sum\limits_{\alpha_j = \alpha} f_j$，当$\{j : \alpha_j = \alpha\} = \varnothing$时令$\lambda_\alpha = 0$，则$\lambda_\alpha \in C^\infty(\Omega)$，利用式(7.1.15)得

$$\operatorname{supp} \lambda_\alpha = \bigcup_{\alpha_j = \alpha} \operatorname{supp} f_j \subset U_\alpha, \quad \alpha \in A,$$

这得出$\lambda_\alpha < U_\alpha$. 从$\{\operatorname{supp} f_j\}$局部有限推出$\{\operatorname{supp} \lambda_\alpha\}$局部有限，

$$1 = \sum_j f_j = \sum_\alpha \sum_{\alpha = \alpha_j} f_j = \sum_\alpha \lambda_\alpha,$$

可见$\{\lambda_\alpha : \alpha \in A\}$是合于要求的$C^\infty$单位分解. □

7.2　广义函数的运算

广义函数论的一个基本课题是:将施行于点函数的一些运算(包括代数运算、极限运算、微分运算、变量代换、卷积、Fourier 变换等)推广于广义函数,并建立相应的运算规则. 利用广义函数的运算至少可解决如下两方面的问题:

(A) 将给定广义函数表为适当的点函数经某些运算而得的结果,这就在一定程度上揭示了广义函数的结构. 本节的后半部分将致力于此.

(B) 从经典函数及少数已知的非平凡广义函数(如 δ 函数)出发,利用适当运算构成新的广义函数,以满足应用上的各种需要. 鉴于直接给定的非平凡广义函数为数有限,通过运算来构作广义函数就成了特别有价值的方法.

首先简单讨论一下极限运算,它与下面将要考虑的其他运算在方法上与形式上都很不相同. 设 Φ 是某个基本空间,给定分布序列 $\{f_k\}\subset\Phi'$ 及 $f\in\Phi'$. 鉴于已经约定在 Φ' 中总使用弱* 拓扑,因此说到 $f_k\to f$ 时总是指 $f_k(\varphi)\to f(\varphi)$($\forall\varphi\in\Phi$). 相应地,在 Φ' 中 $f=\sum f_k$ 总意味着 $f(\varphi)=\sum f_k(\varphi)$($\forall\varphi\in\Phi$). 这一点今后将不再解释. 若对任何序列 $\{f_k\}\subset\Phi'$,只要 $\{f_k(\varphi)\}$ ($\varphi\in\Phi$) 恒收敛,其极限函数 f 就一定属于 Φ',则称空间 Φ' 是序列弱完备的. 预知 Φ' 序列弱完备对于判定分布序列的收敛性意义重大. 例如,若 $\{f_k\}\subset\Phi'$,则只要能判定 $\sum f_k(\varphi)$ 收敛($\forall\varphi\in\Phi$),就可断定必有某个 $f\in\Phi'$ 使得 $f(\varphi)=\sum f_k(\varphi)$($\forall\varphi\in\Phi$),而这样的 f 可能并不预知且也未必能实际确定. 考虑到这一层理由,以下定理对于展开广义函数论的重要性就十分明显了:

定理 7.2.1　空间 $\mathscr{D}'(\Omega)$,$\mathscr{E}'(\Omega)$ 与 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 都是序列弱完备的.

立即用一个简单例子来作解释. 设 $f(x)=\sum\limits_{1}^{\infty}\sin kx$. $\forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$,有

$$\begin{aligned}|\langle\sin kx,\varphi(x)\rangle| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\sin kx\mathrm{d}x\right|\\ &= \frac{1}{k^2}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\varphi''(x)\sin kx\mathrm{d}x\right|\\ &\leqslant \frac{1}{k^2}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi''(x)|\,\mathrm{d}x=\frac{\|\varphi''\|_1}{k^2},\end{aligned}$$

其中用了两次分部积分. 于是

$$\sum_k|\langle\sin kx,\varphi(x)\rangle|\leqslant\sum_k\frac{\|\varphi''\|_1}{k^2}<\infty,$$

可见 $\sum\langle\sin kx,\varphi(x)\rangle$ 收敛. 因此,由 $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ 的序列弱完备性得出 $f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. 此例的颇为惊人之处是在通常意义上, $\sum\sin kx$ 根本就不收敛. 当然,上面所说的和函数 $f(x)$,必定是一广义函数而非经典函数.

下面转向其他运算. 本节中只考虑一元运算,它能最清晰地表现出广义函数运算的一般思想. 简单地说就是:借助于某种对偶,将施于广义函数的运算转移到检验函数上, 因检验函数是充分好的函数,故通常可顺利完成各种运算,且运算性质良好,而这又使广义函数的相应运算具有足够良好的性质.

设 Φ 是某个基本空间,A 是施于 Φ 上的某种运算. 通常,易验证 $A\in L(\Phi)$ (记号依 1.5 节). 若能找到一个 $A^*\in L(\Phi)$,使得

$$\langle Af,\varphi\rangle=\langle f,A^*\varphi\rangle,\quad f,\varphi\in\Phi \tag{7.2.1}$$

(注意此处 f 与 Af 均当作分布看待),则称 A^* 为 A 的形式对偶或形式伴随. 然后将式(7.2.1) 中的 $f\in\Phi$ 改为 $f\in\Phi'$,就得到 Af 的定义式,即

$$\langle Af,\varphi\rangle=\langle f,A^*\varphi\rangle,\quad f\in\Phi',\varphi\in\Phi. \tag{7.2.2}$$

将式(7.2.2)与式(1.6.20)对照看出,算子

$$A:\Phi'\to\Phi',\quad f\to Af$$

正是 A^* 的对偶算子. 于是直接由对偶算子的性质得出

命题 7.2.1 设 Φ 是某个基本空间, $A:\Phi\to\Phi$ 是一线性算子. 若有 $A^*\in L(\Phi)$ 使恒等式(7.2.1) 满足,则以下结论成立:

(i) $\forall f\in\Phi'$,存在唯一 $Af\in\Phi'$ 使等式(7.2.2) 成立;

(ii) A 在 Φ' 上连续,即若在 Φ' 中 $f_k\to f$,则 $Af_k\to Af$. 若在 Φ' 中级数 $\sum f_k$ 收敛,则 $A\sum f_k=\sum Af_k$;

(iii) 若 $f\in\Phi$,则式(7.2.1) 与(7.2.2) 中的 Af 一致.

其中结论(iii)可加强为:若 f 是某个正则分布,它使得 Af 有定义且式(7.2.1) 成立,则此 Af 也就与由式(7.2.2) 决定的 Af 一致.

以上方案的实施有赖于确定形式对偶 A^*,这当然只能依具体情况具体解决. 下面以最重要的微分运算为例来作说明.

给定一个 r 阶微分算子

$$A=\sum_{|\alpha|\leqslant r}a_\alpha(x)\mathrm{D}^\alpha, \tag{7.2.3}$$

其中, $a_\alpha(x)\in C^\infty(\Omega)(|\alpha|\leqslant r)$, $\mathrm{D}=-\mathrm{i}\partial$. 任给 $f,\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$,反复运用分部积分可以验证

$$\langle Af,\varphi\rangle=\sum_{|\alpha|\leqslant r}\int_\Omega a_\alpha(x)[\mathrm{D}^\alpha f(x)]\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{|\alpha|\leqslant r}\int_\Omega f(x)(-\mathrm{D})^\alpha(a_\alpha(x)\varphi(x))\mathrm{d}x=\langle f,A^*\varphi\rangle,$$

其中，

$$A^*\varphi = \sum_{|\alpha|\leq r}(-\mathrm{D})^\alpha(a_\alpha\varphi). \tag{7.2.4}$$

利用 Leibniz 公式(2.2.7)，可将 A^* 写成一个 r 阶微分算子

$$A^* = \sum_{|\alpha|\leq r} b_\alpha(x)\mathrm{D}^\alpha, \tag{7.2.4}'$$

其中，$b_\alpha(x)\in C^\infty(\Omega)$ 是由 $a_\beta(x)(|\beta|\leq r)$ 求导得到，并无必要写出其确切表达式. 由定理2.2.2可知 $A^*\in L(\mathscr{E}(\Omega))$. 结合引理7.1.1可进而得到 $A^*\in L(\mathscr{D}(\Omega))$. 这就可将命题7.2.1用于 A，于是得到了以下结果的一半：

定理 7.2.2　设 $A=\sum_{|\alpha|\leq r}a_\alpha(x)\mathrm{D}^\alpha$ 是 r 阶微分算子，$a_\alpha(x)\in C^\infty(\Omega)(|\alpha|\leq r)$，$A^*$ 依式(7.2.4)，仍以 A 记 A^* 的对偶，则以下结论成立：

(i) $A:\mathscr{D}'(\Omega)\to\mathscr{D}'(\Omega)$ 是一个连续线性算子. 若 $f\in C^r(\Omega)$，则 f 作为经典函数与作为分布所得的 Af 一致；

(ii) 若 $a_\alpha(x)\in\mathscr{O}_M(|\alpha|\leq r)$，此处

$$\mathscr{O}_M=\{\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^n):\ \forall\alpha\in\mathbb{Z}_+^n,\partial^\alpha\varphi\text{ 是缓增函数}\}, \tag{7.2.5}$$

φ 是**缓增函数** $\Leftrightarrow\exists r>0,|\varphi(x)|\leq\text{const }(1+|x|^2)^r$，则 $A:\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)\to\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 是一个连续线性算子.

证　只要证(ii)且只需验证 $A^*\in L(\mathscr{S})$，$\mathscr{S}=\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. 设 $b_\alpha(x)$ 依式(7.2.4)′，则必定 $b_\alpha(x)\in\mathscr{O}_M(|\alpha|\leq r)$. 已知 $\mathrm{D}^\alpha\in L(\mathscr{S})$（见命题6.5.2）. 余下只需证若 $g\in\mathscr{O}_M$，则

$$\mathscr{S}\to\mathscr{S},\quad\varphi\to g\varphi \tag{7.2.6}$$

是连续线性算子. 任给 $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^n$，$\varphi\in\mathscr{S}$，有

$$|x^\beta\partial^\alpha(g\varphi)|\leq\sum_{\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}|x^\beta\partial^{\alpha-\gamma}g\partial^\gamma\varphi|\leq Q(x)\sum_{\gamma\leq\alpha}|\partial^\gamma\varphi|,$$

其中，$Q(x)$ 是某个与 φ 无关的多项式，此处用了 $\partial^{\alpha-\gamma}g$ 为缓增函数. 以上不等式正表明式(7.2.6)是连续线性算子，如所要证. □

若分别取 $A=\mathrm{D}^\alpha$ 与 $A=g(x)\in C^\infty(\Omega)$，则易见分别有 $A^*=(-\mathrm{D})^\alpha$ 与 $A^*=g$，因而从式(7.2.2)得

$$\langle\mathrm{D}^\alpha f,\varphi\rangle=\langle f,(-\mathrm{D})^\alpha\varphi\rangle, \tag{7.2.7}$$

$$\langle gf,\varphi\rangle=\langle f,g\varphi\rangle, \tag{7.2.8}$$

其中，$f\in\mathscr{D}'(\Omega)$，$\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$ 或者 $f\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$，$\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，但对于式(7.2.8)要求 $g\in\mathscr{O}_M$. 最后这一点表明 $\mathscr{O}_M\mathscr{S}'\subset\mathscr{S}'$，因此 $\mathscr{O}_M$ 称为 $\mathscr{S}'$ 的**乘子空间**. 因 $1\in\mathscr{S}'$，故 $\mathscr{O}_M\subset\mathscr{S}'$. 特别地，$\mathscr{S}'$ 包含了所有多项式.

现在就来看一些微分运算的例子.

例 7.2.1　(i) 所谓 Heaviside 函数定义为 $H=\xi_{[0,\infty)}$，它是 Heaviside 为描述

突然断开的电路提出的. 这个从传统分析眼光看来毫不起眼的函数,因以下性质而令人注意: $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$,由式(7.2.7) 有

$$\langle H',\varphi\rangle = \langle H, -\varphi'\rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)\mathrm{d}x = \varphi(0),$$

这表明 $H' = \delta$,或者说,H 是 δ 函数的原函数.

(ii) 设$f(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$. $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$,有

$$\begin{aligned}\langle f',\varphi\rangle &= \langle f, -\varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^\infty |x|\varphi'(x)\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^\infty x\varphi'(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^0 x\varphi'(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty \varphi(x)\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^0 \varphi(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^\infty (\operatorname{sgn} x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \langle \operatorname{sgn} x, \varphi(x)\rangle,\end{aligned}$$

故得$f'(x) = \operatorname{sgn} x$. 表面上看,这一结果似乎与直接求导的结论一致,但实则不同. 在经典意义上,$f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可微, 而在分布意义上,$f(x)$ 作为整体可微,且 $\operatorname{sgn} x$ 作为一个整体是f的导数,不能说等式$f'(x) = \operatorname{sgn} x$ 不适用于 $x = 0$!

(iii) 设$f(x) = \ln|x|$,易见$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. 任给 $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$,有

$$\begin{aligned}\langle f',\varphi\rangle &= -\int_{-\infty}^\infty \varphi'(x)\ln|x|\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^\infty \varphi'(x)\ln x\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^0 \varphi'(x)\ln(-x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

这与例 7.1.1(v)对照看出$f'(x) = \mathrm{P}\cdot(x^{-1})$.

(iv) 设$f \in \mathrm{NBV}$,NBV 依式(3.7.15),则$f'(x)$ 在$\mathbb{R}$ 上几乎处处存在且f与f'均为$\mathbb{R}$ 上的正则分布. 以 $\mathrm{D}f$ 记f 的分布导数,则对任给 $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ 有

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{D}f,\varphi\rangle &= \langle f, -\varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} f\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_{\mathbb{R}}\varphi\mathrm{d}f = \int_{\mathbb{R}}\varphi\mathrm{d}\nu,\end{aligned}$$

其中,ν 是f生成的 LS 测度(由定理 3.7.4). 因此 $\mathrm{D}f = \nu$, $\mathrm{D}f = f' \Leftrightarrow f \in \mathrm{AC}$.

(v) 已知$f(x) = \sum\limits_1^\infty \sin kx$ 是$\mathbb{R}$ 上的分布,而在分布意义上逐项微分总是可行的(由命题 7.2.1(ii)),于是有

$$f'(x) = \sum_k k\cos kx,\quad f''(x) = -\sum_k k^2\sin kx,\quad \cdots.$$

从经典分析的眼光看来,这些结果是更加“荒谬”的.

(vi) 设 $f(x) = \mathrm{P}\cdot(x^{-1})$，今计算乘积 $xf(x)$. $\forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$，有

$$\langle xf(x),\varphi(x)\rangle = \langle f(x),\ x\,\varphi(x)\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x|\geqslant\varepsilon}\frac{x\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x = \langle 1,\varphi\rangle,$$

这得出 $xf(x) = 1$，即 $x\mathrm{P}\cdot(x^{-1}) = 1$.

(vii) 设 $f\in C^\infty(\mathbb{R})$，今求乘积 $f\delta$ 与 $f\delta'$. $\forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$，有

$$\langle f\delta,\varphi\rangle = \langle\delta,f\varphi\rangle = f(0)\varphi(0) = f(0)\langle\delta,\varphi\rangle,$$

$$\begin{aligned}\langle f\delta',\varphi\rangle &= \langle\delta,\ -(f\varphi)'\rangle = \langle\delta,\ -f'\varphi - f\varphi'\rangle\\ &= -f'(0)\varphi(0) - f(0)\varphi'(0) = \langle f(0)\delta' - f'(0)\delta,\varphi\rangle,\end{aligned}$$

故得 $f\delta = f(0)\delta,\ f\delta' = f(0)\delta' - f'(0)\delta$.

命题 7.2.1 显然亦可用于 A 是不同分布空间之间的映射的情况，广义函数的变量代换就属于这种情况. 设 $h:\Omega'\to\Omega$ 是一个 C^∞ 的微分同胚，令 $Af = f\circ h$，则当 $f\in\mathscr{D}(\Omega),\varphi\in\mathscr{D}(\Omega')$ 时有

$$\begin{aligned}\langle Af,\varphi\rangle &= \int_{\Omega'} f(h(y))\varphi(y)\mathrm{d}y\\ &= \int_{\Omega} f(x)\varphi(h^{-1}(x))\,|\det h'(h^{-1}(x))|^{-1}\mathrm{d}x\\ &= \langle f,A^*\varphi\rangle,\end{aligned}$$

其中，

$$A^*\varphi(x) = \varphi(h^{-1}(x))\,|\det h'(h^{-1}(x))|^{-1}.$$

因可验证 $A^*\in L(\mathscr{D}(\Omega'),\mathscr{D}(\Omega))$，故变通应用命题7.2.1得出：若 A 依式(7.2.2)，则 $A\in L(\mathscr{D}'(\Omega),\mathscr{D}'(\Omega'))$. 若仍记 $Af = f\circ h$，则

$$\langle f\circ h,\varphi\rangle = \langle f,A^*\varphi\rangle,\quad f\in\mathscr{D}'(\Omega),\varphi\in\mathscr{D}(\Omega').$$

分别取 $h = \tau_a(a\in\mathbb{R}^n)$ 与 $h(x) = -x$ 得到

$$\langle\tau_a f,\varphi\rangle = \langle f,\tau_{-a}\varphi\rangle,\quad f\in\mathscr{D}'(\Omega),\varphi\in\mathscr{D}(a+\Omega),\tag{7.2.9}$$

$$\langle\check{f},\varphi\rangle = \langle f,\check{\varphi}\rangle,\quad f\in\mathscr{D}'(\Omega),\varphi\in\mathscr{D}(-\Omega).\tag{7.2.10}$$

类似地，若取 $h(x) = Qx, Q\in\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$，则有

$$\langle f(Qx),\varphi(x)\rangle = \langle f(x),\varphi(Q^{-1}x)\,|\det Q|^{-1}\rangle,\tag{7.2.11}$$

其中，$f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n),\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

下面转入本节的另一个主要论题：通过微分运算来阐明广义函数的结构.

定理 7.2.3　设 $f\in\mathscr{D}'(\Omega)$，则以下条件互相等价：

(i) 任给 $\operatorname{supp} f$ 的开邻域 V，存在一个有限族 $\{f_\alpha\}\subset C_c(V)$，使得

$$f = \sum_\alpha \partial^\alpha f_\alpha;\tag{7.2.12}$$

(ii) $f\in\mathscr{E}'(\Omega)$；

(iii) f 有紧支集.

证 (i)⇒(ii) 不妨设$f = \partial^\alpha g, g \in C_c(\Omega)$. 令$K = \mathrm{supp}\, g$, $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$,有

$$|\langle f,\varphi\rangle| = |\langle g,\partial^\alpha \varphi\rangle| \leqslant \|g\|_1 \|\partial^\alpha \varphi\|_K,$$

这表明条件(7.1.6)满足,因而$f \in \mathscr{E}'(\Omega)$.

(ii)⇒(iii) 设$f \in \mathscr{E}'(\Omega)$,紧集$K$依条件(7.1.6),令$U = \Omega \backslash K$. $\forall \varphi \in \mathscr{D}(U)$,由式(7.1.6)显然有$f(\varphi) = 0$,因而$f| U = 0$. 故得$\mathrm{supp}\, f \subset K$,$f$有紧支集.

(iii)⇒(i) 设$A = \mathrm{supp}\, f$为紧集,V是A的开邻域,今要求出一个形如(7.2.12)的分解式. 这是本证明的主要部分,需要某些略带技术性的构造步骤. 取A的紧邻域K,使$K \subset V$(由定理1.3.6). 取$r \in \mathbb{Z}_+$,使条件(7.1.4)满足. 式(7.1.4)与$\mathrm{supp}\, f \subset K$一起推出$f \in \mathscr{D}_r'(\Omega)$. 令$m = r + n$,设$k$是满足$|\alpha| \leqslant m$的$\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$之个数. 任给$\varphi \in \mathscr{D}(K)$,由不等式(7.1.4)推出

$$\begin{aligned} |f(\varphi)| &\leqslant \mathrm{const} \max_{x \in K, |\alpha| \leqslant m} \left| \int_{y \leqslant x} \partial^\alpha \varphi(y) \mathrm{d}y \right| \\ &\leqslant \mathrm{const} \max_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha \varphi\|_1. \end{aligned}$$

令$X = L^1(K)$,则上述不等式表明

$$F: (\partial^\alpha \varphi)_{|\alpha| \leqslant m} \to f(\varphi)$$

是X^k的某个子空间上的有界线性泛函. 由 Hahn-Banach 定理,不妨设$F \in (X^k)'$. 因$(X^k)' \cong (L^\infty(K))^k$(由定理3.5.2),故存在$g_\alpha \in L^\infty(K)$($|\alpha| \leqslant m$),使得对任给$\varphi \in \mathscr{D}(K)$有

$$f(\varphi) = \sum_\alpha \int_\Omega g_\alpha(x)(-\partial)^\alpha \varphi(x) \mathrm{d}x = \left\langle \sum_\alpha \partial^\alpha g_\alpha, \varphi \right\rangle,$$

这得出$f = \sum \partial^\alpha g_\alpha$. 但此分解式尚不合要求,需要加以改造. 下面的处理方法颇为典型,在广义函数论中经常用到. 补充定义$g_\alpha | K^c = 0$,因而可设$g_\alpha \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. 令$e = (1,1,\cdots,1) \in \mathbb{Z}_+^n$,则

$$g_\alpha(x) = \partial^e \int_{y \leqslant x} g_\alpha(y) \mathrm{d}y \triangleq \partial^e \tilde{g}_{\alpha+e}(x).$$

因可用$\tilde{g}_{\alpha+e}$取代g_α,故不妨设$g_\alpha \in C(\mathbb{R}^n)$. 取$\lambda \in \mathscr{D}(V)$,使$K < \lambda < V$(由引理6.3.1). $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$,有

$$\begin{aligned} \langle f,\varphi\rangle &= \left\langle \sum_\alpha \partial^\alpha g_\alpha, \lambda\varphi \right\rangle = \sum_\alpha \langle g_\alpha, (-\partial)^\alpha(\lambda\varphi)\rangle \\ &= \sum_\alpha \sum_{\beta \leqslant \alpha} (-1)^{|\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} \langle g_\alpha, \partial^{\alpha-\beta}\lambda \partial^\beta \varphi\rangle \\ &= \sum_\alpha \sum_{\beta \leqslant \alpha} (-1)^{|\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} \langle (-\partial)^\beta (g_\alpha \partial^{\alpha-\beta}\lambda), \varphi\rangle, \end{aligned}$$

由此已能看出形如式(7.2.12)的分解存在. □

推论 7.2.1 (i) $\mathscr{E}'(\Omega) \subset \mathscr{D}_F'(\Omega)$;

(ii) $L_c^p(\Omega) \subset \mathscr{E}'(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$;

(iii) 若 $f \in \mathscr{E}'(\Omega)$,则存在 $g \in C(\Omega)$,$\beta \in \mathbb{Z}_+^n$,使得 $f = \partial^\beta g$.

证　结论(i)与(ii)是明显的,今证(iii). 因 f 已有形如式(7.2.12)的分解,故只要将其中每项 $\partial^\alpha g_\alpha$ 改造为 $\partial^\beta \tilde{g}_\alpha$,$\tilde{g}_\alpha \in C(\Omega)$,$\beta$ 与 α 无关,$\alpha \leqslant \beta$. 为此又只需证:若 $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}_+^n$,$\alpha \leqslant \beta$,$g \in C_c(\Omega)$,则必有 $\tilde{g} \in C(\Omega)$,使 $\partial^\alpha g = \partial^\beta \tilde{g}$. 因对 $\partial^\alpha g$ 的改造可通过有限步完成,不妨设 $\beta = \alpha + (1,0,\cdots,0)$. 于是

$$\partial^\alpha g(x) = \partial^\alpha \partial_1 \int_0^{x_1} g(y_1, x_2, \cdots, x_n) \mathrm{d}y_1 \triangleq \partial^\beta \tilde{g}(x).$$ □

推论 7.2.1(iii)表明了:$f \in \mathscr{E}'(\Omega)$ 与连续函数的差别是微分运算造成的.

对于 $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ 亦有类似于(7.2.12)的分解式.

定理 7.2.4　设 $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$,则有分解 $f = \sum\limits_\alpha \partial^\alpha f_\alpha$,$\{f_\alpha\} \subset C(\Omega)$. 当 $f \in \mathscr{D}_F'(\Omega)$ 时可要求该和式为有限和.

证　取有界开集的局部有限族 $\{V_i\}$,使得 $\Omega = \cup V_i$(这样的 $\{V_i\}$ 不难在定理 1.3.7 的基础上构成,参考定理 7.1.3 之证). 取 Ω 上从属于 $\{V_i\}$ 的 C^∞ 单位分解 $\{\lambda_i\}$,令 $f_i = \lambda_i f$,则 $\operatorname{supp} f_i \subset V_i$,因而 $f_i \in \mathscr{E}'(\Omega)$,$f = \sum f_i$. 由定理 7.2.3,存在 $f_{i\alpha} \in C_c(V_i)$,$|\alpha| \leqslant r_i \in \mathbb{Z}_+$,使得

$$f_i = \sum_{|\alpha| \leqslant r_i} \partial^\alpha f_{i\alpha}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

当 $|\alpha| > r_i$ 时,令 $f_{i\alpha} = 0$,则

$$f = \sum_i \sum_\alpha \partial^\alpha f_{i\alpha} = \sum_\alpha \partial^\alpha \Big(\sum_i f_{i\alpha} \Big) \triangleq \sum_\alpha \partial^\alpha f_\alpha,$$

其中,$f_\alpha = \sum\limits_i f_{i\alpha} \in C(\Omega)$,这用到 $\{\operatorname{supp} f_{i\alpha} : i \in \mathbb{N}\}$ 的局部有限性. 若 $f \in \mathscr{D}_F'(\Omega)$,则从定理 7.2.3 的证明看出,可设 $r = \sup\limits_i r_i < \infty$,因而当 $|\alpha| > r$ 时 $f_\alpha = 0$,即 $\sum \partial^\alpha f_\alpha$ 是一有限和. □

一个与推论 7.2.1(iii)很类似的结果是

定理 7.2.5　$f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow f = \partial^\beta g$,$\beta \in \mathbb{Z}_+^n$,$g \in C(\mathbb{R}^n)$ 是缓增函数.

证　若 $g \in C(\mathbb{R}^n)$ 是缓增函数,则有 $k \in \mathbb{N}$,使得

$$h(x) \triangleq g(x)(1 + |x|^2)^{-k} \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n),$$

最后一步用了定理 7.1.1(ii). 因 $(1 + |x|^2)^k \in \mathscr{O}_M$,故由定理 7.2.2(ii)有

$$g(x) = (1 + |x|^2)^k h(x) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n),$$

然后再用定理 7.2.2 得 $\partial^\beta g \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

逆命题的证明要困难些,且颇类似于定理 7.2.3 的(iii)⇒(i)之证. 首先,可归纳地证明不等式

$$\| h \partial^\alpha \varphi \|_0 \leqslant \text{const} \max_{\beta \leqslant \alpha} \| \partial^\beta (h\varphi) \|_0, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n). \tag{7.2.13}$$

于是从条件(7.1.7)推出

$$
\begin{aligned}
|f(\varphi)| &\leqslant \text{const} \max_{|\alpha|\leqslant r} \|\partial^\alpha(h\varphi)\|_0 \\
&\leqslant \text{const} \max_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha(h\varphi)\|_1, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n),
\end{aligned}
$$

其中，$m = r+n$，h 是与 φ 无关的某个多项式. 然后如同定理 7.2.3 之证得出 $g_\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^n)(|\alpha| \leqslant m)$，使得 $f = \sum h\partial^\alpha g_\alpha$. 余下的事情就是将 $\sum h\partial^\alpha g_\alpha$ 改造成 $\partial^\beta g$. 首先，可设 $g_\alpha \in C(\mathbb{R}^n)$，而且 g_α 是缓增函数(否则如定理 7.2.3 之证那样处理). 其次，可归纳地建立等式

$$
h\partial^\alpha g_\alpha = \sum_{\beta\leqslant\alpha} \partial^\beta(h_{\alpha\beta} g_\alpha),
$$

其中，$h_{\alpha\beta}$ 由 h 求导得到. 因此可设 $f = \sum \partial^\alpha f_\alpha$，$f_\alpha \in C(\mathbb{R}^n)$ 是缓增函数. 然后采用推论 7.2.1(ii)之证的那种步骤，将 $\sum \partial^\alpha f_\alpha$ 改造为 $\partial^\beta g$，$g \in C(\mathbb{R}^n)$ 是缓增函数，细节不必详细写出. □

推论 7.2.2 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{D}_F'(\mathbb{R}^n)$，$\mathscr{O}_M \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. 若 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 是缓增函数，则 $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 包含了所有多项式.

就阐明广义函数的结构而言，定理 7.2.3 ~ 定理 7.2.5 提供了主要的结果，它们分别给出了 $\mathscr{E}'(\Omega)$，$\mathscr{D}'(\Omega)$ 与 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 这 3 大类分布的特征性质. 此外还有一些较特殊的结果，它们刻画了一些特别的广义函数类. 下面就是一个这样的结果.

定理 7.2.6 设 $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$，则 $\operatorname{supp} f = \{0\} \Leftrightarrow f = P(D)\delta$，$P(x)$ 是一个非零的常系数多项式.

证 显然只要证必要性. 设 $\operatorname{supp} f = \{0\}$，可设 f 是 r 阶分布. 任给 $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$，令

$$
\psi(x) = \varphi(x) - \sum_{|\alpha|\leqslant r} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha\varphi(0)x^\alpha,
$$

则 $\partial^\alpha\psi(0) = 0(|\alpha| \leqslant r)$. 若 $f(\psi) = 0$，则有

$$
\begin{aligned}
f(\varphi) &= \sum_{|\alpha|\leqslant r} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha\varphi(0)\langle f(x), x^\alpha\rangle \\
&= \sum_{|\alpha|\leqslant r} c_\alpha \partial^\alpha\varphi(0) = \sum_{|\alpha|\leqslant r} c_\alpha \langle\delta, \partial^\alpha\varphi\rangle,
\end{aligned}
$$

其中，$c_\alpha = \langle f(x), x^\alpha\rangle/\alpha!$. 这就得出 $f = \sum c_\alpha(-\partial)^\alpha\delta$.

今补证 $f(\psi) = 0$. $\forall \varepsilon > 0$，取 $K = \bar{B}_\eta(0) \subset \mathbb{R}^n$，$\eta > 0$，使得 $|\partial^\alpha\psi(x)| < \varepsilon$，$|\alpha| = r$，$x \in K$，则可证

$$
|\partial^\alpha\psi(x)| \leqslant \varepsilon |nx|^{r-|\alpha|}, \quad |\alpha| \leqslant r, x \in K. \tag{7.2.14}
$$

设式(7.2.14)对 $|\alpha| = i \leqslant r$ 成立，$|\beta| = i-1$，则由中值定理有

$$
|\partial^\beta\psi(x)| \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \sum_j |\partial_j\partial^\beta\psi(tx)||x|
$$

$$\leqslant \varepsilon |nx|^{r-i} n |x| = \varepsilon |nx|^{r-|\beta|}.$$

这就归纳地证明了式(7.2.14). 取 $h \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, 使得在 $x=0$ 邻近 $h=1, h < B_1(0)$. 令 $h_t(x) = h(x/t), 0<t<\eta$, 则 $h_t\psi \in \mathscr{D}(K)$, 在 $x=0$ 邻近 $h_t\psi = \psi$. 于是由 $\operatorname{supp} f = \{0\}$, 推论 7.1.1 与条件(7.1.4) 有

$$\begin{aligned} |f(\psi)| &= |f(h_t\psi)| \leqslant C \| h_t\psi \|_{(r)} \\ &= \max_{|x| \leqslant t, |\alpha| \leqslant r} C \left| \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^{\alpha-\beta} h)\left(\frac{x}{t}\right) t^{-|\alpha-\beta|} \partial^\beta \psi(x) \right| \\ &\leqslant \text{const} \max_{\beta \leqslant \alpha, |\alpha| \leqslant r} t^{-|\alpha-\beta|} \varepsilon (nt)^{r-|\beta|} \leqslant C_1 \varepsilon, \end{aligned}$$

其中用了式(7.2.14), C 与 C_1 是与 ε 无关的正常数. 这得出 $f(\psi) = 0$. □

7.3 卷　积

7.2 节中处理一元运算的一般思路与方法,适当修改之后亦可用于二元运算. 最重要的二元运算无疑是卷积,它是本节考虑的对象. 如同第 6 章中一样,卷积是展开 Fourier 分析理论所不可缺少的. 在广义函数范围内, 6.2 节中的许多内容将被继承且变得更具一般性. 因本节的讨论主要在 $\mathbb{R}^n$ 上展开,故在空间 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 等的记号中均省去 $\mathbb{R}^n$, 积分中的 $\mathbb{R}^n$ 也略而不注.

自然,从经典函数的卷积着手讨论. 任给 $f, g \in L^1$ 与 $\varphi \in \mathscr{D}$,有

$$\begin{aligned} \langle f * g, \varphi \rangle &= \int \varphi(y) \mathrm{d}y \int f(x) g(y-x) \mathrm{d}x \\ &= \int f(x) \mathrm{d}x \int g(y) \varphi(x+y) \mathrm{d}y \\ &= \langle f(x), \langle g, \varphi_x \rangle \rangle, \end{aligned} \tag{7.3.1}$$

其中, f, g 与 $f * g$ 均视为分布,而 $\varphi_x = \tau_x \varphi$. 这就启示出以下定义:若 $f, g \in \mathscr{D}'$,则 f 与 g 的卷积 $f * g$ 界定为

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle g(x), g(\varphi_x) \rangle, \quad \varphi \in \mathscr{D}. \tag{7.3.2}$$

只要式(7.3.2)右端恒有意义且使 $f * g \in \mathscr{D}'$. 以上定义直接表明了当 $f, g \in L^1$ 时,经典意义下的 $f * g$ 就是 f, g 被看成分布时的卷积.

此处也如 6.2 节中一样,不容易描述使 $f * g$ 存在的确切条件. 但至少可以指出使 $f * g$ 存在的某些充分条件,这样的结果已能部分地满足应用之需要. 简单地说,要使 $f * g$ 存在,要求其中至少有一个因子满足一定附加条件.

定理 7.3.1　设 $f, g \in \mathscr{D}'$,其中之一有紧支集,则以下结论成立:

(i) $f * g = g * f \in \mathscr{D}'$;

(ii) $\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$;

(iii) $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$,有 $\partial^\alpha (f * g) = \partial^\alpha f * g = f * \partial^\alpha g$;

(iv) $f*g$ 分别对 f 与 g 为连续线性算子.

证 (i) 这是定理的主要结论. 首先设 $f,g\in\mathscr{E}'$,则 $f=\sum\partial^\alpha f_\alpha$, $g=\sum\partial^\beta g_\beta$, $f_\alpha,g_\beta\in C_c(\mathbb{R}^n)$(由定理 7.2.3). $\forall\varphi\in\mathscr{D}$,有

$$\begin{aligned}\langle f,g(\varphi_x)\rangle &= \left\langle \sum_\alpha \partial^\alpha f_\alpha(x),\sum_\beta\left\langle\partial^\beta g(y),\varphi(x+y)\right\rangle\right\rangle\\ &= \sum_{\alpha,\beta}\langle f_\alpha(x),\langle g_\beta(y),(-\partial)^{\alpha+\beta}\varphi(x+y)\rangle\rangle\\ &= \sum_{\alpha,\beta}\int f_\alpha(x)\mathrm{d}x\int g_\beta(y)(-\partial)^{\alpha+\beta}\varphi(x+y)\mathrm{d}y\\ &= \sum_{\alpha,\beta}\int(f_\alpha*g_\beta)(y)(-\partial)^{\alpha+\beta}\varphi(y)\mathrm{d}y\\ &= \sum_{\alpha,\beta}\langle\partial^{\alpha+\beta}(f_\alpha*g_\beta),\varphi\rangle,\end{aligned}$$

这就得出

$$f*g=\sum_{\alpha,\beta}\partial^{\alpha+\beta}(f_\alpha*g_\beta)=g*f\in\mathscr{D}.$$

其次仅设 $g\in\mathscr{E}'$,令 $A=\operatorname{supp}g$. 由定理7.1.2,只要对任何有界开集 $U\subset\mathbb{R}^n$,证 $(f*g)\mid U=(g*f)\mid U\in\mathscr{D}'(U)$. 因 $U-A$ 亦为有界开集,故 $K=\overline{U-A}$ 是紧集. 取 $\lambda\in\mathscr{D}$,使 $K\prec\lambda$(由引理6.3.1). 任给 $\varphi\in\mathscr{D}(U)$,令 $\psi(x)=g(\varphi_x)$,则可归纳地验明 $\partial^\alpha\psi(x)=g(\partial^\alpha\varphi_x)$,因而 $\psi\in C^\infty$ 且 $\operatorname{supp}\psi\subset K$,故 $\psi\in\mathscr{D}(K)$. 当 $x\in A$ 时显然有 $\varphi_x\in\mathscr{D}(K)$. 于是

$$\begin{aligned}\langle f,\psi\rangle &= \langle f,\lambda\psi\rangle=\langle\lambda f,\psi\rangle\\ &= \langle(\lambda f)*g,\varphi\rangle=\langle g*(\lambda f),\varphi\rangle\\ &= \langle g(x),f(\lambda\varphi_x)\rangle=\langle g*f,\varphi\rangle,\end{aligned}$$

这得出 $\langle f*g,\varphi\rangle=\langle g*f,\varphi\rangle$,如所要证.

(ii) 就 $g\in\mathscr{E}'$ 的情况证明,保持上段证明中的记号 A,U,ψ 的意义,设 $U\subset(A+\operatorname{supp}f)^c$,则 $\operatorname{supp}\psi\subset U-A\subset(\operatorname{supp}f)^c$,因而 $f(\psi)=0$. 这表明 $(f*g)\mid U=0$,由此得出 $\operatorname{supp}(f*g)\subset A+\operatorname{supp}f$.

(iii) 结合式(7.3.2)与(7.2.7)易直接验明.

(iv) 的验证是直接的. □

基于定理7.3.1,形式上可以写出

$$\mathscr{D}'*\mathscr{E}'\subset\mathscr{D}',\quad\mathscr{E}'*\mathscr{E}'\subset\mathscr{E}'.\tag{7.3.3}$$

用式(7.3.2)易直接验知 $f*\delta=f(f\in\mathscr{D}')$,可见 δ 函数是卷积单位元,$\mathscr{E}'$ 依卷积是以 δ 为单位元的交换代数(其中,卷积的结合性将由定理 7.3.4 给出).

回忆起6.2节中最有价值的结论是,卷积有光滑化的功能(见定理6.2.3). 对于广义函数亦有类似的结论.

定理 7.3.2 设 $(f,g) \in (\mathscr{E}' \times \mathscr{E}) \cup (\mathscr{D}' \times \mathscr{D}) \cup (\mathscr{S}' \times \mathscr{S})$,则 $f * g \in C^\infty$ 且

$$(f*g)(x) = \langle f(y), g(x-y) \rangle = \langle \check{f}, g_x \rangle. \tag{7.3.4}$$

仿照式(7.3.3),形式上可将定理结论缩写为

$$(\mathscr{E}' * \mathscr{E}) \cup (\mathscr{D}' * \mathscr{D}) \cup (\mathscr{S}' * \mathscr{S}) \subset C^\infty, \tag{7.3.5}$$

其中,$\mathscr{S}' * \mathscr{S} \subset C^\infty$ 可加强为 $\mathscr{S}' * \mathscr{S} \subset \mathscr{O}_M$.

证 (i) 设 $(f,g) \in \mathscr{E}' \times \mathscr{E}$, $f = \sum \partial^\alpha f_\alpha$ 依式(7.2.11),则

$$f * g = \sum_\alpha (\partial^\alpha f_\alpha) * g = \sum_\alpha f_\alpha * \partial^\alpha g \in C^\infty,$$

其中用了定理 6.2.3. 其次,利用上述等式得

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \sum_\alpha \langle f_\alpha(y), (\partial^\alpha g)(x-y) \rangle \\ &= \sum_\alpha \langle \partial^\alpha f_\alpha(y), g(x-y) \rangle = \langle f(y), g(x-y) \rangle,\end{aligned}$$

这得出式(7.3.4).

(ii) 设 $(f,g) \in \mathscr{D}' \times \mathscr{D}$. 令 $A = \operatorname{supp} g$,设 U, K, λ 依定理 7.3.1(i)之证,则

$$(f*g) \mid U = ((\lambda f) * g) \mid U \in C^\infty,$$

$$(f*g)(x) = \langle \lambda(y) f(y), g(x-y) \rangle = \langle f(y), g(x-y) \rangle, \quad x \in U,$$

其中用了已证之(i). 由 U 的任意性,得出所要结论.

(iii) 设 $(f,g) \in \mathscr{S}' \times \mathscr{S}$. $\forall \varphi \in \mathscr{D}$,有

$$g(\varphi_x) = \langle g(y), \varphi(x+y) \rangle = \langle \check{g} * \varphi \rangle(x).$$

因此,式(7.3.2)可改写成

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f, \check{g} * \varphi \rangle. \tag{7.3.6}$$

这就可以利用命题 7.2.1 中的思想. 首先考虑算子

$$A^*: \mathscr{S} \to \mathscr{S}, \quad \varphi \to \check{g} * \varphi,$$

今用闭图像定理证明 $A^* \in L(\mathscr{S})$. 设在 $\mathscr{S}$ 中 $\varphi_k \to \varphi$, $\check{g} * \varphi_k \to \psi$,则 $\varphi_k \xrightarrow{L^1} \varphi$, $\check{g} * \varphi_k \xrightarrow{L^1} \check{g} * \varphi = \psi$(由命题 6.5.2 与定理 6.2.2),即 $\psi = A^* \varphi$. 于是 $(A^*)' \in L(\mathscr{S}')$, 对照式(7.3.6) 即得 $f * g \in \mathscr{S}'$. 然后利用式(7.3.6) 得

$$\begin{aligned}\langle f * g, \varphi \rangle &= \left\langle f(y), \int g(x-y) \varphi(x) \mathrm{d}x \right\rangle \\ &= \int \langle f(y), g(x-y) \rangle \varphi(x) \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

这得出 $(f*g)(x) = \langle f(y), g(x-y) \rangle \triangleq h(x)$. 类似于定理 7.3.1(i)证明中证 $\psi \in C^\infty$,可指明 $h \in C^\infty$. □

分别以 g 与 φ 取代 f 与 g,反向利用式(7.3.4) 得到 $g(\varphi_x) = (\check{g} * \varphi)(x)$. 这就可将卷积的定义式(7.3.2)改写为

$$\langle f*g,\varphi\rangle = \langle f,\check{g}*\varphi\rangle,\quad f,g\in\mathscr{D}',\varphi\in\mathscr{D}. \tag{7.3.2}'$$

形式上式(7.3.2)′与式(7.3.6)一致,但式(7.3.6)中$f\in\mathscr{S}'$,$g\in\mathscr{S}$. 当然,如在前面已指出的,要使式(7.3.2)′确定义一个$f*g\in\mathscr{D}'$,仅要求$f,g\in\mathscr{D}'$是不够的.

依据定理7.3.2,选取适当的光滑函数g,可将广义函数f变为光滑函数$f*g$. 如在6.3节中一样,要得到逼近f的光滑函数序列$\{f_k\}$,就必须选取适当的光滑函数序列$\{g_k\}$,如同6.3节中的近似单位. 实际上,只要$g_k\to\delta$,则由卷积的连续性必有$f_k\triangleq f*g_k\to f*\delta=f$. 凡满足$g_k\to\delta$的$C^\infty$函数序列均称为$\delta$型序列. 这种序列是很多的. 例如,设$\theta_k$是$\mathbb{R}^n$上的一个$C^\infty$近似单位,则$\forall\varphi\in\mathscr{D}$有

$$\langle\theta_k,\varphi\rangle = (\theta_k*\check{\varphi})(0)\to\varphi(0) = \langle\delta,\varphi\rangle$$

(由定理6.3.1),可见$\theta_k\to\delta$. 当然,为使δ型序列θ_k能光滑化f,由定理7.3.2,当$f\in\mathscr{D}'$与$f\in\mathscr{S}'$时应分别选取$\theta_k\in\mathscr{D}$与$\theta_k\in\mathscr{S}$.

如果对于$f\in\mathscr{D}'(\Omega)$,就要用稍细致的方法.

定理7.3.3　设$f\in\mathscr{D}'(\Omega)$,则存在序列$\{g_i\}\subset\mathscr{D}(\Omega)$,使得在$\mathscr{D}'(\Omega)$中$g_i\to f(i\to\infty)$.

注　这就给定理7.1.1(i)中的稠密性结论以一直接证明.

证　以下证法是从定理6.3.6(ii)之证借用过来的. 依那里的记号,令$g_i=(h_if)*\varphi_{m_i}$,则$h_if\in\mathscr{E}'(\Omega)$,由定理7.3.1(ii)有

$$\operatorname{supp} g_i\subset\operatorname{supp} h_i+B_{1/m_i}(0)\subset\Omega.$$

由定理7.3.2有$g_i\in\mathscr{D}(\Omega)$. $\forall\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$,当$i$充分大时,有

$$\langle g_i,\varphi\rangle = \langle h_if,\check{\varphi}_{m_i}*\varphi\rangle = \langle f,\check{\varphi}_{m_i}*\varphi\rangle\to\langle f,\varphi\rangle,\quad i\to\infty,$$

这表明$g_i\to f$. □

必须强调,光滑化本身并不是目的,否则会造成一种误解. 一个广义函数仅当它被光滑化之后才是有用的,那么仅用光滑函数就够了,广义函数岂不多余！实际上,我们不可避免地要用到广义函数,只是希望通过某一简捷途径将光滑函数的一些性质转移到广义函数罢了. 而达此目的的最有效手段之一,正是广义函数的光滑化. 而定理7.3.3恰为光滑化方法提供了依据.

光滑化方法的效果如何,最好是通过例子来说明. 试看以下简单例子. 设$f\in\mathscr{D}'(\Omega)$,$g\in C^\infty(\Omega)$,则$fg\in\mathscr{D}'(\Omega)$(由定理7.2.2). 那么,是否如式(2.2.7)一样,成立如下Leibniz公式:

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\partial^{\alpha-\beta}f\partial^\beta g? \tag{7.3.7}$$

利用定理7.3.3,式(7.3.7)的证明十分简单. 取序列$\{f_i\}\subset\mathscr{D}(\Omega)$,使得$f_i\to f$. 由

$$\partial^\alpha(f_ig) = \sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\partial^{\alpha-\beta}f_i\partial^\beta g$$

及微分运算的连续性(见定理7.2.2),立得式(7.3.7).

至此,尚未提到卷积的结合性.如同卷积的存在性一样,它也只是有条件地成立.下面给出常用的条件.

定理 7.3.4　设 $(f,g,h) \in (\mathscr{D}' \times \mathscr{E}' \times \mathscr{E}') \cup (\mathscr{S}' \times \mathscr{S} \times \mathscr{S})$,则成立

$$(f*g)*h = f*(g*h). \tag{7.3.8}$$

证　(i) 设 $(f,g,h) \in \mathscr{D}' \times \mathscr{E}' \times \mathscr{E}'$. 首先设 $g,h \in \mathscr{D}$,取 $\{f_i\} \subset \mathscr{D}$,使 $f_i \to f$,则由 $(f_i * g) * h = f_i * (g * h)$ 取极限知式(7.3.8)成立.

其次仅设 $h \in \mathscr{D}$,则 $\forall \varphi \in \mathscr{D}$ 有

$$\langle (f*g)*h, \varphi \rangle = \langle f*g, \check{h}*\varphi \rangle = \langle f, \check{g}*(\check{h}*\varphi) \rangle$$
$$= \langle f, (\check{g}*\check{h})*\varphi \rangle = \langle f*(g*h), \varphi \rangle,$$

其中用了式(7.3.2)′与第一步所证结论.于是当 $h \in \mathscr{D}$ 时式(7.3.8)成立.

最后,不假定 $h \in \mathscr{D}$, $\forall \varphi \in \mathscr{D}$,利用已得结论有

$$\langle (f*g)*h, \varphi \rangle = \langle f, \check{g}*(\check{h}*\varphi) \rangle = \langle f, (\check{g}*\check{h})*\varphi \rangle$$
$$= \langle f*(g*h), \varphi \rangle,$$

这得出式(7.3.8).

(ii) 设 $(f,g,h) \in \mathscr{S}' \times \mathscr{S} \times \mathscr{S}$,则对任给 $\varphi \in \mathscr{D}$ 有

$$\langle (f*g)*h, \varphi \rangle = \langle f, \check{g}*(\check{h}*\varphi) \rangle = \langle f, (\check{g}*\check{h})*\varphi \rangle$$
$$= \langle f*(g*h), \varphi \rangle,$$

这得出式(7.3.8)成立. □

当 $f,g,h \in \mathscr{D}'$,其中,仅有一个有紧支集时不能保证结合律满足,以下就是一个简单的反例:

$$1*(\delta'*H) = 1 \neq 0 = (1*\delta')*H,$$

其中,H 是 Heaviside 函数.

再回到卷积的存在性.你会注意到式(7.3.3)并未涉及 $\mathscr{S}'$. 从 Fourier 分析的需要来看,$\mathscr{S}'$ 恰是最值得关注的.理想的结果似乎应有 $\mathscr{S}' * \mathscr{S}' \subset \mathscr{S}'$,可惜这并不成立.这就需要寻求某个子空间 $F \subset \mathscr{S}'$,使得 $\mathscr{S}' * F \subset \mathscr{S}'$. 取 $F = \mathscr{S}$ 当然可行(由定理7.3.2),但它太小,自然希望 F 尽可能大些.某种最佳选择基于以下概念.

定义 7.3.1　设 $g \in \mathscr{D}'$. 若对任给 $k \in \mathbb{N}$,存在分解 $g = \sum \partial^\alpha g_\alpha$(有限和),使得 $|g_\alpha(x)| \leqslant \text{const}\ (1+|x|)^{-k}$,则称 g 为**速降分布**.速降分布之全体记作 $\mathscr{O}_C'$.

不难看出 $\mathscr{S} \cup \mathscr{E}' \subset \mathscr{O}_C' \subset \mathscr{S}'$(见定理7.2.3与定理7.2.5).

定理 7.3.5　若 $(f,g) \in \mathscr{S}' \times \mathscr{O}_C'$,则 $f*g \in \mathscr{S}'$.

形式上,以上结果可写作 $\mathscr{S}' * \mathscr{O}_C' \subset \mathscr{S}'$. 这可与 $\mathscr{O}_M \mathscr{S}' \subset \mathscr{S}'$ 相对照.既然已称 $\mathscr{O}_M$ 为 $\mathscr{S}'$ 的乘子空间,自然就称 $\mathscr{O}_C'$ 为 $\mathscr{S}'$ 关于卷积的**乘子空间**. $\mathscr{O}_M$ 与 $\mathscr{O}_C'$ 之间的关系将在下节中指明.注意结合 $\mathscr{E}' \subset \mathscr{O}_c$ 得 $\mathscr{S}' * \mathscr{E}' \subset \mathscr{S}'$.

证　类似于定理7.3.2证明(iii),只要说明

$$A^*: \mathscr{S} \to \mathscr{S}, \quad \varphi \to \check{g} * \varphi$$

是连续线性算子. 任给 $\beta, \gamma \in \mathbb{Z}_+^n$, 取 $k \in \mathbb{N}$ 充分大, 设 $g = \sum \partial^\alpha g_\alpha$ 是定义 7.3.1 所要求的分解. 则对任给 $\varphi \in \mathscr{S}$, 有

$$\begin{aligned}
\| x^\gamma \partial^\beta (\check{g} * \varphi) \|_0 &\leq \sum_\alpha \| x^\gamma \partial^\beta ((-\partial)^\alpha g_\alpha * \varphi) \|_0 \\
&= \sum_\alpha \| x^\gamma (g_\alpha * \partial^{\alpha+\beta} \varphi) \|_0 \\
&= \sum_\alpha \left\| \sum_{\delta \leq \gamma} \binom{\gamma}{\delta} (x^\delta g_\alpha) * (x^{\gamma-\delta} \partial^{\alpha+\beta} \varphi) \right\|_0 \\
&\leq \text{const} \sum_\alpha \sum_{\delta \leq \gamma} \| x^\delta g_\alpha \|_\infty \| x^{\gamma-\delta} \partial^{\alpha+\beta} \varphi \|_1 < \infty,
\end{aligned}$$

可见 $\check{g} * \varphi \in \mathscr{S}$. 若在 $\mathscr{S}$ 中 $\varphi_k \to \varphi$, $\check{g} * \varphi_k \to \psi (k \to \infty)$, 则由定理 7.3.2 有

$$(\check{g} * \varphi_k)(x) = \langle g(y), \varphi_k(x+y) \rangle \to (\check{g} * \varphi)(x), \quad k \to \infty.$$

这推出 $\check{g} * \varphi = \psi$. 于是由闭图像定理知 $A^* \in L(\mathscr{S})$, 如所要证. □

下面考虑分布的张量积. 张量积与卷积有某种关联且作为一种二元运算, 在处理方法上, 张量积与卷积亦不乏共同之处. 张量积的一些结果对于表现广义函数的特性颇具启发性. 这些因素都促使我们对张量积作点简略考虑.

设 $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} = \mathbb{R}^n$, 记 $\mathscr{D}_i = \mathscr{D}(\Omega_i)$. 当写出 $\varphi(x,y) \in \mathscr{D}(\Omega)$ 时, 自动地认定 $x \in \Omega_1$, $y \in \Omega_2$. 任给 $f_i \in \mathscr{D}_i$, 通常意义下的张量积 $f_1 \otimes f_2$ 定义为

$$(f_1 \otimes f_2)(x,y) = f_1(x) f_2(y).$$

因此对任给 $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, 当 f_1, f_2 与 $f_1 \otimes f_2$ 均看成分布时, 有

$$\begin{aligned}
\langle f_1 \otimes f_2, \varphi \rangle &= \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f_1(x) f_2(y) \varphi(x,y) \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\
&= \langle f_1(x), \langle f_2(y), \varphi(x,y) \rangle \rangle \\
&= \langle f_2(y), \langle f_1(x), \varphi(x,y) \rangle \rangle,
\end{aligned} \tag{7.3.9}$$

其中用了 Fubini 定理. 若 $f_i \in \mathscr{D}_i'$, 则依已有经验的启示, 合理地定义的 $f_1 \otimes f_2$ 应保持等式 (7.3.9) 成立, 只是其中的式子未必能解释为积分. 以上预期可依一严格程序来实现.

定理 7.3.6 任给 $f_i \in \mathscr{D}_i'(i = 1,2)$, 存在唯一 $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$, 使得

$$\langle f, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle = f_1(\varphi_1) f_2(\varphi_2), \quad \varphi_i \in \mathscr{D}_i, i = 1,2, \tag{7.3.10}$$

$$\begin{aligned}
f(\varphi) &= \langle f_1(x), \langle f_2(y), \varphi(x,y) \rangle \rangle \\
&= \langle f_2(y), \langle f_1(x), \varphi(x,y) \rangle \rangle, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).
\end{aligned} \tag{7.3.11}$$

如上的 f 就称为 f_1 与 f_2 的**张量积**, 记作 $f_1 \otimes f_2$.

证 任给 $\varphi_i \in \mathscr{D}_i$, $i = 1,2$, 显然 $\varphi_1 \otimes \varphi_2 \in \mathscr{D}(\Omega)$. 函数族

$$\{\varphi_1 \otimes \varphi_2 : \varphi_i \in \mathscr{D}_i, i = 1,2\}$$

生成 $\mathscr{D}(\Omega)$ 的一个子空间,记作 $\mathscr{D}_1 \otimes \mathscr{D}_2$.

任给 $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. $\operatorname{supp}\varphi$ 在 Ω_i 内的投影 $K_i(i=1,2)$ 必为紧集. 取 K_i 的紧邻域 W_i,使 $W_i \subset \Omega$. 取 $\varphi_i \in \mathscr{D}_i$,使 $W_i \prec \varphi_i, i=1,2$(由定理1.3.6,引理6.3.1),则 $W_1 \times W_2 \prec \varphi_1 \otimes \varphi_2$. 取多项式序列 $\{h_k\}$,使得在 $\mathscr{E}(\Omega)$ 中 $h_k \to \varphi$(由定理6.3.6(iii)). 令 $g_k = (\varphi_1 \otimes \varphi_2)h_k$,则 $g_k \in \mathscr{D}_1 \otimes \mathscr{D}_2$(注意 h_k 为多项式是关键!). 因 $\operatorname{supp} g_k \subset \operatorname{supp}\varphi_1 \times \operatorname{supp}\varphi_2$,不难验证在 $\mathscr{D}(\Omega)$ 中 $g_k \to \varphi$. 这就证得 $\mathscr{D}_1 \otimes \mathscr{D}_2$ 在 $\mathscr{D}(\Omega)$ 中稠密.

由式(7.3.10)定义 $f(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(\varphi_i \in \mathscr{D}_i, i=1,2)$,然后将 f 线性地扩张到 $\mathscr{D}_1 \otimes \mathscr{D}_2$ 上. 另一方面,用类似于定理2.2.4的方法可以验明,式(7.3.11)之右端均有意义且连续地依赖于 φ;而当 $\varphi \in \mathscr{D}_1 \otimes \mathscr{D}_2$ 时,二者均与 $f(\varphi)$ 一致. 考虑到 $\mathscr{D}_1 \otimes \mathscr{D}_2$ 在 $\mathscr{D}(\Omega)$ 中稠密,就得到结论:f 可唯一地扩张到 $\mathscr{D}(\Omega)$ 上,因而 $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ 且扩张后的 f 使式(7.3.11)成立. □

式(7.3.11)可理解为分布意义下的 Fubini 定理. 由式(7.3.11)不难看出,以下式子成立:

$$\operatorname{supp}(f_1 \otimes f_2) = \operatorname{supp} f_1 \times \operatorname{supp} f_2.$$

其次,因式(7.3.2)可写成

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle,$$

于是对照式(7.3.11)得到

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f(x) \otimes g(y), \varphi(x+y) \rangle.$$

7.4 基于广义函数的 Fourier 变换

还在第6章中就提到,唯有在广义函数的层次上,才可能看到一个完美的 Fourier 变换理论. 因此,在广义函数论的基础上重建 Fourier 分析,一直在预期之中. 在一定程度上,本节内容可以说是6.5节的某种翻版. 当然,我们绝不会满足于仅看到一些早已熟知的东西,那些实质上新的结果才能激起我们的兴趣. 而广义函数论的概念与方法恰好能为 Fourier 分析注入新的活力,使之更加完美. 在广义函数的框架内,Fourier 分析理论如此和谐,正是体现广义函数优势的主要例证之一.

本节将沿用7.3节及6.5节中的记号与约定.

如我们在6.5节中所见,就其逻辑形式而言,Fourier 变换原不过是施于 L^1 函数的一种一元运算而已. 意识到这一点,我们就站到了应用命题7.2.1的位置上. 不过从适应广义函数论方法的角度考虑,应取一个比 L^1 更好一点的空间. 回顾6.5节的内容很容易断定,最好的选择就是空间 $\mathscr{S}$!因 $\mathscr{S} \to \mathscr{S}, \varphi \to \hat{\varphi}$ 是一拓扑同构(由命题6.5.2(ii)),这就诱导出拓扑同构

$$\mathscr{S}' \to \mathscr{S}', \quad f \to \widehat{f}, \tag{7.4.1}$$

它唯一地决定于恒等式(见式(7.2.2))

$$\langle \hat{f},\varphi\rangle = \langle f,\hat{\varphi}\rangle,\quad f\in\mathscr{S}',\varphi\in\mathscr{S}. \tag{7.4.2}$$

自然地,映射(7.4.1)就称为广义函数的 Fourier 变换,更准确地说,是缓增分布的 Fourier 变换.

若 $f\in L^1$,$\hat{f}$ 依定义 6.5.1,则对任给 $\varphi\in\mathscr{S}$ 有

$$\begin{aligned}\langle \hat{f},\varphi\rangle &= \int\varphi(x)\,\mathrm{d}x\int f(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot y}\mathrm{d}y\\ &= \int f(y)\,\mathrm{d}y\int\varphi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot y}\mathrm{d}x = \langle f,\hat{\varphi}\rangle,\end{aligned}$$

其中用了 Fubini 定理. 对照式(7.4.2)看出,上式中的 $\hat{f}$ 就是 f 作为缓增分布(见定理 7.1.1(ii))的 Fourier 变换. 若 $f\in L^2$,则有 $\{f_k\}\subset\mathscr{S}$,使

$$\|f_k-f\|_2 = (2\pi)^{-n/2}\|\hat{f}_k-\hat{f}\|_2\to 0,\quad k\to\infty,$$

其中,$\hat{f}_k$ 与 $\hat{f}$ 分别为 L^1- Fourier 变换与 L^2- Fourier 变换(见命题 6.5.2 与定理 6.5.3),因 L^2 收敛蕴涵 $\mathscr{S}'$ 中的收敛(由定理 7.1.1(ii)),故由

$$\langle \hat{f}_k,\varphi\rangle = \langle f_k,\hat{\varphi}\rangle,\quad \varphi\in\mathscr{S},k\in\mathbb{N}$$

推出 $\hat{f}$ 满足式(7.4.2),而这就表明 $\hat{f}$ 就是 f 作为缓增分布的 Fourier 变换. 以上所述表明,就 L^1 与 L^2 函数而言, Fourier 变换的经典定义与分布定义一致. 因此,借广义函数之助, L^1 与 L^2- Fourier 变换终于归于一统了. 当然,广义函数 Fourier 变换的意义远不止此. 首先,能施行 Fourier 变换的函数(任何 $f\in\mathscr{S}'$ 都行!)远远超出 $L^p(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 函数之外. 再者,或许更主要的是, Fourier 变换的性质变得更理想了. 我们将容易由定义式(7.4.2)直接推出的结论汇集于以下命题,并将其与命题 6.5.1 进行对比:

命题 7.4.1 Fourier 变换(7.4.1)有如下性质:

(i) 式(7.4.1)是拓扑同构. 因此,若在 $\mathscr{S}'$ 中 $f_k\to f$,则必 $\hat{f}_k\to\hat{f}$. 若在 $\mathscr{S}'$ 中 $f=\sum f_k$,则必 $\hat{f}=\sum\hat{f}_k$. 成立反演公式 $f^{\wedge\wedge\vee}=(2\pi)^n f(f\in\mathscr{S}')$;

(ii) 变量代换: $(f\circ A)^\wedge = |\det A|^{-1}\hat{f}\circ(A^{-1})^{\mathrm{T}}(f\in\mathscr{S}',A\in\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n))$;

(iii) 平移规则: $(\tau_a f)^\wedge = e_a\hat{f},(e_a f)^\wedge=\tau_{-a}\hat{f}(f\in\mathscr{S}',a\in\mathbb{R}^n)$;

(iv) 微分公式: $(P(\mathrm{D})f)^\wedge = P\hat{f},P(\mathrm{D})\hat{f}=(\check{P}f)^\wedge$,其中,$f\in\mathscr{S}'$,$P(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的常系数多项式;

(v) Parseval 等式: $\langle\hat{f},\hat{\bar{\varphi}}\rangle = (2\pi)^n\langle f,\bar{\varphi}\rangle(f\in\mathscr{S}',\varphi\in\mathscr{S})$.

证 所有结论都是 6.5 节中的相应结论与式(7.4.2)相结合的产物. 以证微分公式为例说明如下: $\forall\varphi\in\mathscr{S}$,有

$$\begin{aligned}\langle P(\mathrm{D})\hat{f},\varphi\rangle &= \langle\hat{f},P(-\mathrm{D})\varphi\rangle = \langle f,(\check{P}(\mathrm{D})\varphi)^\wedge\rangle\\ &= \langle f,\check{P}\hat{\varphi}\rangle = \langle\check{P}f,\hat{\varphi}\rangle = \langle(\check{P}f)^\wedge,\varphi\rangle,\end{aligned}$$

其中用了式(7.2.7),式(7.4.2),式(6.5.6)与式(7.2.8),这就得出 $P(\mathrm{D})\hat{f} = (\check{P}f)^\wedge$. □

特别要强调的是,在6.5节中只能受限制地使用的公式,如反演公式与微分公式,现在都可用于任何 $f \in \mathscr{S}'$,无需任何附加条件了. 初看起来颇令人惊奇:在命题6.5.1中加于等式 $P(\mathrm{D})\hat{f} = (\check{P}f)^\wedge$ 的条件 $\check{P}f \in L^1$,何以用于广义函数就弃之不顾了?其实理由很简单:在推出命题7.4.1中的诸结论时,仅需用到关于 $\varphi \in \mathscr{S}$ 的相应结论,而"好函数" φ 总是满足6.5节中所需的那些条件的,如 $\check{P}\varphi \in L^1$ 对于 $\varphi \in \mathscr{S}$ 就绝无问题. 总之,这再一次印证了广义函数论中的一条规则:分布的良好性质源于检验函数的良好性质!

该立即看一些求 Fourier 变换的例子. 当然,此处仅对非 L^1 函数的 Fourier 变换感兴趣.

例 7.4.1　(i) 直接由式(7.4.2)得出 $\hat{\delta} = 1$, 然后用反演公式与微分公式得

$$\hat{1} = (2\pi)^n\delta, \quad (P(\mathrm{D})\delta)^\wedge = P, \tag{7.4.3}$$

其中, $P(\cdot)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的常系数多项式. 再用反演公式得

$$\hat{P} = (2\pi)^n P(-\mathrm{D})\delta. \tag{7.4.4}$$

可见,对任何多项式都可施行 Fourier 变换,而且其结果有很简单的表达式. 结合式(7.4.4)与定理7.2.6得出:函数 $f \in \mathscr{D}'$ 是某个多项式的 Fourier 变换的充要条件是 $\operatorname{supp} f \subset \{0\}$.

(ii) 设 δ_a 是点 a 处的 Dirac 测度,则 $\delta_a = \tau_{-a}\delta$. 于是由平移规则及 $\hat{\delta} = 1$ 有

$$\hat{\delta}_a = e_{-a}, \quad \hat{e}_a = (2\pi)^n\delta_a, \quad a \in \mathbb{R}^n. \tag{7.4.5}$$

(iii) 设 H 是 Heaviside 函数(见例7.2.1(i)). $\forall \varphi \in \mathscr{S}$,有

$$\begin{aligned}
\langle H, \hat{\varphi}\rangle &= \int_0^\infty \mathrm{d}y \int_{-\infty}^\infty \varphi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_{-\infty}^\infty \varphi(x)\mathrm{d}x\int_0^b \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\mathrm{d}y \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(x)(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bx})}{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x \\
&= \left\langle \frac{1}{\mathrm{i}x}, \varphi(x)\right\rangle + \lim_{b\to\infty}\int_0^\infty [\varphi(x) + \varphi(-x)]\frac{\sin bx}{x}\mathrm{d}x \\
&\quad + \lim_{b\to\infty}\int_0^\infty \frac{\varphi(-x)-\varphi(x)}{\mathrm{i}x}\cos bx\mathrm{d}x \\
&= \left\langle \frac{1}{\mathrm{i}x}, \varphi(x)\right\rangle + \pi\varphi(0),
\end{aligned}$$

其中用了引理6.4.1与引理6.4.2, x^{-1} 记分布 $\mathrm{P}\cdot(x^{-1})$. 以上结果与式(7.4.2)对照得

$$\hat{H} = -\mathrm{i}\mathrm{P}\cdot(x^{-1}) + \pi\delta. \tag{7.4.6}$$

另一方面,由 $H' = \delta$ 并用微分公式得 $1 = \widehat{H'}(\xi) = \mathrm{i}\xi\,\widehat{H}(\xi)$. 若由此解出 $\widehat{H}(\xi) = 1/\mathrm{i}\xi$ 就与式(7.4.6) 不合了. 这一事实表明,对于广义函数可不能随便作除法运算!

(iv) 设 $f = \mathrm{P}\cdot(x^{-1})$. 式(7.4.6)两端作 Fourier 变换并用反演公式得 $2\pi\check{H} = -\mathrm{i}\widehat{f} + \pi$, 由此解出

$$\widehat{f}(\xi) = -\mathrm{i}\pi[1 - 2\check{H}(\xi)] = -\mathrm{i}\pi\ \mathrm{sgn}\,\xi.$$

直接利用式(7.4.2)亦容易得到以上结果.

(v) 设 $f(x) = \arctan x$. 显然 $f \in \mathscr{S}'$,

$$\mathrm{i}\xi\widehat{f}(\xi) = \widehat{f'}(\xi) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{\wedge}(\xi) = \pi\mathrm{e}^{-|\xi|}.$$

令 $g(\xi) = \widehat{f}(\xi) + \mathrm{i}\pi\mathrm{e}^{-|\xi|}\mathrm{P}\cdot(\xi^{-1})$,则 $\xi g(\xi) = 0$(用例7.2.1(vi)),于是 $g = c\,\delta$(见定理7.2.6). 注意到 f 是奇函数,取 $\varphi = \mathrm{e}^{-x^2} \in \mathscr{S}$ 得 $\langle g,\varphi\rangle = c\varphi(0) = 0$,因而 $c = 0$. 于是有 $\widehat{f}(\xi) = -\mathrm{i}\pi\mathrm{e}^{-|\xi|}\mathrm{P}\cdot(\xi^{-1})$.

(vi) 设 $f_k = 2^{-1}k\,\xi_{[-1/k,1/k]}$,则 f_k 是$\mathbb{R}$ 上的一个近似单位. 直接看出在 $\mathscr{S}'$ 中 $f_k \to \delta$,因而 $\widehat{f}_k \to 1\ (k\to\infty)$. 另一个较直接的方法是算出

$$\hat{f}_k(\xi) = \frac{k}{2}\int_{-1/k}^{1/k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x = \frac{k}{\xi}\sin\frac{\xi}{k},\quad \xi\in\mathbb{R}, k\in\mathbb{N}.$$

由此亦易验证在 $\mathscr{S}'$ 中 $\hat{f}_k \to 1$.

(vii) 设 $f = \sum e_k$,其中, k 遍取$\mathbb{Z}^n$. $\forall\varphi\in\mathscr{S}$,有

$$\sum\langle e_k,\varphi\rangle = \sum_k(\varphi * e_k)(0) = (2\pi)^n\sum_k\hat{\varphi}(k),$$

而右端级数必收敛(见定义6.4.1,定理6.4.1). 因此 $\sum e_k$ 在 $\mathscr{S}'$ 中收敛于 $f\in\mathscr{S}'$. 于是用命题7.4.1(i)与式(7.4.5)得

$$\left(\sum_k e_k\right)^{\wedge} = \sum_k\hat{e}_k = (2\pi)^n\sum_k\delta_k.$$

从经典分析的观点看来,级数 $\sum e_k$ 根本不收敛,更不必说求其 Fourier 变换了.

你必定注意到,在命题6.5.1 中占显著地位的卷积公式,在命题7.4.1 中恰好空缺. 推广卷积公式可不简单,需要较精细的考虑. 从7.3 节的材料已可看出卷积的复杂性,乘子空间 $\mathscr{O}_C'$ 就颇不平凡,而卷积公式(6.5.5) 的推广正有赖于乘子空间. 下面是朝这一方向的关键一步. 以下设 $\mathscr{O}_M$ 与 $\mathscr{O}_C'$ 分别依式(7.2.5) 与定义7.3.1.

引理7.4.1 $\mathscr{O}_M\to\mathscr{O}_C'$, $f\to\hat{f}$ 是一双射.

证 因已知 $\mathscr{O}_M\subset\mathscr{S}'$,当 $f\in\mathscr{O}_M$ 时 $\hat{f}$ 有定义且 $f\to\hat{f}$ 为单射不成问题. 要证的只是当 $f\in\mathscr{O}_M$ 时必 $\hat{f}\in\mathscr{O}_C'$ 且 $\mathscr{O}_M\to\mathscr{O}_C'$, $f\to\hat{f}$ 为满射,今分别证之.

(i) 设 $f\in\mathscr{O}_M$,要证 $\hat{f}\in\mathscr{O}_C'$. $\forall k\in\mathbb{N}$,必有 $r\in\mathbb{N}$,使得

$$|\partial^\alpha f(x)| \leqslant \mathrm{const}\ (1+|x|^2)^r,\quad |\alpha|\leqslant k. \tag{7.4.7}$$

令 $g(x) = (1+|x|^2)^{-r-n-1}f(x)$,则由式(7.4.7) 有 $(1+|x|^2)^{n+1}\partial^\alpha g(x)\in L^\infty$ $(|\alpha|\leqslant$

k), 从而 $\partial^{\alpha} g \in L^1(|\alpha| \leqslant k)$. 于是

$$\|\xi^{\alpha}\hat{g}\|_0 = \|(\partial^{\alpha}g)^{\wedge}\|_0 \leqslant \|\partial^{\alpha}g\|_1 < \infty, \quad |\alpha| \leqslant k.$$

注意到 $\hat{f} = (1-\Delta)^{r+n+1}\hat{g}$, Δ 是 Laplace 算子(由命题 7.4.1(iv)), 即看出 $\hat{f} \in \mathscr{O}_C'$(见定义 7.3.1).

(ii) 取定 $f \in \mathscr{O}_C'$, 今求得 $g \in \mathscr{O}_M$, 使 $f = \hat{g}$. 因由反演公式有 $f = (2\pi)^{-n} f^{\wedge\wedge\vee}$, 于是只要证 $g \triangleq (2\pi)^{-n} f^{\wedge\vee} \in \mathscr{O}_M$. 为此, 只要对任给 $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, 证 $\partial^{\beta} g$ 是缓增函数, 这相当于证 $\partial^{\beta}\hat{f}$ 为缓增函数. 令 $k = |\beta| + n + 1$. 由定义 7.3.1, 有分解 $f = \sum \mathrm{D}^{\alpha} f_{\alpha}$, 使得 $x^{\gamma} f_{\alpha} \in L^{\infty}(|\gamma| \leqslant k, |\alpha| \leqslant r)$, 从而 $x^{\gamma} f_{\alpha} \in L^1(\gamma \leqslant \beta, |\alpha| \leqslant r)$. 于是

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^{\beta}\hat{f}(\xi) &= \sum_{|\alpha| \leqslant r} \mathrm{D}^{\beta}(\xi^{\alpha}\hat{f}_{\alpha}(\xi)) \\
&= \sum_{|\alpha| \leqslant r}\sum_{\gamma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\gamma} \mathrm{D}^{\beta-\gamma}\xi^{\alpha}\mathrm{D}^{\gamma}\hat{f}(\xi) \\
&= \sum_{|\alpha| \leqslant r}\sum_{\gamma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\gamma} \mathrm{D}^{\beta-\gamma}\xi^{\alpha}((-x)^{\gamma} f_{\alpha})^{\wedge}(\xi).
\end{aligned}$$

由此得出, $\mathrm{D}^{\beta}\hat{f}(\xi)$ 可看成通常意义的偏导数且

$$|\mathrm{D}^{\beta}\hat{f}(\xi)| \leqslant \mathrm{const}(1+|\xi|)^{r} \sum_{\alpha,\gamma} \|x^{\gamma} f_{\alpha}\|_1,$$

可见 $\partial^{\beta}\hat{f}$ 是缓增函数, 如所要证. □

有了上述结果之后, 现在已不难建立卷积公式.

定理 7.4.1　设 $f \in \mathscr{S}'$, $g \in \mathscr{O}_C'$, $h \in \mathscr{O}_M$, 则成立

$$(f * g)^{\wedge} = \hat{f}\hat{g}, \quad (fh)^{\wedge} = (2\pi)^{-n}\hat{f} * \hat{h}. \tag{7.4.8}$$

证　只需证前一式(然后用反演公式及引理 7.4.1 即可推出后一式). 任给 $\varphi \in \mathscr{S}$, 有

$$\begin{aligned}
\langle f * g, \hat{\varphi}\rangle &= \langle f(x), g(\tau_x\hat{\varphi})\rangle = \langle f(x), g((e_{-x}\varphi)^{\wedge})\rangle \\
&= \langle f(x), \hat{g}(e_{-x}\varphi)\rangle = \langle f, (\hat{g}\varphi)^{\wedge}\rangle \\
&= \langle \hat{f}, \hat{g}\varphi\rangle = \langle \hat{f}\hat{g}, \varphi\rangle,
\end{aligned}$$

其中用到 $\hat{g} \in \mathscr{O}_M \subset C^{\infty}$, $\hat{g}\varphi \in \mathscr{S}$. 这就得出 $(f * g)^{\wedge} = \hat{f}\hat{g}$, 如所要证. □

在经典 Fourier 分析中, 以下事实是值得注意的: 无论 $f \in L^1$ 的连续性如何差, 总有 $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$. 若进而设 $x^{\alpha} f \in L^1(|\alpha| \leqslant r)$, 则有 $\hat{f} \in C^r(\mathbb{R}^n)$(由式(6.5.6)). 这表明当 $|x| \to \infty$ 时 $|f(x)|$ 下降越快, $\hat{f}$ 的光滑性就越高. 那么这一规律是否亦适用于广义函数的 Fourier 变换? 至少从引理 7.4.1 的结论来看, 回答应当是肯定的. 由引理 7.4.1 及反演公式推出 $f \in \mathscr{O}_C' \Rightarrow \hat{f} \in \mathscr{O}_M \subset C^{\infty}$, 注意 $\mathscr{O}_C'$ 中的函数是"速降的". 在极端情况下, $f \in \mathscr{E}'$ 已够"速降"的了, 那么 $\hat{f}$ 是否会是充分好的函数? 这正是如下的 **Paley-Weiner 定理**要解决的问题. 简言之, 该定理断定 $f \in \mathscr{E}'$ 的 Fourier 变换是解析函数.

以下约定 $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}^n$, 其中, $x, y \in \mathbb{R}^n$, 也写 $x = \mathrm{Re}\, z$, $y = \mathrm{Im}\, z$.

定理 7.4.2 设 $f \in \mathscr{E}'$, $\operatorname{supp} f \subset \bar{B}_\delta(0)$, 则 $\hat{f} \in C^\infty$,

$$\hat{f}(\xi) = \langle f, e_{-\xi} \rangle, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{7.4.9}$$

$\hat{f}(\xi)$ 可扩张为整函数

$$\hat{f}(z) = \langle f, e_{-z} \rangle, \quad z \in \mathbb{C}^n, \tag{7.4.10}$$

它满足

$$|\hat{f}(z)| \leqslant \text{const}(1 + |z|)^r e^{\delta |y|}, \tag{7.4.11}$$

其中, $r \in \mathbb{Z}_+$ 与 z 无关. 反之,若整函数 $h(z)$ 满足条件

$$|h(z)| \leqslant \text{const}\ (1 + |z|)^r e^{\delta |y|}, \quad z \in \mathbb{C}^n, \tag{7.4.12}$$

则必有 $f \in \mathscr{E}'$, 使得 $\hat{f}(z) = h(z)$, $\operatorname{supp} f \subset \bar{B}_\delta(0)$.

定理 7.4.2 中的函数 $\hat{f}(z)$ 称为 f 的 **Fourier-Laplace 变换**, 注意

$$\hat{f}(\xi + \mathrm{i}\eta) = (f(x) e^{\eta \cdot x})^\wedge(\xi).$$

证 (i) 设 $f = \sum \mathrm{D}^\alpha f_\alpha$, $f_\alpha \in C_c(\mathbb{R}^n)$ (由定理 7.2.3). 由 $f \in \mathscr{E}' \subset \mathscr{O}_C'$ 推出 $\hat{f} \in \mathscr{O}_M$ (由引理 7.4.1). 由 f 的分解式有

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \sum_\alpha \xi^\alpha \hat{f}_\alpha(\xi) = \sum_\alpha \xi^\alpha \langle f_\alpha, e_{-\xi} \rangle \\
&= \sum_\alpha \langle f_\alpha, \xi^\alpha e_{-\xi} \rangle = \sum_\alpha \langle f_\alpha, (-\mathrm{D})^\alpha e_{-\xi} \rangle \\
&= \sum_\alpha \langle \mathrm{D}^\alpha f_\alpha, e_{-\xi} \rangle = \langle f, e_{-\xi} \rangle,
\end{aligned}$$

这证得式(7.4.9). 以 $h(z)$ 记式(7.4.10)之右端, 则由直接计算可求得

$$\frac{\partial h(z)}{\partial z_j} = f\left(\frac{\partial e_{-z}}{\partial z_j} \right), \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

因而 $h(z) \in H(\mathbb{C}^n)$ (由定理 4.2.4). 因此 $\hat{f} = h \mid \mathbb{R}^n \in C^\infty$. 下面记 $h(z)$ 为 $\hat{f}(z)$.

今证式(7.4.11). 取 $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, 使 $(-\infty, 1] < g < (-\infty, 2)$, 如取

$$g(x) = \frac{\psi(1.5 - x)}{\psi(1.5 - x) + \psi(x - 1)}, \quad \psi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ e^{-1/x}, & x > 0. \end{cases}$$

令

$$\varphi_z(t) = g(|z| (|t| - \delta)) e_{-z}(t), \quad t \in \mathbb{R}^n,$$

则当 $z \neq 0$ 时 $\varphi_z \in \mathscr{D}$, $\operatorname{supp} \varphi_z \subset B_{\delta + 2/|z|}(0)$; 当 $|t| < \delta + 1/|z|$ 时 $\varphi_z = e_{-z}$. 令 $K = \bar{B}_{\delta+2}(0)$. 以 r 记 f 的阶, 则由条件(7.1.4)有

$$|f(\varphi)| \leqslant \text{const} \max_{|\alpha| \leqslant r} \| \partial^\alpha \varphi \|_0, \quad \varphi \in \mathscr{D}(K). \tag{7.4.13}$$

当 $|z| \geqslant 1$ 时 $\varphi_z \in \mathscr{D}(K)$, 于是由式(7.4.13)有

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(z)| &= |\langle f, e_{-z} \rangle| = |\langle f, \varphi_z \rangle| \\
&\leqslant \text{const} \max_{|\alpha| \leqslant r} \| \partial_t^\alpha [g(|z| (|t| - \delta) e_{-z}(t))] \|_0 \\
&\leqslant \text{const} \max_{\beta \leqslant \alpha, |\alpha| \leqslant r, |t| \leqslant \delta + 2/|z|} | z^\beta e^{y \cdot t} \partial_t^{\alpha - \beta} g(|z| (|t| - \delta)) |
\end{aligned}$$

$$\leqslant \text{const}\ (1+|z|)^r e^{\delta|y|},$$

其中用了 $y\cdot t\leqslant|y|(\delta+2/|z|)\leqslant\delta|y|+2$. 因 $\hat{f}(z)$ 在 $|z|\leqslant 1$ 内有界,故式(7.4.11)对任何 $z\in\mathbb{C}^n$ 成立.

(ii) 证定理之后半部分. 由式(7.4.12)推出 $h|\mathbb{R}^n$ 是缓增的,因此 $h|\mathbb{R}^n\in\mathscr{S}'$(由推论 7.2.2). 于是有 $f\in\mathscr{S}'$,使得 $\hat{f}=h|\mathbb{R}^n$. 今证 $\operatorname{supp} f\subset\bar{B}_\delta(0)$,这是本证明的难点,颇具技术性.

取 $\mathbb{R}^n$ 上的近似单位 $\theta_k\in\mathscr{D}$,使得 $\operatorname{supp}\theta_k\subset B_{1/k}(0)$. 令 $h_k(z)=\hat{\theta}_k(z)h(z)$,则 $h_k(z)\in H(\mathbb{C}^n)$,$h_k|\mathbb{R}^n=(f*\theta_k)^\wedge$. 取 $m\in\mathbb{N}$ 充分大,由式(7.4.12)有

$$\begin{aligned}|h_k(z)|&\leqslant \text{const}\ (1+|z|)^{-m}(1+|z|)^{m+r}e^{\delta|y|}\ |\hat{\theta}_k(z)|\\&\leqslant \text{const}\ (1+|z|)^{-m}e^{\delta|y|}\sum_{|\alpha|\leqslant m+r}|(\partial^\alpha\theta_k)^\wedge(z)|\\&\leqslant \text{const}\ (1+|z|)^{-m}e^{|y|(\delta+1/k)}\sum_{|\alpha|\leqslant m+r}\|\partial^\alpha\theta_k\|_1\\&\leqslant C_k(1+|z|)^{-m}e^{|y|(\delta+1/k)},\end{aligned}\tag{7.4.14}$$

其中,$C_k>0$ 与 z 无关. 定义

$$g_k(t)=\int h_k(x)e^{ix\cdot t}dx=\hat{h}_k(-t),\quad t\in\mathbb{R}^n.$$

固定 $x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R}$,在 z_1 平面的矩形 $[-a,a]\times[0,y_1]$ 上应用 Cauchy 定理并用不等式(7.4.14),可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}h_k(x)e^{ix\cdot t}dx_1=\int_{-\infty}^{\infty}h_k(z_0)e^{iz_0\cdot t}dx_1,$$

其中,$z_0=(x_1+iy_1,x_2,\cdots,x_n)$. 对每个坐标都如此处理,最终得到

$$g_k(t)=\int h_k(z)e_z(t)dx,\quad t\in\mathbb{R}^n,z\in\mathbb{C}^n.\tag{7.4.15}$$

取 $z=x+i\rho t$,$x,t\in\mathbb{R}^n$,则由式(7.4.14)与式(7.4.15)有

$$|g_k(t)|\leqslant \text{const}\int(1+|x|)^{-m}\exp[\rho|t|(\delta+1/k-|t|)]dx.$$

因此,若 $|t|>\delta+1/k$,则 $|g_k(t)|\to 0(\rho\to\infty)$,这表明 $\operatorname{supp} g_k\subset\bar{B}_{\delta+1/k}(0)$. 可见 $g_k\in\mathscr{E}'\subset\mathscr{S}'$,于是有

$$\begin{aligned}g_k&=(2\pi)^{-n}g_k^{\wedge\wedge\vee}=(2\pi)^{-n}h_k^{\wedge\wedge\vee}=h_k^{\wedge\vee}\\&=(f*\theta_k)^{\wedge\wedge\vee}=(2\pi)^n f*\theta_k.\end{aligned}$$

若 $\varphi\in\mathscr{D}$,$\operatorname{supp}\varphi\cap\bar{B}_\delta(0)=\varnothing$,则当 k 充分大时 $\operatorname{supp}\varphi\cap\operatorname{supp} g_k=\varnothing$,因而有 $\langle g_k,\varphi\rangle=0$. 因 $g_k\to(2\pi)^n f$,故 $f(\varphi)=0$. 这就得出 $\operatorname{supp} f\subset\bar{B}_\delta(0)$.

由已证结论有 $\hat{f}(z)\in H(\mathbb{C}^n)$ 且 $\hat{f}|\mathbb{R}^n=h|\mathbb{R}^n$,于是必 $\hat{f}(z)\equiv h(z)$. □

推论 7.4.1　设 $\varphi\in\mathscr{S}'$,则 $\varphi\in\mathscr{D}$ 的充要条件是 $\hat{\varphi}$ 可扩张为整函数 $\hat{\varphi}(z)(z\in\mathbb{C}^n)$ 且 $\exists\delta>0,\forall k\in\mathbb{N}$,有

$$|\hat{\varphi}(z)| \leqslant \text{const}\ (1+|z|)^{-k}\mathrm{e}^{\delta|y|},\quad x \in \mathbb{C}^n. \tag{7.4.16}$$

证 若 $\varphi \in \mathscr{D}$,则在式(7.4.11)中取 $r=0$ 得 $|\hat{\varphi}(z)| \leqslant \text{const}\ \mathrm{e}^{\delta|y|}$. 以 $\partial^\alpha\varphi$ 代 $\varphi(\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n)$ 可得出式(7.4.16). 反之,若 $\hat{\varphi}(z)$ 是整函数且式(7.4.16)满足,则 supp φ 必为紧集且 $|\hat{\varphi}(x)| \leqslant \text{const}\ (1+|x|)^{-k}(x \in \mathbb{R}^n)$. 于是可用反演公式得

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n}\int \hat{\varphi}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi.$$

由此公式可推出 $\varphi \in C^\infty$,从而 $\varphi \in \mathscr{D}$. □

定理7.4.2之证的最后一步实际上用了以下唯一性结论:

命题7.4.2 设 $f,g \in H(\mathbb{C}^n)$, $f|\mathbb{R}^n = g|\mathbb{R}^n$,则 $f(z) \equiv g(z)$.

证 只要设 $f|\mathbb{R}^n = 0$ 证 $f(z) \equiv 0$. 不妨设 $n=2$(一般情形可归纳证之). 取定 $x_0 \in \mathbb{R}$. 由 $f(x_0,y) \equiv 0(y \in \mathbb{R})$ 与定理4.1.3推出 $f(x_0,z) \equiv 0(z \in \mathbb{C})$. 固定 $z_2 \in \mathbb{C}$,由 $f(x,z_2) \equiv 0(x \in \mathbb{R})$ 推出 $f(z_1,z_2) \equiv 0(z_1 \in \mathbb{C})$. 因此 $f(z) \equiv 0(z \in \mathbb{C}^2)$. □

7.5 Sobolev 空间

广义函数空间 $\mathscr{D}'$(或者 $\mathscr{S}'$, $\mathscr{E}'$)有两个明显的缺陷. 其一是 $\mathscr{D}'$ 中的 LCS 结构只起了很少的作用. 除了有时要用到分布序列的收敛性(这涉及 $\mathscr{D}'$ 中的弱 * 拓扑)之外,几乎不提到空间 $\mathscr{D}'$ 中的拓扑结构. 其二是在 $\mathscr{D}'$ 中并无度量可用,因而不存在对分布作精确估计的问题. 而近代分析学的经验是,唯有 Banach 空间(尤其是 Hilbert 空间)技术才导致最丰富且最深刻的结果. 广义函数空间 $\mathscr{D}'$ 固然庞大得似乎无所不包,但对于培育更精细的分析理论来说,却难以胜任. 这就促使人们提出一个问题:能否在 $\mathscr{D}'$ 的某些子空间上引入自然的 Banach 空间或 Hilbert 空间结构? Sobolev 空间理论对此问题提出了一个令人满意的解答. 值得指出,在历史上,正是 Sobolev 空间概念充当了广义函数论的先导. Sobolev 空间并非某个单独的空间,而是由适当指标区分的一族空间. Sobolev 空间的材料取自广义函数,而其空间结构,则借用了 L^p 空间的构架. 如在3.5节中已提到的,空间 L^p(尤其是 L^2)具有特别良好的结构,其部分优点将被 Sobolev 空间所继承.

设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $m \in \mathbb{Z}$. 令

$$W^{m,p}(\Omega) = \begin{cases} \{f \in \mathscr{D}'(\Omega): |\alpha| \leqslant m \Rightarrow \partial^\alpha f \in L^p\}, & m \geqslant 0, \\ \{f \in \mathscr{D}'(\Omega): f = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant -m} \partial^\alpha f_\alpha, f_\alpha \in L^p\}, & m < 0. \end{cases} \tag{7.5.1}$$

当不必提到 Ω 时,就将 $W^{m,p}(\Omega)$ 简写作 $W^{m,p}$. 当 $m \geqslant 0$ 时显然 $W^{m,p} \subset L^p$,此时空间 $W^{m,p}$ 并不含真正的广义函数,但式(7.5.1)中的导数 $\partial^\alpha f$ 却是分布意义上的,因而对于空间的描述仍然离不开广义函数. 若 $m<0$,则 $W^{m,p}$ 含有 $|m|$ 阶广义函数. 空间的"正则性"随 m 增大而上升,所形成的空间链可表达为(设 $m>r>0$)

$$W^{m,p} \subset W^{r,p} \subset W^{0,p} = L^p \subset W^{-r,p} \subset W^{-m,p} \subset \mathscr{D}_F'. \tag{7.5.2}$$

现在引入空间 $W^{m,p}$ 中的 Banach 空间结构. 首先设 $m \geqslant 0$, k 是满足 $|\alpha| \leqslant m$ 的 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ 的个数,则线性单射

$$W^{m,p} \to (L^p)^k, \quad f \to (\partial^\alpha f)_{|\alpha| \leqslant m} \tag{7.5.3}$$

在 $W^{m,p}$ 中诱导出一个赋范空间结构,使得映射(7.5.3)成为一个等距嵌入,这意味着在 $W^{m,p}$ 中使用范数

$$\|f\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha f\|_p^p \right)^{1/p}. \tag{7.5.4}$$

当 $p = \infty$ 时自动地理解式(7.5.4) 为

$$\|f\|_{m,\infty} = \max_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha f\|_\infty,$$

今后保持这一约定而不另作说明. 空间 $W^{m,p}$ 中的范数收敛可刻画为

$$f_k \to 0 \Leftrightarrow \partial^\alpha f_k \xrightarrow{L^p} 0, \ |\alpha| \leqslant m.$$

若 $\{f_k\} \subset W^{m,p}$, $\partial^\alpha f_k \xrightarrow{L^p} f_\alpha (|\alpha| \leqslant m)$, 令 $f = f_0$, 则在 $\mathscr{D}'$ 中 $f_k \to f$, $\partial^\alpha f_k \to \partial^\alpha f = f_\alpha$ (用包含 $L^p \subset \mathscr{D}'$ 及微分运算的连续性),这就推出 $f \in W^{m,p}$ 且 $\|f_k - f\|_{m,p} \to 0 (k \to \infty)$. 可见, $W^{m,p}$ 是 $(L^p)^k$ 的闭子空间,因而是一个 Banach 空间. 特别地, $W^{m,2}$ 是一个 Hilbert 空间,通常将其写作 H^m 或 $H^m(\Omega)$,其中, 内积表为

$$\langle f, g \rangle_m = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \langle \partial^\alpha f, \partial^\alpha g \rangle_0, \tag{7.5.5}$$

此处 $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ 表 $L^2(\Omega)$ 中的内积.

至于 $m < 0$ 的情况,则依赖于如下结论:

引理 7.5.1　设 $1 \leqslant p = q/(q-1) < \infty$, $m > 0$, $W_0^{m,p}$ 记 $\mathscr{D}$ 在空间 $W^{m,p}$ 中的闭包,则有自然的线性同构 $(W_0^{m,p})' \cong W^{-m,q}$.

证　任给 $f \in W^{-m,q}$, 设 $f = \sum \partial^\alpha f_\alpha$, $f_\alpha \in L^q (|\alpha| \leqslant m)$. $\forall \varphi \in \mathscr{D}$, 有

$$|f(\varphi)| = \left| \sum_\alpha \langle \partial^\alpha f_\alpha, \varphi \rangle \right| \leqslant \sum_\alpha |\langle f_\alpha, \partial^\alpha \varphi \rangle|$$

$$\leqslant \sum_\alpha \|f_\alpha\|_q \|\partial^\alpha \varphi\|_p \leqslant \|\varphi\|_{m,p} \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|f_\alpha\|_q^q \right)^{1/q}.$$

由定理 1.5.3, f 可唯一地扩张为 $W_0^{m,p}$ 上的有界线性泛函.

反之,任给 $f \in (W_0^{m,p})'$, 由 Hahn-Banach 空间与定理 3.5.2, 可认为 $f \in [(L^p)^k]' \cong (L^q)^k$. 于是有 $f_\alpha \in L^q (|\alpha| \leqslant m)$, 使得

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_\alpha \langle f_\alpha, \partial^\alpha \varphi \rangle = \sum_\alpha \langle (-\partial)^\alpha f_\alpha, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathscr{D},$$

因而 $f = \sum (-\partial)^\alpha f_\alpha \in W^{-m,q}$.

综上,知 $(W_0^{m,p})' \to W^{-m,q}$, $f \to f|\mathscr{D}$ 是一线性同构.　　□

引理 7.5.1 所确立的线性同构在 $W^{-m,q}$ 中唯一地决定一 Banach 空间结构,使得该同构成为等距同构. 或者干脆等同空间 $W^{-m,q}$ 与 $(W_0^{m,p})'$,不妨认为 $W^{-m,q}$ 就是 $W_0^{m,p}$ 的对偶空间. 通写将 $W_0^{m,2}$ 写作 H_0^m 或 $H_0^m(\Omega)$,$W^{-m,2}$ 写作 H^{-m} 或 $H^{-m}(\Omega)$. 因此有 $H^{-m} = (H_0^m)'(m > 0)$.

以上讨论表明,原则上只需考虑空间 $W^{m,p}(m \geqslant 0)$, 而空间 $W^{m,p}$ 又完全可用空间 L^p 来描述,这正是 Sobolev 空间族 $W^{m,p}$ 的一大优势. 空间 $W^{m,p}$ 继承了空间 L^p 的一系列性质,一个最明显的例子是当 $1 < p < \infty$ 时,$W^{m,p}$(注意它是$(L^p)^k$ 的闭子空间) 如同 L^p 一样是自反空间. 如我们已强调的,在 Banach 空间理论中自反空间有明显的优势. 此外,由定理 3.5.1 与定理 6.3.6 所描述的 L^p 空间的那些逼近性质,对于空间 $W^{m,p}$ 亦有适当的推广,这在下面就要考虑. 另一方面,与一般的空间 L^p 不同,在空间 $W^{m,p}$ 中可施行微分运算,而且 $W^{m,p}$ 中的依范数逼近也涉及导数的逼近, 这就在一定意义上吸收了 2.2 节中那些空间 (如 $\mathscr{E}^r(D)$) 的优点. 可以说,这是 Sobolev 空间族 $W^{m,p}$ 的另一大优势.

下面的结果可看成定理 6.3.6(i)的某种推广.

定理 7.5.1 设 $1 \leqslant p < \infty, m \in \mathbb{N}$,则以下结论成立:

(i) $\mathscr{D}(\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega) \cap \mathscr{E}'$ 中稠密;

(ii) $C^\infty(\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中稠密;

(iii) $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 在 $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ 中稠密,因此 $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$,

$$W^{-m,q}(\mathbb{R}^n) = (W^{m,p}(\mathbb{R}^n))', \quad q = p/(p-1).$$

证 (i) 设 $f \in W^{m,p}(\Omega) \cap \mathscr{E}'$. 取 C^∞ 近似单位 θ_k,使 $\operatorname{supp} \theta_k \subset B_{1/k}(0)$,则 $f_k \triangleq f * \theta_k \in C^\infty$,因而当 k 充分大时 $f_k \in \mathscr{D}(\Omega)$(由定理6.2.3 与引理6.2.2). 其次由定理 6.3.1 有 $\partial^\alpha f_k \xrightarrow{L^p} \partial^\alpha f(k \to \infty, |\alpha| \leqslant m)$,这表明在 $W^{m,p}$ 中 $f_k \to f$.

(ii) 设 $f \in W^{m,p}(\Omega)$. 取局部有限开集族$\{U_i\}$,使得 $\Omega = \cup U_i$ 且 $\bar{U}_i \subset \Omega$. 取 Ω 上从属于$\{U_i\}$ 的 C^∞ 单位分解$\{\lambda_i\}$(由定理 7.1.3). 令 $f_i = \lambda_i f$, 则 $f = \sum f_i, f_i \in W^{m,p} \cap \mathscr{E}'(U_i)$. $\forall \varepsilon > 0$,取 $g_i \in \mathscr{D}(U_i)$,使 $\|f_i - g_i\|_{m,p} < \varepsilon 2^{-i}$,则 $g \triangleq \sum g_i \in C^\infty(\Omega)$,

$$\|f - g\|_{m,p} \leqslant \sum_i \|f_i - g_i\|_{m,p} < \varepsilon.$$

(iii) 设 $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$,只要证有$\{f_k\} \subset W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \cap \mathscr{E}'$,使 $\|f_k - f\|_{m,p} \to 0$. 取 $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$,使 $B_1(0) < \varphi < B_2(0)$. 令 $\varphi_k(x) = \varphi(x/k), f_k = f\varphi_k$,则

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha(f_k - f)\|_p &\leqslant \|\partial^\alpha f_k - \varphi_k \partial^\alpha f\|_p + \|(1 - \varphi_k)\partial^\alpha f\|_p \\ &\triangleq I_1 + I_2, \quad |\alpha| \leqslant m, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &\leqslant \text{const} \sum_{\beta \leqslant \alpha \neq \beta} \|\partial^{\alpha-\beta}\varphi_k \partial^\beta f\|_p \\ &\leqslant \text{const} \sum_{|\beta| \leqslant m} \left[\int_{|x| > k} |\partial^\beta f|^p \mathrm{d}x\right]^{1/p} \to 0, \quad k \to \infty, \end{aligned}$$

$$I_2 \leqslant \left[\int_{|x|>k} |\partial^\alpha f|^p \mathrm{d}x\right]^{1/p} \to 0, \quad k \to \infty.$$

这得出 $\|f_k - f\|_{m,p} \to 0$,如所要证. □

利用定理7.5.1(ii),可将空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 重新定义如下:任给$f \in C^\infty(\Omega)$,由式(7.5.4) 定义 $\|f\|_{m,p}$,令

$$X_{m,p} = \{f \in C^\infty(\Omega): \|f\|_{m,p} < \infty\},$$

则 $X_{m,p}$ 是一个赋范空间,然后将 $W^{m,p}(\Omega)$ 定义为空间 $X_{m,p}$ 的完备化. 这一定义完全不涉及广义函数概念. 不过,回避广义函数并不可取,因而宁可使用由式(7.5.1)的定义.

定理 7.5.2　若 Ω 有界,则对 $f \in H_0^m(\Omega)$ 成立如下的 **Poincáre 不等式**:

$$\|f\|_{m,2}^2 \leqslant \text{const} \sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha f\|_2^2. \tag{7.5.6}$$

证　只需对 $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ 证式(7.5.6). 为此又只需证 $\forall \beta \in \mathbb{Z}_+^n$,若 $|\beta| < m$, $\alpha = (\beta_1 + 1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$,则

$$\|\partial^\beta f\|_2^2 \leqslant \text{const} \ \|\partial^\alpha f\|_2^2.$$

取 $a > 0$,使 $\Omega \subset (-a, a)^n \triangleq \Gamma$,则

$$\begin{aligned}
\|\partial^\beta f\|_2^2 &= \int_\Omega |\partial^\beta f(x)|^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_\Gamma \left| \int_{-a}^{x_1} \partial^\alpha f(t, x_2, \cdots, x_n) \mathrm{d}t \right|^2 \mathrm{d}x \\
&\leqslant 2a \int_\Gamma \mathrm{d}x \int_{-a}^{a} |\partial^\alpha f(t, x_2, \cdots, x_n)|^2 \mathrm{d}t \\
&= (2a)^2 \int_\Gamma |\partial^\alpha f(x)|^2 \mathrm{d}x = \text{const} \ \|\partial^\alpha f\|_2^2.
\end{aligned}$$ □

Poincáre 不等式的意义在于,在 Ω 有界的情况下,在 $H_0^m(\Omega)$ 中可使用如下简化的等价范数:

$$\|f\|_{(m)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha f\|_2^2 \right)^{1/2}. \tag{7.5.7}$$

通常在 $H_0^m(\Omega)$ 中不加说明地使用范数(7.5.7)且就写作 $\|f\|_m$, 当 $m = 1$ 时, 有

$$\|f\|_1 = \left(\int_\Omega |\nabla f(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2}. \tag{7.5.8}$$

下面设 $\Omega = \mathbb{R}^n, p = 2$. 在这种情况下,对于空间族 $H^m(\mathbb{R}^n)$ 可作一重大扩充,即以实参数 s 取代整参数 m. 令

$$\mathrm{d}\mu_s = (1 + |x|^2)^s \mathrm{d}x, \quad s \in \mathbb{R}, \tag{7.5.9}$$

其中, $\mathrm{d}x$ 表 n 维 Lebesgue 测度. 显然 μ_s 是$\mathbb{R}^n$ 上的正测度. 令

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : \hat{f} \in L^2(\mu_s)\}, \tag{7.5.10}$$

其中，$L^2(\mu_s) = L^2(\mathbb{R}^n, \mu_s)$. 下面以 H^s 记 $H^s(\mathbb{R}^n)$，$\mathscr{S}, \mathscr{S}'$ 等类似. 直接看出

$$H^s \to L^2(\mu_s), \quad f \to \hat{f}$$

是一线性同构，它在 H^s 中诱导出一个 Hilbert 空间结构，使得以上同构成为等距同构. 这意味着，在空间 H^s 中使用范数

$$\|f\|_s = \left(\int |\hat{f}|^2 \mathrm{d}\mu_s\right)^{1/2} \tag{7.5.11}$$

与内积

$$\langle f, g\rangle_s = \int \hat{f}\,\overline{\hat{g}}\,\mathrm{d}\,\mu_s. \tag{7.5.12}$$

在 H^s 中 $f_k \to 0 \Leftrightarrow$ 在 $L^2(\mu_s)$ 中 $\hat{f}_k \to 0 \Leftrightarrow (1+|x|^2)^{s/2}\hat{f}_k \xrightarrow{L^2} 0 (k\to\infty)$. 因为函数 $(1+|x|^2)^s$ 关于 s 单调增，故 H^s 形成如下空间链：

$$H^\infty \subset H^r \subset H^s \subset H^0 = L^2 \subset H^{-s} \subset H^{-r} \subset H^{-\infty}, \tag{7.5.13}$$

其中，$0 < s < r < \infty$，$H^\infty = \bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s$，$H^{-\infty} = \bigcup_{s\in\mathbb{R}} H^s$. 式(7.5.13)中的包含均是连续的(当然不考虑 $H^{\pm\infty}$)，若 $-\infty < s < t < \infty$，则 $\mathscr{S}$ 与 H^t 均为 H^s 的稠密子集. 若 $m \in \mathbb{Z}_+$，则 $f \in W^{m,2} \Leftrightarrow \partial^\alpha f \in L^2(|\alpha| \leqslant m) \Leftrightarrow \xi^\alpha \hat{f}(\xi) \in L^2(|\alpha| \leqslant m) \Leftrightarrow \hat{f} \in L^2(\mu_m) \Leftrightarrow f \in H^m$，可见 $W^{m,2}(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n)$. 也易看出当 $s = m, p = 2$ 时范数(7.5.11)与范数(7.5.4)等价. 当 $m < 0$ 时对空间 $W^{m,2}(\mathbb{R}^n)$ 亦可作类似的结论. 因此，可以认为空间族 $\{H^s(\mathbb{R}^n) : s \in \mathbb{R}\}$ 正是空间列 $\{H^m(\mathbb{R}^n) : m \in \mathbb{Z}\}$ 的扩充.

空间族 $\{H^s : s \in \mathbb{R}\}$ 中的诸空间往往需要互相转换，这种转换常通过某些标准的连续线性算子来实现，卷积算子与微分算子就能起这种作用.

下面用到的乘子空间 $\mathscr{O}_M$ 与 $\mathscr{O}_C'$ 分别依式(7.2.5)与定义 7.3.1.

定理 7.5.3 (i) 卷积算子. 设 $\varphi \in \mathscr{O}_M$，$0 < A \leqslant |\varphi(x)||x|^{-a} \leqslant B < \infty$，$\Lambda_\varphi = \hat{\varphi} *$，则 $\Lambda_\varphi \in L(H^s, H^{s-a})$. 若 $\inf|\varphi(x)| > 0$，则 $1/\varphi \in \mathscr{O}_M$，$\Lambda_{1/\varphi} = (2\pi)^{2n}\Lambda_\varphi^{-1} \in L(H^{s-a}, H^s)$. 若 $\varphi = (1+|x|^2)^{a/2}$，$\Lambda_a = \Lambda_\varphi$，则 $\Lambda_a : H^s \cong H^{s-a}$(等距同构). 特别地，$\Lambda_{2s} : H^s \cong H^{-s}$，

$$\|f\|_s = \sup_{0\neq g\in H^{-s}} \frac{|\langle f, g\rangle_0|}{\|g\|_{-s}}, \quad f \in H^s; \tag{7.5.14}$$

(ii) 微分算子. 设 $P = \sum_{|\alpha|\leqslant r} a_\alpha(x) \mathrm{D}^\alpha$，$a_\alpha(x) \in \mathscr{S}$，则 $P \in L(H^s, H^{s-r})$. 特别地，$\forall \varphi \in \mathscr{S}$，$H^s \to H^s$，$f \to \varphi f$ 是连续线性算子.

证 (i) 由引理 7.4.1 有 $\hat{\varphi} \in \mathscr{O}_C'$. $\forall f \in H^s$，有

$$\|\Lambda_\varphi f\|_{s-a}^2 = \int |(\hat{\varphi} * f)^\wedge|^2 \mathrm{d}\mu_{s-a} = (2\pi)^{2n}\int |\check{\hat{\varphi}}\hat{f}|^2 \mathrm{d}\mu_{s-a}$$

$$\leqslant \text{const } \|f\|_s^2,$$

其中用到定理 7.4.1 与反演公式. 这表明 $\Lambda_{\varphi} \in L(H^s, H^{s-a})$. 若 $\inf|\varphi(x)|>0$,则由 $|\varphi(x)|^{-1}|x|^{\alpha} \leqslant A^{-1}<\infty$ 推出 $\Lambda_{1/\varphi} \in L(H^{s-a}, H^s)$. $\forall f \in H^{-\infty}$,重复用定理 7.4.1 可验证 $((f*(1/\varphi)^{\wedge})*\hat{\varphi})^{\wedge}=(2\pi)^{2n}\check{f}$, 这得出 $\Lambda_{\varphi}\Lambda_{1/\varphi}f=(2\pi)^{2n}f$. 同理, $\Lambda_{1/\varphi}\Lambda_{\varphi}f=(2\pi)^{2n}f$,故得 $\Lambda_{1/\varphi}=(2\pi)^{2n}\Lambda_{\varphi}^{-1}$. 余下的结论是明显的.

(ii) 只要考虑以下两种特殊情况. 若 $P=\mathrm{D}^{\alpha}$, $|\alpha| \leqslant r$,则对 $f \in H^s$ 有

$$\|\mathrm{D}^{\alpha}f\|_{s-r}^{2}=\int|\xi^{\alpha}\hat{f}|^{2}\mathrm{d}\mu_{s-r} \leqslant \|f\|_{s}^{2}.$$

若 $\varphi \in \mathscr{S}$,则对 $f \in H^s$ 有

$$\begin{aligned}
\|\varphi f\|_{s}^{2} &= \int|(\varphi f)^{\wedge}|^{2}\mathrm{d}\mu_{s}=(2\pi)^{-2n}\int|\hat{f}*\hat{\varphi}|^{2}\mathrm{d}\mu_{s} \\
&= (2\pi)^{-2n}\int\left|\int\hat{f}(y)\hat{\varphi}(x-y)\mathrm{d}y\right|^{2}\mathrm{d}\mu_{s}(x) \\
&\leqslant \mathrm{const}\int\left[\int\hat{f}(y)|(1+|x-y|^{2})^{-k}\mathrm{d}y\right]^{2}\mathrm{d}\mu_{s}(x) \quad (k>0\text{ 充分大}) \\
&\leqslant \mathrm{const}\int\mathrm{d}\mu_{s}(x)\int(1+|x-y|^{2})^{-k}\mathrm{d}y\int|\hat{f}(y)|^{2}(1+|x-y|^{2})^{-k}\mathrm{d}y \\
&\leqslant \mathrm{const}\int\mathrm{d}\mu_{s}(x)\int|\hat{f}(y)|^{2}(1+|x-y|^{2})^{-k}\mathrm{d}y \\
&= \mathrm{const}\int\mathrm{d}\mu_{s}(x)\int|\hat{f}(y)|^{2}(1+|x-y|^{2})^{-k}(1+|y|^{2})^{-s}\mathrm{d}\mu_{s}(y) \\
&\leqslant \mathrm{const}\int\mathrm{d}x\int|\hat{f}(y)|^{2}(1+|x-y|^{2})^{|s|-k}\mathrm{d}\mu_{s}(y) \qquad (*) \\
&\leqslant \mathrm{const}\int|\hat{f}(y)|^{2}\mathrm{d}\mu_{s}(y)=\mathrm{const}\ \|f\|_{s}^{2},
\end{aligned}$$

其中, 关键的步骤是得出式(*)时用了所谓 **Peetre 不等式**: $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}$,有

$$(1+|x|^{2})^{s}(1+|y|^{2})^{-s} \leqslant 2^{|s|}(1+|x-y|^{2})^{|s|}. \tag{7.5.15}$$

式(7.5.15)可用初等方法证明. 于是 $H^s \to H^s$, $f \to \varphi f$ 是连续线性算子. □

式(7.5.13)表明,空间 H^s 随 s 上升而缩小,因而可以期望, s 越大, H^s 中的函数有越高的正则性. 下面的嵌入定理给出了一个准确的结论.

定理 7.5.4　设 $r \in \mathbb{Z}_+$, $s>r+n/2$,

$$C_0^r(\mathbb{R}^n)=\{f \in C^r(\mathbb{R}^n): \partial^{\alpha}f \in C_0(\mathbb{R}^n), |\alpha| \leqslant r\}, \tag{7.5.16}$$

在 $C_0^r(\mathbb{R}^n)$ 中使用范数(见式(2.2.16))

$$\|f\|_{(r)}=\max_{|\alpha| \leqslant r}\|\partial^{\alpha}f\|_{0}, \tag{7.5.17}$$

则有连续的包含 $H^s \subset C_0^r(\mathbb{R}^n)$. 因此, $H^{\infty} \subset C^{\infty}$.

证　设 $f \in H^s$, $|\alpha| \leqslant r$,则 $\partial^{\alpha}f \in H^{s-r} \subset L^2$(由定理 7.5.3),

$$\|\partial^{\alpha}f\|_{\infty}=(2\pi)^{-n}\|(\partial^{\alpha}f)^{\wedge\wedge}\|_{\infty} \leqslant \mathrm{const}\ \|(\partial^{\alpha}f)^{\wedge}\|_{1}$$

$$= \text{const} \ \|\xi^\alpha \hat{f}\|_1 \leqslant \text{const} \int |\hat{f}(\xi)| |\xi|^r \mathrm{d}\xi$$

$$\leqslant \text{const} \ \|f\|_s \left(\int (1+|\xi|^2)^{r-s} \mathrm{d}\xi\right)^{1/2}$$

$$= \text{const} \ \|f\|_s. \tag{7.5.18}$$

由此可归纳地推出存在 $f_0 \in C^r$ 使 $\partial^\alpha f = \partial^\alpha f_0$, a.e. $(|\alpha| \leqslant r)$. 由 $\partial^\alpha f_0 = (2\pi)^{-n}(\partial^\alpha f_0)^{\vee\wedge\wedge} \in C_0(\mathbb{R}^n)$ 得 $f_0 \in C_0^r(\mathbb{R}^n)$. 由不等式(7.5.18)得出

$$\|f_0\|_{(r)} \leqslant \text{const} \ \|f\|_s,$$

因此包含 $H^s \subset C_0^r(\mathbb{R}^n)$ 连续. □

为能局部地使用空间族 H^s, 引入记号

$$H_{\text{loc}}^s(\Omega) = \{f \in \mathscr{D}'(\Omega): \text{任给有界开集 } V, \bar{V} \subset \Omega, \text{存在}$$
$$g \in H^s, \text{使得} f|V = g|V\}. \tag{7.5.19}$$

引理 7.5.2 设 $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$, 则 $f \in H_{\text{loc}}^s(\Omega) \Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, 有 $\varphi f \in H^s$.

证 设 $f \in H_{\text{loc}}^s(\Omega)$, $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, 则存在 $g \in H^s$, 使得在 supp φ 的某个邻域上 f 与 g 相等, 因而 $\varphi f = \varphi g \in H^s$ (由定理 7.5.3(ii)).

其次设 $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\varphi f \in H^s$, V 是有界开集, $\bar{V} \subset \Omega$. 取 $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, 使 $\bar{V} < \varphi$, 则 $g \triangleq \varphi f \in H^s$, 在 V 上 $f = g$, 因而 $f \in H_{\text{loc}}^s(\Omega)$. □

设 $P(D)$ 是 m 阶常系数微分算子, 以 $P_m(x)$ 记 $P(x)$ 的所有 m 次项之和. 若当 $x \neq 0$ 时 $P_m(x) \neq 0$, 则说 $P(\mathrm{D})$ 是椭圆算子. 因 $P_m(x)$ 是 m 次齐次的, 易见 $P(\mathrm{D})$ 是椭圆的 $\Leftrightarrow |P_m(x)| \geqslant C|x|^m (0 < C = \text{const}) \Leftrightarrow |P(x)| \geqslant C|x|^m (|x| \geqslant R = \text{const})$.

下面是关于椭圆算子的一个基本结果.

定理 7.5.5 设 $A = P(\mathrm{D})$ 是 m 阶常系数的椭圆微分算子, $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $Au \in H_{\text{loc}}^s(\Omega)$, 则 $u \in H_{\text{loc}}^{s+m}(\Omega)$. 因此, 若 $Au \in C^\infty$, 则 $u \in C^\infty$.

证 (i) 设 $u, Au \in H^s$, 今证 $u \in H^{s+m}$. 由 $\hat{u} \in L^2(\mu_s)$, $P\hat{u} \in L^2(\mu_s)$ 推出

$$|\hat{u}|^2(1+|\xi|^2)^{s+m} \leqslant \text{const} \ |\hat{u}|^2(1+|\xi|^2)^s[1+|P(\xi)|^2] \in L^1,$$

这正表明 $u \in H^{s+m}$.

(ii) 设 $\varphi \in \mathscr{D}$, $f \in H^s$, 则 $A(\varphi f) - \varphi Af \in H^{s-m+1}$. 只要说明 $B \triangleq A\varphi - \varphi A$ 是 $m-1$ 阶微分算子. 不妨设 $A = \partial^\alpha$, $|\alpha| = m$, 则

$$\partial^\alpha(\varphi f) - \varphi \partial^\alpha f = \sum_{0 \neq \beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta \varphi \partial^{\alpha-\beta} f,$$

由此看出 B 是 $m-1$ 阶微分算子.

(iii) 取定 $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, 今证 $\varphi u \in H^{s+m}$ (由此应用引理 7.5.4, 即得 $u \in H_{\text{loc}}^{s+m}(\Omega)$). 取有界开集 V, 使 supp $\varphi \subset V$, $\bar{V} \subset \Omega$. 取 $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$, 使 $\psi | V = 1$. 结合定理 7.2.3 与定理 7.5.3 得出 $\mathscr{E}' \subset H^{-\infty}$, 这推出 $\psi u \in H^t$, $t \in \mathbb{R}$, 可设 $k \triangleq s + m -$

$t \in \mathbb{N}$. 选取 $\psi = \psi_0, \psi_1, \cdots, \psi_k = \varphi$, 使得 $\psi_j \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\psi_{j-1} \mid \operatorname{supp} \psi_j = 1 (1 \leqslant j \leqslant k)$. 今归纳地说明 $\psi_j u \in H^{t+j}$(如此则有 $\varphi u = \psi_k u \in H^{s+m}$). 首先有 $\psi_0 u = \psi u \in H^t$. 设已知 $\psi_j u \in H^{t+j} (0 \leqslant j < k)$, 今证 $\psi_{j+1} u \in H^{t+j+1}$. 由(i), 只要证 $\psi_{j+1} u, A(\psi_{j+1} u) \in H^{t+j+1-m}$. 首先, $\psi_{j+1} u = \psi_{j+1} \psi_j u \in H^{t+j} \subset H^{t+j+1-m}$. 其次

$$\begin{aligned} A(\psi_{j+1} u) &= [A(\psi_{j+1} u) - \psi_{j+1} A u] + \psi_{j+1} A u \\ &= (A \psi_{j+1} - \psi_{j+1} A)(\psi_j u) + \psi_{j+1} A u \\ &\in H^{t+j-m+1} + H^s \subset H^{t+j+1-m}, \end{aligned}$$

其中用了引理 7.5.2. 如所要证.

(iv) 设 $Au \in C^\infty$, 任取 $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}$. 于是 $\varphi Au \in H^s$, 从而 $Au \in H^s_{\text{loc}}(\Omega)$, $u \in H^{s+m}_{\text{loc}}(\Omega)$, $\varphi u \in H^{s+m}$, 这推出 $\varphi u \in H^\infty \subset C^\infty$, 因而 $u \in C^\infty$. □

最常用的椭圆微分算子是 Laplact 算子 Δ 与 $P = \partial_1 + \mathrm{i}\partial_2$. 将定理 7.5.5 用到 Δ 与 $\partial_1 + \mathrm{i}\partial_2$ 得到

推论 7.5.1 若 $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $\Delta u = f \in C^\infty$ (特别若 $\Delta u = 0$), 则 $u \in C^\infty(\Omega)$. 若 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $u_x + \mathrm{i} u_y = 2\partial u / \partial \bar{z} = 0$, 则 $u \in C^\infty(\Omega)$ (即解析函数必无限次可微).

7.6 对偏微分方程的应用

本章开头曾提到, Sobolev 关于偏微分方程广义解的研究, 是广义函数论的重要渊源. 偏微分方程论成为广义函数论的主要受益领域, 是非常自然的. 在近代偏微分方程理论中, 广义函数的使用已成为一种常规手段, 而且已形成系统的方法. 因此, 说到广义函数对于偏微分方程论的应用, 举几个孤立的例子远不足以了解全面的情况. 然而, 本节却只能涉及少数例子, 而且还是比较简单的. 不过, 我们的目的仅在于说明, 在偏微分方程理论中广义函数何以能发挥作用. 虽然所用材料极其有限, 但其所体现的思想仍然不失普遍价值, 而这正是我们要强调的.

设 $A = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) \mathrm{D}^\alpha$ 是形如(7.2.3) 的线性微分算子, 其中, $m \geqslant 1$ 且至少有一个 $a_\alpha(x) \neq 0$, $|\alpha| = m$, 这意味着 A 是一个真正的 m 阶微分算子. 给定 $f \in \mathscr{D}' = \mathscr{D}'(\Omega)$, 考虑 m 阶线性偏微分方程

$$Au = f. \tag{7.6.1}$$

说到方程(7.6.1)的解 u 时, 通常可区分如下 3 种情况:

(i) 古典解, 这意味着 u 足够光滑, $\mathrm{D}^\alpha u (|\alpha| \leqslant m)$ 是通常的导数;

(ii) 弱解, u 是普通函数但不够光滑, 因而 $\mathrm{D}^\alpha u$ 看成分布导数[①];

---

① 有时为选择工具的方便, 对 u 作适当限定, 如限定 $u, f \in L^2$.

(iii) 分布解,这意味着 $u \in \mathscr{D}'$ 不是普通函数.

通常依适当途径获得方程(7.6.1)的一个解 $u \in \mathscr{D}'$,但并不能预先确知其正则性,因而称其为广义解. 当然,人们希望且力图证明 u 实际上是一个古典解. 不过,即使是非古典解,亦不失其理论与应用价值.

先从两个最简单的例子获得一点直观印象.

例 7.6.1 (i) 给定 $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$,考虑关于未知函数 u 的一阶线性方程

$$u' = f. \tag{7.6.2}$$

任给 $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$,令 $a_\varphi = \langle 1,\varphi\rangle$, 取 $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$,使 $a_\psi = 1$. 定义 $S\varphi = \varphi - a_\varphi\psi$, $T\varphi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. 直接验知 $a_{S\varphi} = 0, TS\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. 定义

$$u(\varphi) = a_\varphi - f(TS\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}),$$

则易见 $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. 任给 $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$,由 $a_{\varphi'} = 0$ 有

$$-u(\varphi') = f(TS\varphi') = f(T\varphi') = f(\varphi),$$

这表明 $u' = f$. 若 $u_i' = f(i = 1,2)$, $v = u_1 - u_2$,则 $v' = 0$,

$$\begin{aligned} v(\varphi) &= v(a_\varphi\psi) + v(S\varphi) = v(a_\varphi\psi) + \langle v,(TS\varphi)'\rangle \\ &= a_\varphi v(\psi) - \langle v',TS\varphi\rangle = \langle c,\varphi\rangle, \end{aligned}$$

这得 $v = c = v(\psi)$. 因此,方程(7.6.2) 有无穷多解,其通解为 $u + \text{const}, u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ 是方程(7.6.2)的任一解.

(ii) 给定常数 a, 考虑一阶线性方程

$$u' + au = 0. \tag{7.6.3}$$

作代换 $u = v\mathrm{e}^{-ax}$ 将方程(7.6.3)化为 $v' = 0$. 由(i)得 $v = c$,从而 $u = c\mathrm{e}^{-ax}$,c 是任意常数. 这与常微分方程论中的熟知结论一致.

(iii) 考虑一阶线性方程

$$xu' = 1. \tag{7.6.4}$$

设 $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ 是方程(7.6.4)的解,令

$$v = u - c_1 - cH(x) - \ln|x|,$$

其中, c, c_1 为任意常数, $H(x)$ 是 Heaviside 函数, 则由例 7.2.1(i)(iii)(v)(vi)有

$$xv' = 1 - cx\delta(x) - x\mathrm{P}\cdot(x^{-1}) = 0.$$

由类似于讨论方程(7.6.3)的方法可以说明, v 在区间$(-\infty,0)$ 与$(0,\infty)$ 内均为常数,不妨设 $x \neq 0$ 时 $v(x) = 0$(否则适当调整常数 c 与 c_1). 于是 $\operatorname{supp} v \subset \{0\}$. 由定理 7.2.6,有 $v = \sum_0^m \alpha_i\delta^{(i)}$. $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$,有

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x\, v',\varphi\rangle = \left\langle \sum_i \alpha_i\delta^{(i+1)}, x\,\varphi\right\rangle \\ &= \sum_i \alpha_i\langle \delta^{i+1}, x\,\varphi\rangle = \sum_i \alpha_i(-1)^{i+1}\langle \delta,(x\,\varphi)^{(i+1)}\rangle \end{aligned}$$

$$= \sum_i \alpha_i(-1)^{i+1}(i+1)\varphi^{(i)}(0).$$

由 φ 的任意性,必得 $\alpha_i = 0(0 \leqslant i \leqslant m)$,因而 $v = 0$. 这就得到方程(7.6.4)的通解为 $u = c_1 + cH(x) + \ln|x|$. 这个解并不是$\mathbb{R}$上的可微函数,因此它是弱解.

对于一般的方程(7.6.1),可建立如下弱解存在性判别法:

定理 7.6.1　设 $a_\alpha(x) \in C^m(\Omega)(|\alpha| \leqslant m)$,$f \in L^2(\Omega)$,$A^*$ 是微分算子 A 的形式对偶(见式(7.2.4)),则方程(7.6.1)存在弱解 $u \in L^2(\Omega)$ 的充要条件是

$$|\langle f,\varphi\rangle| \leqslant \text{const}\ \|A^*\varphi\|_2, \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega). \tag{7.6.5}$$

证　若 $u \in L^2(\Omega)$ 是方程(7.6.1)的弱解,则 $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$,有

$$\begin{aligned}|\langle f,\varphi\rangle| &= |\langle Au,\varphi\rangle| = |\langle u,A^*\varphi\rangle| \\ &\leqslant \|u\|_2\|A^*\varphi\|_2 = \text{const}\ \|A^*\varphi\|_2.\end{aligned}$$

反之,设条件(7.6.5)满足,定义

$$T(A^*\varphi) = \langle f,\varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

若 $\varphi,\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$,$A^*\varphi = A^*\psi$,则

$$|\langle f,\varphi-\psi\rangle| \leqslant \text{const}\ \|A^*(\varphi-\psi)\|_2 = 0,$$

因而$f(\varphi) = f(\psi)$. 这表明 $T(A^*\varphi)$ 唯一地决定于 $A^*\varphi$. 条件(7.6.5)表明 T 是 $L^2(\Omega)$ 的某子空间上的有界线性泛函. 由 Hahn-Banach 定理,可设 $T \in L^2(\Omega)^*$. 由 Riesz 表示定理,有 $u \in L^2(\Omega)$,使得

$$\langle f,\varphi\rangle = T(A^*\varphi) = \langle u,A^*\varphi\rangle = \langle Au,\varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

最后一步依式(7.2.2). 这表明 $Au = f$,即 u 是方程(7.6.1)的弱解. □

对于常系数线性偏微分方程,结果更为明确.

定理 7.6.2　设 Ω 是有界区域,$a_\alpha(x) \equiv a_\alpha$,$f \in L^2(\Omega)$,则方程(7.6.1)必存在弱解.

现在设 $P(\mathrm{D}) = \sum a_\alpha \mathrm{D}^\alpha$ 是 m 阶($m \geqslant 1$)常系数线性微分算子,考虑特殊的线性偏微分方程

$$P(\mathrm{D})u = \delta. \tag{7.6.6}$$

定义 7.6.1　若 $u = E \in \mathscr{D}'$ 满足方程(7.6.6),则称 E 为微分算子 $P(\mathrm{D})$ 的**基本解**.

方程(7.6.6)并不像一个常见的偏微分方程,现在突出地提出它的解,初看起来几乎不可思议. 但如下的简单分析会立即显示出基本解的重大意义:设 E 是 $P(\mathrm{D})$ 的基本解,$f \in \mathscr{D}'$ 使得$f * E$ 有定义,则

$$P(\mathrm{D})(f*E) = f*P(\mathrm{D})E = f*\delta = f,$$

这就表明 $u = f*E$ 正是以下方程的解:

$$P(\mathrm{D})u = f. \tag{7.6.7}$$

因此,至少在原则上,求解方程(7.6.7)的问题就转化成了求 $P(\mathrm{D})$ 的基本解的问

题. 而基本解的存在性是不成问题的, 因 Ehrenpreis 与 Malgrange 于 20 世纪 50 年代中期证明了以下可庆幸的结果:

定理 7.6.3 设 $P(\cdot)$ 是$\mathbb{R}^n$ 上的 m 次($m \geqslant 1$) 常系数多项式,则微分算子 $P(\mathrm{D})$ 必有基本解.

证 基本解的构成依赖于线性泛函的扩张,颇具技术性,但基本思路还是清楚的. 下面分 3 步完成证明.

(i) 首先建立一个辅助不等式. 任给整函数$f(z)$ 与正常数ρ,成立

$$|f(z)| \leqslant C\rho^{-m}\int_{\mathbb{T}^n} |(fP)(z+\rho\lambda)|\,\mathrm{d}\lambda, \quad z \in \mathbb{C}^n, \tag{7.6.8}$$

其中, C 是与f,ρ,z 无关的正常数. 令 $P = \sum\limits_0^m P_j$,P_j 是j 次齐次多项式,$0 \leqslant j \leqslant m$. 因 $P(z+\rho\tau\lambda)$ 是 $\tau(\in \mathbb{C})$ 的 m 次多项式,其首项系数为$\rho^m P_m(\lambda)$,故

$$P(z+\rho\tau\lambda) = \rho^m P_m(\lambda)(\tau-\tau_1)(\tau-\tau_2)\cdots(\tau-\tau_m).$$

令

$$Q(\tau) = \rho^m P_m(\lambda)(1-\bar{\tau}_1\tau)(1-\bar{\tau}_2\tau)\cdots(1-\bar{\tau}_m\tau),$$

则当$|\tau| = 1$ 时$|P(z+\rho\tau\lambda)| = |Q(\tau)|$. 今估计

$$\begin{aligned} |f(z)\rho^m P_m(\lambda)| &= |f(z+\rho\tau\lambda)Q(\tau)|_{\tau=0} \\ &= \left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\tau|=1}\frac{(fP)(z+\rho\tau\lambda)}{\tau}\mathrm{d}\tau\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|(fP)(z+\rho\lambda\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\,\mathrm{d}\theta, \end{aligned}$$

其中用了 Cauchy 公式. 上式两端对 λ 在$\mathbb{T}^n$ 上积分得

$$\begin{aligned} &|f(z)|\rho^m\int_{\mathbb{T}^n}|P_m(\lambda)|\,\mathrm{d}\lambda \\ \leqslant{}& \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}^n}\mathrm{d}\lambda\int_0^{2\pi}|(fP)(z+\rho\lambda\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\,\mathrm{d}\theta \\ ={}& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\mathbb{T}^n}|(fP)(z+\rho\lambda\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\,\mathrm{d}\lambda \\ ={}& \int_{\mathbb{T}^n}|(fP)(z+\rho\lambda)|\,\mathrm{d}\lambda, \end{aligned}$$

这显然得出不等式(7.6.8).

(ii) 构成基本解 E. 令 $X = P(\mathrm{D})\mathscr{D}$,定义

$$g: X \to \mathbb{C}, \quad P(\mathrm{D})\varphi \to \varphi(0). \tag{7.6.9}$$

若 $\varphi \in \mathscr{D}$,$P(\mathrm{D})\varphi = 0$,则$0 = (P(\mathrm{D})\varphi)^\wedge = P\hat{\varphi}$,这推出$\hat{\varphi} = 0$,从而$\varphi(0) = 0$(注意 $\hat{\varphi}$ 是解析函数,见推论7.4.1). 这表明 g 单值地定义为 X 上的线性泛函. 若 g 可扩张为 $g \in \mathscr{D}'$,则对任给 $\varphi \in \mathscr{D}$有

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \langle g, P(\mathrm{D})\varphi \rangle = \langle P(-\mathrm{D})g, \varphi \rangle = \langle P(\mathrm{D})\check{g}, \varphi \rangle,$$

这就得出 $P(\mathrm{D})\check{g} = \delta$, 从而 $E = \check{g}$ 即为 $P(\mathrm{D})$ 的基本解. 于是,由 Hahn-Banach 定理,只要证 g 在 X 上连续,其中, X 看成 $\mathscr{D}$ 的子空间. 而为此又只要证 g 在 X 上关于一个更弱的拓扑连续. 任给 $\varphi \in \mathscr{D}$,令

$$\| \varphi \| = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}t \int_{\mathrm{T}^n} | \hat{\varphi}(t + \rho \lambda) | \, \mathrm{d}\lambda, \tag{7.6.10}$$

则可验证 $\|\varphi\|$ 是 $\mathscr{D}$ 上的一个范数. 注意由推论 7.4.1, $\hat{\varphi}$ 是一个整函数且易看出式(7.6.10)中的积分必有限. 当 $\|\varphi\| = 0$ 时 $\hat{\varphi} = 0$,从而 $\varphi = 0$. 现在指明 g 在 X 上关于范数(7.6.10) 连续. $\forall \varphi \in \mathscr{D}$,有

$$\begin{aligned} | \langle g, P(\mathrm{D})\varphi \rangle | &= | \varphi(0) | \leqslant \|\varphi\|_0 = (2\pi)^{-n} \| \varphi^{\wedge\wedge} \|_0 \\ &\leqslant (2\pi)^{-n} \| \hat{\varphi} \|_1 = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} | \hat{\varphi}(t) | \, \mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{C}{\rho^m (2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}t \int_{\mathrm{T}^n} | (P\hat{\varphi})(t + \rho \lambda) | \, \mathrm{d}\lambda \\ &= \mathrm{const} \ \| P(\mathrm{D})\varphi \|, \end{aligned}$$

其中用了不等式(7.6.8). 可见 g 依范数(7.6.10) 连续.

(iii) 证 $\mathscr{D}$ 上的范数拓扑弱于 $\mathscr{D}$ 中的 LF 拓扑. 设在 $\mathscr{D}$ 中依 LF 拓扑 $\varphi_k \to 0$,则由引理 7.1.1 有紧集 $K \subset \mathbb{R}^n$,使得 $\{\varphi_k\} \subset \mathscr{D}(K)$ 且 $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$,有 $\partial^\alpha \varphi_k \rightrightarrows 0 (k \to \infty)$. 取 $r \in \mathbb{N}$ 充分大,令 $h(x) = (1 + |x|^2)^r$,则依式(7.6.10) 有

$$\begin{aligned} \|\varphi_k\|^2 &= \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}t \int_{\mathrm{T}^n} | \hat{\varphi}_k(t + \rho \lambda) | \, \mathrm{d}\lambda \right]^2 \\ &= \left[\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathrm{T}^n} | (e_{-\rho\lambda}\varphi_k)^\wedge (t) | \, \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}t \right]^2 \\ &\leqslant \mathrm{const} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathrm{T}^n} | h(t) (e_{-\rho\lambda}\varphi_k)^\wedge (t) |^2 \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}t \\ &= \mathrm{const} \int_{\mathrm{T}^n} \int_{\mathbb{R}^n} | [h(\mathrm{D})(e_{-\rho\lambda}\varphi_k)]^\wedge (t) |^2 \mathrm{d}t \mathrm{d}\lambda \\ &= \mathrm{const} \int_{\mathrm{T}^n} \| h(\mathrm{D})(e_{-\rho\lambda}\varphi_k) \|_2^2 \mathrm{d}\lambda \to 0, \quad k \to \infty, \end{aligned}$$

其中用了命题 6.5.1, Hölder 不等式与定理 6.5.3. 由此可见, $\mathscr{D}$ 中依 LF 拓扑的收敛蕴涵范数收敛,如所要证. □

定理 7.6.3 固然是深刻的,但它未必有助于实际求出基本解. 对于一个特定的微分算子 $P(\mathrm{D})$,寻求其基本解时依然要靠一些见机而作的方法,下面通过若干简单例子来作初步说明. 在着手之前,先对基本解作几点一般说明. 首先,若 E 是微分算子 $P(\mathrm{D})$ 的基本解,u 是齐次方程 $P(\mathrm{D})u = 0$ 的任一解,则显然 $E + u$ 亦是 $P(\mathrm{D})$ 的基本解. 可见基本解不必是唯一的. 在多个基本解中通常选择缓增的基本解,使之能施行 Fourier 变换. 其次,基本解 E 肯定不能有紧支集,否则,从 $E \in \mathscr{E}'$ 及 $P\widehat{E} =$

1 推出 $\hat{E}$ 为整函数且以 ∞ 点为零点,因而 $\hat{E}\equiv 0, E=0$,得出矛盾. 此外,若 $P(\mathrm{D})$ 是椭圆算子,则由定理 7.5.5 推出 $P(\mathrm{D})$ 的基本解在 $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 内必为 C^∞ 函数.

例 7.6.2 (i) 设 $P=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+a$, a 是常数. 令 $u=\mathrm{e}^{-ax}H(x)$, $H(x)$ 是 Heaviside 函数,则

$$Pu = au + (\mathrm{e}^{-ax}H(x))' = au + \mathrm{e}^{-ax}[\delta(x) - aH(x)] = \delta(x),$$

故 u 是 P 的基本解. 由例 7.6.1(ii), $Pu=0$ 的通解为 $c\mathrm{e}^{-ax}$. 因此

$$E = \mathrm{e}^{-ax}[H(x)+c] \tag{7.6.11}$$

是 P 的基本解,其中, c 为任意常数. 若 a 是非零实数,则仅当 $c=0$ 时 E 是缓增的.

(ii) 设 $P=\partial_t-\Delta$, Δ 是 Laplace 算子. 设 $E(t,x)$ 是 P 的基本解,即

$$\partial_t E(t,x) - \Delta E(t,x) = \delta(t)\delta(x).$$

假定 $E(t,x)$ 对 x 是缓增的,上式两端对 x 作 Fourier 变换得

$$\partial_t \hat{E}(t,\xi) + |\xi|^2\hat{E}(t,\xi) = \delta(t).$$

用式(7.6.11),从以上方程解出(ξ 视为常数)

$$\hat{E}(t,\xi) = \mathrm{e}^{-t|\xi|^2}[H(t)+c(\xi)].$$

由 $\hat{E}(t,\xi)$ 对 ξ 是缓增的这一条件得出 $c(\xi)=0$,因此

$$\hat{E}(t,\xi) = H(t)\exp(-t|\xi|^2).$$

然后用反演公式(式(6.5.9))得

$$\begin{aligned} E(t,x) &= (2\pi)^{-n}H(t)\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-t|\xi|^2 + \mathrm{i}x\cdot\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= (4\pi t)^{-n/2}H(t)\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right). \end{aligned} \tag{7.6.12}$$

给定普通函数 $f(t,x)$,有

$$\begin{aligned} (f*E)(t,x) &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^n} f(s,y)E(t-s,x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ &= (4\pi)^{-n/2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(s,y)}{(t-s)^{n/2}}\exp\left[-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^n\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{-|y|^2}f(s,x-2y\sqrt{t-s})\mathrm{d}y\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

$u=f*E$ 是以下导热方程的广义解:

$$u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x), \quad t>0.$$

(iii) 设 $P=\partial_t^2-\partial_x^2$, $E(t,x)$ 是 P 的基本解,假定它对 x 是缓增的,则类似于(ii)有

$$\partial_t^2\hat{E}(t,\xi) + \xi^2\hat{E}(t,\xi) = \delta(t).$$

可验证 $\hat{E}(t,\xi) = H(t)\xi^{-1}\sin\xi t$ 满足以上方程且对 ξ 是缓增的. 于是用反演公式得

$$
\begin{aligned}
E(t,x) &= \frac{H(t)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \xi t}{\xi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{H(t)}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\sin \xi t \cos \xi x}{\xi}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2}[H(x+t) - H(x-t)]. \qquad (7.6.13)
\end{aligned}
$$

令 $E_t = E(t,\cdot), u(t,x) = (f * E_t)(x), f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$,则 $u(0,x) = 0$,

$$u_t(0,x) = (f * \delta)(x) = f(x).$$

当 $t > 0$ 时 $Pu = 0$. 于是函数

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} f(y)\,\mathrm{d}y$$

是以下问题的解:

$$
\begin{cases}
u_{tt} = u_{xx}, & t > 0, \\
u(0,x) = 0, & u_t(0,x) = f(x).
\end{cases}
$$

例 7.6.3　Laplace 算子 $\Delta = \sum\limits_{1}^{n} \partial_j^2$ 的基本解.

(i) 设 $n = 1$. 令 $E = x^+ = xH(x)$,则

$$E'' = 2H' + xH'' = 2\delta + x\,\delta' = \delta,$$

其中用了例 7.2.1(i)(vii). 因此 $E = x^+$ 是 $\Delta = (\mathrm{d}/\mathrm{d}x)^2$ 的基本解.

(ii) 设 $n = 2, E = (2\pi)^{-1}\ln|x|$. 任给 $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$,在极坐标 (r,θ) 下有 $\Delta\varphi = \varphi_{rr} + r^{-1}\varphi_r + r^{-2}\varphi_{\theta\theta}$. 于是

$$
\begin{aligned}
\langle \Delta E, \varphi\rangle = \langle E, \Delta\varphi\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \Delta\varphi(x)\ \ln|x|\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} (\varphi_{rr} + r^{-1}\varphi_r + r^{-2}\varphi_{\theta\theta})r\ln r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial r}(r\varphi_r)\ln r\mathrm{d}r = \varphi(0),
\end{aligned}
$$

最后一步用了分积积分. 因此 $\Delta E = \delta$, E 是 Δ 的基本解.

(iii) 设 $n \geqslant 3$. 由定理 7.6.3, Δ 必有某个基本解 E. 因为 Δ 是椭圆算子, 故 $E(x)$ 在 $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 内为 C^∞ 函数. 由 $\Delta E = \delta$ 得 $-|\xi|^2\hat{E}(\xi) = 1$, 由此解出 $\hat{E}(\xi) = -|\xi|^{-2}(0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n)$. 由命题 7.4.1(ii),任给正交矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,有

$$\hat{E}(\xi) = \hat{E}(A\xi) = (E(Ax))^\wedge(\xi), \quad 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n,$$

这推出 $E(x) = E(Ax)(0 \neq x \in \mathbb{R}^n)$. 其次, $\forall a > 0$,有

$$a^2\hat{E}(\xi) = \hat{E}(\xi/a) = a^n(E(ax))^\wedge(\xi), \quad 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n,$$

这推出 $E(ax) = a^{2-n}E(x)(0 \neq x \in \mathbb{R}^n)$. 取定 $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$,取正交矩阵 A,使 $A(x/|x|) = e_1 = (1,0,\cdots,0)$,则

$$E(x) = E(|x| A^{\mathrm{T}} e_1) = |x|^{2-n} E(e_1) = c_n |x|^{2-n},$$

其中，$c_n = E(e_1)$ 与 x 无关. 为确定 c_n，取 $\varphi = \mathrm{e}^{-|x|^2}$，则 $\hat{\varphi}(\xi) = \pi^{n/2}\mathrm{e}^{-|\xi|^2/4}$，以此代入等式 $\langle \hat{E}, \varphi\rangle = \langle E, \hat{\varphi}\rangle$ 得

$$-\int |x|^{-2}\mathrm{e}^{-|x|^2}\mathrm{d}x = c_n \pi^{n/2}\int |x|^{2-n}\mathrm{e}^{-|x|^2/4}\mathrm{d}x,$$

由此得出 $c_n = \Gamma(n/2)/[(4-2n)\pi^{n/2}]$. 因此求得 Δ 的基本解

$$E = \frac{\Gamma(n/2)}{(4-2n)\pi^{n/2}}|x|^{2-n}.$$

在例 7.6.2 与例 7.6.3 中，Fourier 变换起了重要作用. 下面考虑 Fourier 变换的一种更直接的应用. 仍设 $P(\mathrm{D})$ 如方程(7.6.6)，但以 $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 取代 δ 函数，考虑方程(7.6.7). 方程两边作 Fourier 变换得到

$$P\hat{u} = \hat{f}.$$

这就将微分方程(7.6.7)转化成了关于 $\hat{u}$ 的代数方程. 解出 $\hat{u} = \hat{f}/P$，然后用反演公式得到

$$u = (2\pi)^{-n}u^{\wedge\wedge\vee} = (2\pi)^{-n}(\hat{f}/P)^{\wedge})^{\wedge\vee}. \tag{7.6.14}$$

但事情通常不会这么简单，$\hat{f}/P$ 是否有意义及 $\hat{f}/P$ 是否属于 $\mathscr{S}'$ 都成问题. 不过，还是可以得出以下简单结论：

命题 7.6.1 设 $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$，

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n} |P(x)| > 0, \tag{7.6.15}$$

则方程(7.6.7)存在唯一解 u 且 $u \in \mathscr{S}'$. 若 $f \in \mathscr{S}$(或 $f \in L^2$)，则 $u \in \mathscr{S}$(或 $u \in L^2$).

证 由条件(7.6.15)推出 $1/P(x) \in \mathscr{O}_M$，因而 $\hat{f}/P \in \mathscr{S}'$(由定理 7.2.2)，于是 u 依式(7.6.14) 有意义且 $u \in \mathscr{S}'$. 直接看出 u 即为方程(7.6.7) 的唯一解.

若 $f \in \mathscr{S}$，则亦必 $\hat{f}/P \in \mathscr{S}$，于是由式(7.6.14) 看出 $u \in \mathscr{S}$. 当 $f \in L^2$ 时易得相应结论. □

若 $P(x) = 1 + |x|^2$，则 $P(\mathrm{D}) = 1 - \Delta$，$\Delta$ 是 Laplace 算子，$P(x)$ 显然满足条件(7.6.15)，因而命题 7.6.1 可用. 当条件(7.6.15)不满足时，只要 $\hat{f}/P \in \mathscr{S}'$，就仍然可用类似于命题 7.6.1 的方法.

7.7 $\mathbb{T}^n$ 上的广义函数

前述的 $\mathbb{R}^n$ 上的广义函数论在 $\mathbb{T}^n$ 上有一个别具一格的有趣推广. 在叙述这个推广之前稍稍概括一下，在构建 $\mathbb{R}^n$ 上的广义函数论时主要做了些什么.

(A) 描述基本空间 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 及与之关联的空间链，如 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$，然后作为对偶空间界定 $\mathbb{R}^n$ 上的分布空间 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$，同时也考虑到 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ 的一系子空间，如 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \supset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \supset \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$.

(B) 定义广义函数的运算,包括一元运算(如变量代换、微分、Fourier 变换等)与二元运算(如卷积、张量积等).所有运算都具有某种连续性,而且对于一定点函数而言,这些运算的经典定义与分布定义一致.

(C) 利用所定义的运算描述广义函数的结构,达到如下基本结论:任何广义函数都是适当经典函数(如连续函数)经微分运算与和运算的结果.

在 $\mathbb{T}^n$ 上,将遵循类似的思路,并实施相近的步骤.凡属平行推广的内容,都只简述主要结论而不去重复那些并无新意的细节.但 $\mathbb{T}^n$ 毕竟显著地不同于 $\mathbb{R}^n$,这使我们将面对一个很不相同的理论.首先,因 $\mathbb{T}^n$ 是一个紧群而使 $\mathbb{T}^n$ 上的检验函数空间或基本空间显著地简化了,因而相应的分布空间具有较好的结构且形成较简单的谱系.这是相对于 $\mathbb{R}^n$ 上的广义函数论的一大优势.另一方面,如在 6.6 节中所看到的,$\mathbb{T}^n$ 以 $\mathbb{Z}^n$ 为其对偶群,而不像 $\mathbb{R}^n$ 一样是自对偶的,这就使得对广义函数论中最有价值那部分内容 ——Fourier 分析而言,$\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{T}^n$ 是很不相同的.正是在这一点上,本节将以较多的篇幅阐述 $\mathbb{T}^n$ 上的特殊结论.我们也将强调,广义函数概念如何使 Fourier 级数理论变得令人惊异地完美.

首先,以尽可能快捷的方式走过与 7.1 节 ~ 7.3 节平行的这一段路程.与 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$,$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,$\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ 三者对应的是同一个基本空间 $\mathscr{E}(\mathbb{T}^n)$,它是一个 F 空间,在 2.2 节 ~ 6.4 节等处已接触过多次了.$\mathscr{E}(\mathbb{T}^n)$ 中的 F 空间结构决定于半范族 $\{\|\varphi\|_{(r)}: r \in \mathbb{Z}_+\}$,其中,$\|\varphi\|_{(r)}$ 依式(2.2.13),即

$$\|\varphi\|_{(r)} = \max_{|\alpha| \leqslant r} \|\partial^\alpha \varphi\|_0, \quad \varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{T}^n), r \in \mathbb{Z}_+. \tag{7.7.1}$$

在 $\mathscr{E}(\mathbb{T}^n)$ 中 $\varphi_k \to 0 \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \partial^\alpha \varphi_k \rightrightarrows 0$.每个 $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$ 称为 $\mathbb{T}^n$ 上的分布或广义函数,也称为**周期分布**.注意周期分布恒有紧支集,这是其主要优势之一.

与式(7.1.2)相对应,在 $\mathbb{T}^n$ 上可考虑如下空间链:

$$\mathscr{E}(\mathbb{T}^n) \subset \mathscr{E}^r(\mathbb{T}^n) \subset C(\mathbb{T}^n) \subset L^p(\mathbb{T}^n) \subset L^1(\mathbb{T}^n), \tag{7.7.2}$$

其中,$r \in \mathbb{N}, 1 < p < \infty$.上述的包含均连续且每个空间都在后一个空间中稠密.于是有反向的空间链(见式(7.1.3))

$$\mathscr{E}'(\mathbb{T}^n) \supset \mathscr{E}_r'(\mathbb{T}^n) \supset M(\mathbb{T}^n) \supset L^q(\mathbb{T}^n) \supset L^\infty(\mathbb{T}^n), \tag{7.7.3}$$

其中,$M(\mathbb{T}^n)$ 是 $\mathbb{T}^n$ 上的复 Borel 测度空间(由定理 3.5.3),$1 < q < \infty$.每个 $f \in \mathscr{E}_r'(\mathbb{T}^n)$ 称为 r 阶周期分布.因 $L^1(\mathbb{T}^n) \subset M(\mathbb{T}^n)$,故也有 $L^1(\mathbb{T}^n) \subset \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$.因此,$\mathbb{T}^n$ 上的 L^1 函数亦可视为周期分布,不妨称之为正则分布.值得注意的是 $L^p(\mathbb{T}^n)$,$M(\mathbb{T}^n)$,$\mathscr{E}^r(\mathbb{T}^n)$ 与 $\mathscr{E}_r'(\mathbb{T}^n)$ $(r \in \mathbb{N})$ 都是 Banach 空间,这就使一些相关概念的描述大为简化.

设 $f: \mathscr{E}(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{C}$ 是一个线性泛函.则 $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$ 的充要条件是存在 $r \in \mathbb{Z}_+$,使得

$$|f(\varphi)| \leqslant \text{const} \ \|\varphi\|_{(r)}, \quad \varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{T}^n). \tag{7.7.4}$$

$f \in \mathscr{E}_r'(\mathbb{T}^n)$ 的充要条件是式(7.7.4)满足,但此处 r 是预给的. $f \in M(\mathbb{T}^n)$ 的充要条件是

$$|f(\varphi)| \leqslant \text{const} \ \|\varphi\|_0, \quad \varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{T}^n). \tag{7.7.5}$$

$f \in L^p(\mathbb{T}^n)(1 < p \leqslant \infty)$ 的充要条件是

$$|f(\varphi)| \leqslant \text{const} \ \|\varphi\|_q, \quad \varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{T}^n), \tag{7.7.6}$$

其中, $q = p/(p-1)$. 条件(7.7.4) ~ 条件(7.7.6) 可与条件(7.1.4) ~ 条件(7.1.7) 对照,前者显然简单得多,这无疑是 $\mathbb{T}^n$ 具有紧性之故.

如同在 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ 中一样,也约定在 $\mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$ 及其诸子空间中采用弱* 拓扑. 在这一理解下,也有以下对应于定理 7.1.1 的结果:

定理 7.7.1　包含 $\mathscr{E}(\mathbb{T}^n) \subset \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$ 与 $L^p(\mathbb{T}^n) \subset \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 均连续, $\mathscr{E}(\mathbb{T}^n)$ 在 $\mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$ 中是稠密的.

如同 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ 一样,空间 $\mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$ 也是序列弱完备的,这一事实亦有重大意义. 例如,只要能判定 $\sum f_k(\varphi)(\forall \varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{T}^n))$ 收敛,其中, $f_k \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$,即可断定 $f = \sum f_k \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$.

7.2 节中处理广义函数运算的方法,几乎无需任何改变即可移用于 $\mathbb{T}^n$ 上的广义函数. 这样,对任给 $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$, $\varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{T}^n)$,就有(由式(7.2.7) ~ (7.2.10)):

$$\langle D^\alpha f, \varphi \rangle = \langle f, (-D)^\alpha \varphi \rangle, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \tag{7.7.7}$$

$$\langle gf, \varphi \rangle = \langle f, g\varphi \rangle, \quad g \in \mathscr{E}(\mathbb{T}^n), \tag{7.7.8}$$

$$\langle \tau_\alpha f, \varphi \rangle = \langle f, \tau_{-\alpha} \varphi \rangle, \quad a \in \mathbb{T}^n, \tag{7.7.9}$$

$$\langle \check{f}, \varphi \rangle = \langle f, \check{\varphi} \rangle. \tag{7.7.10}$$

在形式上,卷积的定义无需改变且结论更好. 任给 $f, g \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$,卷积 $f * g \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$ 必存在,它决定于

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f(x), g(\varphi_x) \rangle, \quad \varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{T}^n). \tag{7.7.11}$$

若 $(f, g) \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n) \times \mathscr{E}(\mathbb{T}^n)$,则

$$(f * g)(x) = \langle f(y), g(x-y) \rangle \in \mathscr{E}(\mathbb{T}^n).$$

据此,可将式(7.7.11)改写成

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f, \check{g} * \varphi \rangle. \tag{7.7.11$'$}$$

如此定义的卷积总是结合的,且使 $\mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$ 成为一个以 δ 为单位元的交换代数.

在毫无障碍地走过这段平凡的路程之后,我们终于来到一个颇具特色的所在:周期分布的 Fourier 级数. 在这里将看到一些足以激发兴趣的东西. 不过,在入门之处,还是几乎照抄了定义 6.4.1:

定义 7.7.1　任给 $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$,令

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-n}(f * e_k)(0), \quad k \in \mathbb{Z}^n, \tag{7.7.12}$$

称 $\hat{f}(k)$ 为 f 的 **Fourier 系数**,称 $\sum \hat{f}(k) e_k$ 为 f 的 **Fourier 级数**.

尽管形式上定义 7.2.1 与定义 6.4.1 并无不同,但其结果却大有区别. 原因当然在于现在 $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$,而不是 $f \in L^1$. $\hat{f} \in C_0(\mathbb{Z}^n)$ 这一结论已不可再用,但可代以一个新的条件. 首先,将式(7.7.12) 改写为

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-n}\langle f, e_{-k}\rangle, \tag{7.7.12$'$}$$

这就可用条件(7.7.4)

$$|\hat{f}(k)| \leqslant \text{const}\ \|e_{-k}\|_{(r)} \leqslant \text{const}\ (1+|k|)^r, \quad k \in \mathbb{Z}^n.$$

这就表明,$\hat{f}(k)$ 是缓增的. 暂且设一记号:以 Q 记$\mathbb{Z}^n$ 上的缓增函数之全体($g: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ 为缓增函数 $\Leftrightarrow |g(k)|$ 至多为多项式增长). 这就得到一个映射

$$F: \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n) \to Q, \quad f \to \hat{f}, \tag{7.7.13}$$

就称它为对周期分布的 **Fourier 变换**. 显然, 式(7.7.13)正是 Fourier 变换 $L^1(\mathbb{T}^n) \to C_0(\mathbb{Z}^n)$, $f \to \hat{f}$ 的扩张(见式(6.4.5)).

下面是更令人惊异的事实. 设 $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$. $\forall \varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{T}^n)$, 由定理 6.4.1, $\sum \hat{\varphi}(k)e_k$ 在 $\mathscr{E}(\mathbb{T}^n)$ 中收敛于 φ,因而有

$$\begin{aligned}
\langle f,\varphi\rangle &= \left\langle f, \sum_k \hat{\varphi}(k)e_k \right\rangle = \sum_k \hat{\varphi}(k)\langle f, e_k\rangle \\
&= (2\pi)^n \sum_k \hat{\varphi}(k)\hat{f}(-k) = \sum_k \hat{f}(-k)\langle \varphi, e_{-k}\rangle \\
&= \sum_k \hat{f}(k)\langle e_k, \varphi\rangle = \left\langle \sum_k \hat{f}(k)e_k, \varphi \right\rangle,
\end{aligned}$$

这表明 f 的 Fourier 级数在 $\mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$ 中收敛于 f,在得出这一结论时并未用到关于 f 的任何附加条件. 由此可见,在广义函数的层次上,Fourier 级数的收敛性及其求和问题都十分简单地解决了: 恒成立

$$f = \sum_k \hat{f}(k)e_k, \quad f \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n). \tag{7.7.14}$$

这是颇出人意料的. 式(7.7.14)同时也表明,f 完全由 $\hat{f}$ 决定,因而 Fourier 变换(7.7.13)是一个线性单射. 实际上,有更彻底的结论

定理 7.7.2　Fourier 变换(7.7.13)是一个线性同构,其反变换 $f = F^{-1}\hat{f}$ 表为式(7.7.14).

证　只要证明:任给 $g \in Q$,必有 $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$ 使 $g = \hat{f}$. 取 $r \in \mathbb{Z}_+$,使得

$$|g(k)| \leqslant \text{const}\ (1+|k|)^r, \quad k \in \mathbb{Z}^n.$$

$\forall \varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{T}^n)$,当 $|k| \to \infty$ 时有 $\hat{\varphi}(k) = o(|k|^{-r-n-1})$(参考定理6.4.1之证). 于是

$$\begin{aligned}
\sum_k |\langle g(k)e_k, \varphi\rangle| &= \sum_k |g(k)\langle \varphi, e_k\rangle| = (2\pi)^n \sum_k |g(k)\hat{\varphi}(-k)| \\
&\leqslant \text{const} \sum_k (1+|k|)^{-n-1} < \infty,
\end{aligned}$$

这表明级数 $\sum g(k)e_k$ 在 $\mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$ 中收敛于某个 $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$. 直接看出 $\hat{f}(k) = g(k)(k \in \mathbb{Z}^n)$,即 $\hat{f} = g$,如所要证. □

有了定理 7.7.2 之后,现在已可废弃 Q 这一临时记号了,代之以 $\mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)^\wedge$,这意味着 $\mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)^\wedge = \{\hat{f}: f \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)\}$. 这样,可将 Fourier 变换(7.7.13)重新写成

$$\mathscr{E}'(\mathbb{T}^n) \cong \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)^\wedge, \quad f \to \hat{f}, \tag{7.7.13$'$}$$

其中,$\cong$表线性同构. 同构(7.7.13)′恰好对应于 7.4 节中的拓扑同构 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \cong \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $f \to \hat{f}$. 若将式(7.7.13)′的逆变换写成

$$\mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)^\wedge \to \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n), \quad g \to \hat{g} = \sum g(k)e_k, \tag{7.7.15}$$

就有反演公式(对照命题 7.4.1(ii))

$$f = f^{\wedge\wedge}, \quad f \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n). \tag{7.7.16}$$

自然,也将映射(7.7.15)称为 Fourier 变换,即对 $\mathbb{Z}^n$ 上的缓增函数的 Fourier 变换. 但与 7.4 节的一个重大区别是:对于 $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$ 与 $g \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)^\wedge$,$\hat{f}$ 与 $\hat{g}$ 的构成及表达式都相距甚远. 这就使看来极规则的反演公式(7.7.16)为之逊色,甚至可能导向误解. 因此,我们并不特别看重反演公式(7.7.16).

对于 Fourier 变换(7.7.13),自然也应有对应于命题 6.4.1 的结果,而且预期结论会更好些.

命题 7.7.1 设 $f, g \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$,则以下结论成立.

(i) $\forall k \in \mathbb{Z}^n$, $\mathscr{E}'(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{C}$, $f \to \hat{f}(k)$ 是连续线性泛函;

(ii) 卷积公式成立:

$$(f * g)^\wedge = (2\pi)^n \hat{f}\hat{g}, \quad (\varphi\psi)^\wedge = (2\pi)^{-n}\hat{\varphi} * \hat{\psi},$$

其中, $\varphi, \psi \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)^\wedge$;

(iii) 平移规则: $(\tau_a f)^\wedge = e_a \hat{f}$, $\tau_k \hat{f} = (e_{-k} f)^\wedge$ $(a \in \mathbb{T}^n, k \in \mathbb{Z}^n)$;

(iv) 微分公式: $(P(\mathrm{D})f)^\wedge = P\hat{f}$, $P(\mathrm{D})$ 是常系数线性微分算子;

(v) Parseval 等式: $\forall \varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{T}^n)$ 有

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_k \hat{f}(k)\hat{\varphi}(-k). \tag{7.7.17}$$

与 6.4 节中不同,现在无需考虑 Fourier 变换的可行性,且运用卷积也更灵活些,因而证明更容易. 首先推广式(6.4.2)′:

$$f * e_k = (2\pi)^n \hat{f}(k) e_k. \tag{7.7.18}$$

于是

$$\begin{aligned}(f * g)^\wedge(k) &= (2\pi)^{-n}(f * g * e_k)(0) = (f * (\hat{f}(k)e_k))(0) \\ &= \hat{g}(k)(f * e_k)(0) = (2\pi)^n \hat{f}(k)\hat{g}(k),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(P(\mathrm{D})f)^\wedge(k) &= (2\pi)^{-n}((P(\mathrm{D})f) * e_k)(0) \\ &= (2\pi)^{-n}(f * P(\mathrm{D})e_k)(0) = P(k)\hat{f}(k).\end{aligned}$$

其余结论的验证是类似的.

你必定注意到,本节还没有一个与定理 7.2.3 相当的结果. 现在利用 Fourier 变换来建立一个这样的结果.

定理 7.7.3 设 $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$,则存在 $g \in C(\mathbb{T}^n)$,$r \in \mathbb{N}$,使得 $f = (1-\Delta)^r g$.

证 因 $\hat{f}$ 是缓增的,故有 $r > n+1$,使得

$$|\hat{f}(k)| \leqslant \text{const}\,(1+|k|^2)^{r-n-1}, \quad k \in \mathbb{Z}^n. \tag{7.7.19}$$

于是

$$\begin{aligned} f &= \sum_k \hat{f}(k) e_k = \sum_k \hat{f}(k)(1+|k|^2)^{-r}(1-\Delta)^r e_k \\ &= (1-\Delta)^r \sum_k \hat{f}(k)(1+|k|^2)^{-r} e_k \\ &\triangleq (1-\Delta)^r g. \end{aligned}$$

由条件(7.7.19)得出 $g = \sum_k \hat{f}(k)(1+|k|^2)^{-r} e_k \in C(\mathbb{T}^n)$,这就得出所要证. □

以上结果表明,从连续周期函数出发,通过微分运算(当然是在分布意义上),可得到任何周期分布. 从定理 7.7.3 也看出,任何周期分布都是有限阶的.

为简便起见,以下省去 $\mathscr{E}(\mathbb{T}^n)$,$\mathscr{E}'(\mathbb{T}^n)$ 等记号中的$\mathbb{T}^n$.

如同在 $\mathbb{R}^n$ 上一样,在$\mathbb{T}^n$ 上的 Fourier 分析中卷积起重要作用. 一种典型的用法是,取定 $u \in \mathscr{E}'$,用 u 定义一线性算子

$$U: \mathscr{E}' \to \mathscr{E}', \quad f \to u * f, \tag{7.7.20}$$

称 U 为由 u 定义的**卷积算子**,不妨就记作 $u*$. 使用卷积算子时通常提出的问题是:对于 $\mathscr{E}'$ 中给定的一对子空间 F,G,应如何选择 u,才使得有 $u*F \subset G$? 此问题在 Fourier 分析中是如此基本且重要,以至值得形成一套标准的术语.

定义 7.7.2 设 F 与 G 均为 F 空间,包含 $F \subset \mathscr{E}'$ 与 $G \subset \mathscr{E}'$ 均连续,$\mathscr{E} \subset F \cap G$,$F$ 与 G 均对平移 $\tau_a (a \in \mathbb{T}^n)$ 及卷积算子 $e_k * (k \in \mathbb{Z}^n)$ 不变,令

$$(F,G) = \{u \in \mathscr{E}': u*F \subset G\}. \tag{7.7.21}$$

若 $u \in (F,G)$,则 u 与 $\hat{u}$ 分别称为(F,G) 型卷积乘子与(F,G) 型乘子.

当 $u \in (F,G)$ 时,有 $u*F \subset G$,$\hat{u}\hat{F} \subset \hat{G}$,此处 $\hat{F} = \{\hat{f}: f \in F\}$,$\hat{G}$ 类似.

下面给出 (F,G) 型卷积乘子的等价刻画.

定理 7.7.4 设 F,G 依定义 7.7.2,$U: F \to G$ 是一个线性算子, 则以下条件互相等价:

(i) 存在 $u \in (F,G)$ 使 $U = u*$;

(ii) $U \in L(F,G)$ 且 U 与 $\tau_a, e_k * (a \in \mathbb{T}^n, k \in \mathbb{Z}^n)$ 可换;

(iii) 存在 $g \in \widehat{\mathscr{E}}'$ 使 $Uf = (g\hat{f})^{\wedge} \ (f \in F)$.

证 (i)⇒(ii) 验证 $u*$ 与 $\tau_a(a \in \mathbb{T}^n)$,$e_k*$ 可换是直接的,只要证 $u* \in L(F,G)$,为此用闭图像定理. 设在 F 中$f_k \to f$,在 G 中 $u*f_k \to g$,则在 $\mathscr{E}'$ 中$f_k \to f$,

$u*f_k \to u*f = g$,如所要证.

(ii) ⇒(iii) 令 $g(k) = (2\pi)^n (Ue_k)^\wedge(k)(k\in\mathbb{Z}^n)$,则对 $f\in F$ 有

$$(Uf)^\wedge(k) = \hat{e}_k(k)(Uf)^\wedge(k) = (e_k * Uf)^\wedge(k)$$
$$= (U(e_k*f))^\wedge(k) = (2\pi)^n\hat{f}(k)(Ue_k)^\wedge(k),$$

其中用了式(7.7.18)及 U 与 e_k* 可换. 故得 $Uf = (\hat{f}g)^\wedge$. 余下证 g 是缓增的. 如不然,存在 $\{k_i: i\in\mathbb{N}\}\subset\mathbb{Z}^n$,使得 $|k_i|\to\infty$, $|g(k_i)|\geqslant |k_i|^{2i}(i\in\mathbb{N})$. 令 $f = \sum |k_i|^{-i}e_{k_i}$,则 $f\in\mathscr{E}\subset F$,

$$|\hat{f}(k_i)g(k_i)|\geqslant |k_i|^i,\quad i\in\mathbb{N},$$

这与 $\hat{f}g = (Uf)^\wedge\in\widehat{\mathscr{E}}'$ 相矛盾.

(iii)⇒(i) 是明显的. □

对于乘子概念的应用来说,确切地求出"乘子空间" (F,G) 无疑是人们所期待的. 对一些常见的空间对 F,G,关于 (F,G) 已有已知的结果. 这些结果的获得既依赖于一般性的定理 7.7.4,更有赖于依据具体情况的特殊考虑. 下面的定理汇总了一些常用的结果.

定理 7.7.5 (i) $(C,C) = (L^1,L^1) = (L^\infty,L^\infty) = (C,L^\infty) = (L^1,M) = M$,此处 $C = C(\mathbb{T}^n)$, $M = M(\mathbb{T}^n)$;

(ii) $(L^1,L^p) = L^p$, $1<p\leqslant\infty$;

(iii) $(L^p,C) = L^q$, $1\leqslant p = q/(q-1)<\infty$;

(iv) $(L^2,L^2) = (A,A) = (P,P) = (A,P) = P$,此处 $A = \widehat{l^1}$, $P = \widehat{l^\infty}$ 分别看作等距同构于 l^1 与 l^∞ 的 Banach 空间, $l^1 = l^1(\mathbb{Z}^n)$, $l^\infty = l^\infty(\mathbb{Z}^n)$.

证 首先指出,定理 7.7.5 中的所有空间都是 Banach 空间,满足定义 7.7.2 所要求的条件且有以下包含关系:

$$\mathscr{E}\subset C\subset L^\infty\subset L^p\subset L^1\subset M,\quad A\subset L^1\subset P, \tag{7.7.22}$$

其中, 用到 $l^1\subset l^2\subset l^\infty$ 与 $\widehat{l^2} = L^2$ (参考定理 6.4.8).

(i) 易验证 $M*C\subset C$, $M*L^1\subset L^1$, $M*L^\infty\subset L^\infty$ (参考式(6.2.20)),因此

$$M\subset(C,C)\subset(C,L^\infty),\quad M\subset(L^1,L^1)\subset(L^1,M),$$
$$M\subset(L^\infty,L^\infty)\subset(C,L^\infty).$$

今证 $(C,L^\infty)\subset M$ (类似地可证 $(L^1,M)\subset M$,因而结论(i)成立). 今设 $\mu\in(C,L^\infty)$,则由定理 7.7.4 有

$$\|\mu*\varphi\|_\infty\leqslant \text{const}\ \|\varphi\|_0,\quad \varphi\in C.$$

取 $\mathbb{T}^n$ 上的逼近单位 $\{\theta_i\}\subset C$,可设 $\|\theta_i\|_1 = 1$,则当 $\varphi\in C$, $\|\varphi\|_0\leqslant 1$ 时, 有

$$|\langle\mu*\theta_i,\check{\varphi}\rangle|\leqslant\|\mu*\theta_i*\varphi\|_\infty\leqslant\|\mu*\varphi\|_\infty\leqslant\text{const},$$

这推出 $\|\mu*\theta_i\|_2\leqslant$ const. 不妨设 $\mu*\theta_i$ 弱收敛于 $\nu\in M$. 另一方面,在 $\mathscr{E}'$ 中 $\mu*$

$\theta_i \to \mu * \delta = \mu$,故$\mu = \nu \in M$.

(ii) 直接看出$L^p \subset (L^1, L^p)$. 若$\mu \in (L^1, L^p)$,则用类似于证(i)的方法可证$\mu \in L^p$.

(iii) 由$L^q * L^p \subset C$推出$L^q \subset (L^p, C)$. 若$u \in (L^p, C)$,令

$$T(\varphi) = (u * \varphi)(0), \quad \varphi \in L^p,$$

则$T \in (L^p)' \cong L^q$. 于是有$g \in L^q$,使得

$$T(\varphi) = \langle \check{g}, \varphi \rangle = (g * \varphi)(0).$$

$\forall x \in \mathbb{T}^n$,有

$$(u * \varphi)(x) = \tau_x(u * \varphi)(0) = (u * \varphi_x)(0) = (g * \varphi)(x),$$

这得出$u * \varphi = g * \varphi$,因而$u = g \in L^q$.

(iv) 由$l^\infty l^2 \subset l^2$推出$P * L^2 \subset L^2$,因而$P \subset (L^2, L^2) \subset (A, P)$. 类似地$P \subset (A, A)$,$P \subset (P, P)$. 只要证$(A, P) \subset P$. 设$\varphi \in (A, P)$. 若$\varphi \notin P$,则$\hat{\varphi} \notin l^\infty$. 于是有$\{k_i : i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Z}^n$,使得$|\hat{\varphi}(k_i)| \geqslant i^3 (i \in \mathbb{N})$. 令$f = \sum i^{-2} e_{k_i}$,则$f \in A$,但

$$|\hat{f}(k_i)\hat{\varphi}(k_i)| \geqslant i,$$

这与$f * \varphi \in P$(即$\hat{f}\hat{\varphi} \in l^\infty$)相矛盾. 故$\varphi \in P$. □

下面考虑周期分布对于微分方程问题的一些简单应用.

例 7.7.1 (i) 考虑 Laplace 方程的边值问题

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & x^2 + y^2 < 1, \\ u = f & x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \tag{7.7.23}$$

为用 Fourier 级数,转为极坐标,将u写成$u(r,\theta)$,则

$$\begin{cases} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0, & 0 \leqslant r < 1, \\ u(1,\theta) = f(\theta). \end{cases}$$

u看成θ的函数,形式地作 Fourier 变换得

$$\begin{cases} r^2 \hat{u}_{rr}(r,k) + r\hat{u}_r(r,k) - k^2 \hat{u}(r,k) = 0, & 0 \leqslant r < 1, \\ \hat{u}(1,k) = \hat{f}(k). \end{cases}$$

注意到$\hat{u}(r,k)$在$0 \leqslant r < 1$时有界,解以上 Euler 方程得$\hat{u}(r,k) = \hat{f}(k) r^{|k|}$,因而

$$u = \sum_k r^{|k|} \hat{f}(k) e_k = f * P_r,$$

其中P_r是$\mathbb{T}^1$上的 Poisson 核. 对任何$f \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^1)$,可验证$u(re^{i\theta}) = (f * P_r)(\theta)$在$r < 1$时满足$\Delta u = 0$,当$r \to 1^-$时在$\mathscr{E}'(\mathbb{T}^1)$中$u(re^{i\theta}) \to f(\theta)$. 若$f \in C(\mathbb{T}^1)$,则当$r \to 1^-$时$u(re^{i\theta}) \rightrightarrows f(\theta)$(由定理 6.3.1). 如上的$u(re^{i\theta})$就是 Dirichlet 问题(7.7.23)的解,注意必定$u \in C^\infty$(即使$f \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^1)$亦是如此).

(ii) 考虑导热方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t > 0, 0 < x < \pi, \\ u(0,x) = f(x), & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & t \geqslant 0, \end{cases} \tag{7.7.24}$$

其中,$f(x)$ 满足$f(0) = f(\pi) = 0$. 可将f扩张为$\mathbb{R}$上的2π周期奇函数,并认定$f \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^1)$. u 当作 x 的函数作 Fourier 变换得

$$\hat{u}_t(t,k) = -k^2\hat{u}(t,k), \quad \hat{u}(0,k) = \hat{f}(k).$$

由此解出 $\hat{u}(t,k) = \hat{f}(k)\exp(-tk^2)(k \in \mathbb{Z})$. 经反演后得

$$u(t,x) = \sum_k \hat{f}(k)\exp(\mathrm{i}kx - t\,k^2).$$

条件$f \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^1)$ 保证$\hat{f}(k)$ 是缓增的,因此当$t > 0$时可以通过逐项微分运算直接验证 $u_t = u_{xx}$. 而

$$u(0,x) = \sum_k \hat{f}(k)e_k(x) = f(x).$$

(iii) 考虑波动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & t > 0, 0 < x < \pi, \\ u(0,x) = f(x), u_t(0,x) = 0, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases} \tag{7.7.25}$$

可设$f \in \mathscr{E}'(\mathbb{T}^1)$. 类似于 (ii) 中的作法将方程(7.7.25)转化为

$$\hat{u}_{tt}(t,k) = -k^2\hat{u}(t,k), \quad \hat{u}(0,k) = \hat{f}(k), \quad \hat{u}_t(0,k) = 0.$$

由此解出 $\hat{u}(t,k) = \hat{f}(k)\cos kt$. 于是

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{2}\sum_k \hat{f}(k)\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x+t)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-t)}\right] \\ &= \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)]. \end{aligned}$$

当$f \in C^2$ 时,u 是问题(7.7.25) 的古典解.

参考文献

陈景良. 1987. 近代分析数学概要. 北京:清华大学出版社.

陈文嵘. 1982. 非线性泛函分析. 兰州:甘肃人民出版社.

陈文嵘,范先令. 1986. 隐函数定理. 兰州:兰州大学出版社.

定光桂. 2008. 巴拿赫空间引论(第二版). 北京:科学出版社.

韩永生. 1988. 近代调和分析方法及其应用. 北京:科学出版社.

胡传淦. 1985. 向量值分析及其应用. 天津:南开大学出版社.

胡适耕. 1989. 现代分析引论. 武汉:华中理工大学出版社.

胡适耕. 2005. 抽象空间引论. 北京:科学出版社.

李炳仁. 1997. Banach 代数. 北京:科学出版社.

刘登胜,齐植兰. 1992. 泛函分析与抽象调和分析引论. 天津:天津大学出版社.

潘文杰. 2000. 傅里叶分析及其应用. 北京:北京大学出版社.

齐民友. 1986. 线性偏微分算子引论. 北京:科学出版社.

苏维宜. 2000. 近代分析引论. 北京:北京大学出版社.

夏道行等. 1987. 泛函分析第二教程. 北京:高等教育出版社.

俞鑫泰. 1992. Banach 空间选论. 上海:华东师范大学出版社.

张恭庆,郭懋正. 1990. 泛函分析讲义(下). 北京:北京大学出版社.

郑学安. 1984. 紧 Lie 群上的 Fourier 分析. 数学进展. 13:103 ~ 118.

周民强. 1999. 调和分析讲义. 北京:北京大学出版社.

Adams R A. 1975. Sobolev Spaces. New York: Acad Press.

Aliprantis C D, Burkinshaw O. 1990. Principles of Real Analysis. 2ed. Acad Press.

Bachman G. 1964. Elements of Abstract Harmonic Analysis. New York: Acad Press.

Beals R. 1973. Advanced Mathematical Analysis. New York: Springer-Verlag.

Berger M S. 1977. Nonlinearity and Functional Analysis. Acad. Press.

Boos B, Bleecker D D. 1985. Topology and Analysis. New York: Springer-Verlag.

Butzer P L, Nessel R J. 1971. Fourier Analysis and Approximation. Boston: Birkhauser.

Calderón A P. 1966. Singular integrals. Bull Amer Math Soc. 72:427 ~ 465.

Carleson L. 1966. On convergence and growth of partial sums of Fourier series. Acta Math. 116:135 ~ 157.

Cohn D L. 1980. Measure Theory. Boston: Birkhauser.

Dieudonné J. 1969. Foundations of Modern Analysis. New York: Acad Press.

Edwards R E. 1979 ~ 1982. Fourier Series. A Modern Introduction. Vols 1, 2. 2ed. New York: Springer-Verlag.

Engelking R. 1977. General Topology. Warszawa: Polish Sci Publ.

Feldman M B. 1981. A proof of Lusin's theorem. Amer Math Monthly. 88:191, 192.

Folland G B. 1984. Real Analysis, Modern Technigues and Their Applications. New York: John Wiley and Sons.

Globevnik J. 1973. A note on normal-operator-valued analytic functions. Proc Amer Math Soc. 37:619 ~ 621.

Hamilton R. 1982. The inverse function theorem of Nash and Moser. Bull Amer Math Soc. 7:65 ~ 222.

Hartig D G. 1983. The Riesz representation theorem revisited. Amer Math Monthly. 90:277 ~ 280.

Hewitt E, Ross K A. 1982. Abstract Harmonic Analysis. Berlin: Springer-Verlag.

Hille E, Phillips R S. 1957. Functional Analysis and Semigroups. Baltimore: Waverly Press.

Kanwal R P. 1983. Generalized Functions. Theory and Technigue. New York: Acad Press.

Kelley J. 1955. General Topology. New York: Van Nostrand.

Köthe G. 1983. Topological Vector Spaces I. Berlin: Springer-Verlag.

Lang S. 1983. Real Analysis. 2ed. London: Addison-Wesley.

Loomis L H, Sternberg S. 1968. Advanced Calculus. London: Addison-Wesley.

Narasimhan R. 1971. Several Complex Variables. Chicago: Chicago Uni Press.

O' Neil R. 1963. Convolution operators and $L(p,q)$ spaces. Duke Math. J. 30:129 ~ 142.

Pedersen G K. 1989. Analysis Now. New York: Springer-Verlag.

Robbin J. 1968. On the existence theorem for differential equations. Proc Amer Math Soc. 19: 1005, 1006.

Rosenblum M. 1958. On a theorem of Fuglede and Putnam. J. London Math Soc. 33:376, 377.

Rudin W. 1987. Real and Complex Analysis. 3ed. New York: McGraw-Hill.

Rudin W. 1991. Functional Analysis. 2ed. New York: McGraw-Hill.

Shapiro V. 1964. Fourier series in several variables. Bull. Amer. Math. Soc. 70:48 ~ 93.

Stanton P J. 1976. On mean convergence of Fourier series on compact Lie groups. Trans Amer Math Soc. 218:61 ~ 87.

Stein E M. 1979. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton: Princeton Univ Press.

Stein E M, Weiss G. 1971. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces. Princeton: Princeton Univ Press.

Taylor M. 1968. Fourier series on compact Lie groups. Proc Amer Math Soc. 19:1103 ~ 1105.

Treves F. 1967. Topological Vector Spaces. Distribntions and Kernels. New York: Acad Press.

Yosida K. 1978. Functional Analysis. New York: Springer-Verlag.

名 词 索 引

中文名词按汉语拼音字母顺序排列. 名词后面的数字表示该名词首次出现的页数，当名词后注有几个页数时表示该名词在几个不同的意义下使用.

K ~ L

M ~ Q

R ~ S

T ~ W

X ~ Y

前　言

分析学的近代发展经历了一个富有成果的辉煌时期，今天，它的内容已如此庞大，以至人们难以想象它能被容纳在什么有限的框架之内．因此，当J.Dieudonné的九卷本巨著“Éléments d'Analyse”问世时，人们在欣庆之余，似乎更加确信，分析学已与整个现代数学融为一体了．在一定意义上，现代分析与其说是一个学科，不如说是一个方法体系，它的基本思想植根于变量数学发展早期所形成的那些问题中，而其理论形式则因近世代数与拓扑方法的广泛渗入而呈现出愈来愈精致与抽象的面貌．

本书试图以基本的与统一的观点处理现代分析赖以立足的某些基础概念，从而为希望进入这一领域的读者提供一个导引．其中第一章以尽可能紧凑的形式概述了学习现代分析所必需的抽象空间知识，已初步学过点集拓扑与线性泛函分析的读者会发现，这一章对于他们复习与深化这方面的内容依然会有所补益．随后的三章叙述经典的实分析与复分析到“Banach空间值函数”的推广，这种推广的应用价值在若干典型实例中予以阐明．第五、六两章是近年来日趋重要的“大范围分析”即“流形上的分析”的一个导引；作为“流形上的分析”的应用实例，在第七章中简要介绍了Lie群的基础概念．Fourier分析、广义函数论以及与之密切相关的微分算子理论，无疑是现代分析中最活跃且最有应用价值的部分之一，它们的内容已如此丰富，本书最后三章的简略介绍只能带有入门性质．本书当

然不可能在任何意义上提供现代分析的概貌，它只是力图通过一些典型材料来展示近代分析发展的某些基本趋向.

叙述与论证的简明性是本书所追求的基本目标之一. 除了篇幅的考虑之外，作者觉得，唯有简洁的方法才是真正有前途的. “简单即美”，似乎应成为数学的格言. 少数几个定理（如Riesz表示定理，Haar测度存在定理）的证明因其过长而省略了，这对于阅读本书并无影响.

为了节省篇幅，本书较多地采用缩记号，所用记号一般是流行的. 读者可随时利用书末的“常用记号”表. 演算中出现的常数经常表成const，细心的读者当能确切了解它与其它量的关系. 不致误解时，符号$\sum$（及Π，$\cup$，$\cap$等）下的指标皆予省略. 对括号的用法作如下约定：方括号内记述意义平行的条件或结论；圆括号内则是注释、插入语或引证出处. 记号§1.1表示第一章§1；§1.1(1)表示§1.1中的式(1)；就写§1时表示本章§1.

每节后面附有少量习题. 习题中总使用与正文一致的记号. 例如，若正文中已约定E记B-空间，则习题中的E自动地理解为B-空间而不再交代. 个别习题的结论也用在正文中，这多半是该结论的证明是平凡的，或与本书关系不大而不宜占去正文的篇幅. 个别定理的证明引用了后文中的结论，不过显然不致引起循环推理. 这种情况虽然力求避免，但有时为了不使内容的排列显得支离破碎，适当兼顾各章节的完整性是必要的.

本书初稿承蒙周叔子教授的详细审阅，许多章节在内容与形式上的改进都大大得益于周叔子教授的意见. 对此，作者谨致衷心的感谢.

作 者

1988年元月于武汉

目 录

第一章　拓扑向量空间

本章概述全书所必需的有关抽象空间的基础概念，论及的内容是标准的，大部分包含于流行的大学教材中，只是这里处理得更概括些，对许多结论只给出了简略的证明.

§1　集与拓扑

集论的记号与基本用语是众所周知的，现扼要列举如下，以供阅读本书时备查.

给定集X，以$\mathscr{P}(X)$记X的所有子集之集. 表示一集$A\in\mathscr{P}(X)$的标准方式是：$A=\{x\in X\mid x$满足$P\}$，P是某个命题；不致误解时可简写作$A=\{x\mid x$满足$P\}$或$A=X(P)$. 例如，实域$\mathbb{R}$上一实函数f的零点集可表为$\mathbb{R}(f=0)$. 集运算记号是标准的. 差集写成$A\setminus B$，而将记号$A-B$保留给代数系统使用. 通常用A^c记补集$X\setminus A(A\subset X)$. 单元集$\{x\}$与元x在概念上自然有别，但记号的某种"混用"有其方便而又无误解之虞. 例如，不妨用$A\setminus x, A\times x$分别表示$A\setminus\{x\}, A\times\{x\}$. 类似地，若$\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$是$X$中一族元，则写作$\{x_\alpha\}\subset X$，尽管它实际上是一个映射$\alpha\longmapsto x_\alpha$.

1.1.1 定义　给定非空集X,Y，称积集$X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y\}$的任何子集为关系. 设$R\subset X\times Y, S\subset Y\times Z, A\subset X$，称$R^{-1}=\{(y,x)\mid(x,y)\in R\}$为$R$的逆，称$S\circ R=\{(x,z)\mid\ \exists y:$

$(x,y)\in R,(y,z)\in S\}$为S与R的复合，令$R(A)=\{y|\ \exists a\in A:(a,y)\in R\}$.若$f\subset X\times Y$, $\forall x\in X$, $f(x)$至多含一元，则称f为函数或映射，分别称$D(f)=f^{-1}(Y)$与$\mathrm{Im}f=f(X)$为f的定义域与值域.

给出一映射f时，通常采用以下标准形式：

$$f:D\subset X\to Y, x\longmapsto f(x), \tag{1}$$

其中$D=D(f)$.(1)可简写作$f:D\to Y$或$D\xrightarrow{f}Y$. 以1_X或id记单位映射$X\to X, x\longmapsto x$; i记包含映射$A\to X, x\longmapsto x$(假定$A\subset X$)，或写作$i:A\subset X$. 若$f:X\to Y, i:A\subset X$，则称$f|A=f\circ i$为f在A上的限制，称f为$f|A$的一个扩张. 若$f(X)=Y$，则称f为满射；若$f(x)=f(x')\Rightarrow x=x'$，则称$f$为单射；$f$同时为单射与满射时称为双射，此时$f$有一逆射$f^{-1}:Y\to X, f(x)\longmapsto x$. 若$\varphi:X\to\{0,1\}$，则称$\varphi$为集$A=\varphi^{-1}(1)\subset X$的特征函数，记作$\chi_A$. 任给映射$f:X\to E, g:Y\to F$，积映射$f\times g$定义为

$$f\times g:X\times Y\to E\times F, (x,y)\longmapsto(f(x),g(y)). \tag{2}$$

任给函数$f:X\to\mathbb{C}, g:Y\to\mathbb{C}$, 张量积$f\otimes g$定义为

$$f\otimes g:X\times Y\to\mathbb{C}, (x,y)\longmapsto f(x)g(y). \tag{3}$$

1.1.2 定义 设非空集X上给定了关系$x\leqslant y$. (i) 若$\forall x\in X: x\leqslant x$, 且$x\leqslant y\leqslant z\Rightarrow x\leqslant z$, 则称$\leqslant$为拟序.满足“$x\leqslant y\leqslant x\Rightarrow x=y$”的拟序$\leqslant$称为偏序；若$\leqslant$为偏序且$\forall x, y\in X$: $x\leqslant y$与$y\leqslant x$之一成立,则称$\leqslant$为全序. “拟序集”、“偏序集”及“全序集”的意义自明. (ii)设$\leqslant$为拟序，$A\subset X$. 若$\forall a\in A$: $a\leqslant b$，则称b为A的上界；若$b\in A$，且$b\leqslant a\in A\Rightarrow a\leqslant b$，则称$b$为$A$的极大元. “下界”与“极小元”的定义仿此. 若$X$的任何有限子集有上界，则称$(X,\leqslant)$为有向集.

任给拟序集[有向集]$(X,\leqslant),(Y,\leqslant)$，$X\times Y$看作拟序集[有向集]时总理解为$(x,y)\leqslant(x',y')\Longleftrightarrow x\leqslant x'$且$y\leqslant y'$.

以下命题被作为公理接受：

Zorn 引理 若X为偏序集，其中每个全序子集有上界，则X有极大元.

1.1.3 定义 任给集A，若存在单射$A \to \mathrm{N}$(本书中约定$\mathrm{N} = \{0,1,2,\cdots\}$)，则称$A$为**可数集**.

容易验证：可数个可数集之并及有限个可数集之积是可数集；实数集是不可数的.

1.1.4 定义 设X是一非空集. 若$\tau \subset \mathscr{P}(X)$满足条件：(i)$X, \varnothing \in \tau$；(ii)$\tau$对任意并与有限交运算封闭，则称$\tau$为$X$上的一个**拓扑**，称$X$或$(X,\tau)$为**拓扑空间**，称任何$A \in \tau$为**开集**，$A^c$为**闭集**. 若$\tau, \tau'$是$X$上的两个拓扑，$\tau \subset \tau'$，则说$\tau$弱于$\tau'$或$\tau'$强于$\tau$.

给定拓扑空间(X,τ)，$A \subset X$，下面界定与A有关的一串概念与术语，且顺便指出一些简单结论.

1° 若$x \in V \subset A, V \in \tau$，则说$x$是$A$的内点；$A$的全体内点组成$A$的**内部**，记作$A^{\circ}$，显然$A^{\circ} \in \tau$. 若$x \in A^{\circ}$ [$B \subset A^{\circ}$]，则称A为点x[集B]的一个**邻域**.

2° 称$\bar{A} = \{x | x \in V^{\circ} \Rightarrow A \cap V \neq \varnothing\}$为$A$的**闭包**；称$\partial A = \bar{A} \setminus A^{\circ}$为$A$的**边界**. 当$\bar{A} = X$时称$A$为$X$的**稠子集**，当$X$有可数稠子集时称它为**可分空间**. 容易验证：$\bar{A} = ((A^c)^{\circ})^c$，$A^{\circ} = (\overline{A^c})^c$；$A$是开[闭]集$\Longleftrightarrow A = A^{\circ}$ [$A = \bar{A}$].

3° 当$x \in \overline{A \setminus x}$时称$x$为$A$的**聚点**. 以$A^d$记$A$的所有聚点之集，称$A \setminus A^d$中的点为$A$的**孤立点**. 若$X^d = \varnothing$ ($\Longleftrightarrow \tau = \mathscr{P}(X)$)，则称$X$为**离散空间**.

4° 设$A \neq \varnothing$，则$\tau_A = \{A \cap V \mid V \in \tau\}$是$A$上的拓扑，称为$\tau$在$A$中导出的**相对拓扑**，称$(A, \tau_A)$为$X$的（拓扑）子空间. 未加申明时$X$的子集上总采用相对拓扑.

1.1.5 定义 若$(T, \leqslant)$是一有向集，则称任何族$\{x_t | t \in T\} \subset X$为$X$中的**网**(注意序列是网的特例). 若$x \in X$，任给$x$的邻

域V，$\exists t\in T$，$\forall t'\geqslant t$：$x_{t'}\in V$，则说网$\{x_t\}$收敛于x，写作$x_t\to x$.

若对X中任一对相异点x，y，存在x的邻域U与y的邻域V：$U\cap V=\varnothing$，则称X为T_2空间或Hausdorff空间. 易证X为T_2空间$\Longleftrightarrow X$中任何网至多收敛于一点. 因此在T_2空间中可用记号"$\lim\limits_t x_t=x$".

1.1.6 定义 设β是X中一族开集[$x\in X$的一族邻域]. 若X中每个开集是β中某些集之并[x的每个邻域含某个$B\in\beta$]，则说β是X的一个**拓扑基**或一族基开集[x的一个邻域基或一族基邻域]. 若β中集的所有有限交构成X的拓扑基[x的邻域基]，则称β为X的**拓扑子基**[x的邻域子基]. 若X有可数拓扑基[每个$x\in X$有可数邻域基]，则称X为**第二可数空间**[第一可数空间].

拓扑定理之条件中出现的开集[邻域]改为基开集[基邻域]后，通常仍可保持结论.

1.1.7 定理 若$\beta\subset\mathscr{P}(X)$满足条件：(i)$\bigcup_{B\in\beta}B=X$[以及(ii)$\forall A,B\in\beta$，$x\in A\cap B$，$\exists C\in\beta$：$x\in C\subset A\cap B$]，则$X$上存在唯一以$\beta$为拓扑子基[拓扑基]的拓扑$\tau$.

证 β满足(i)(ii)时可令$\tau=\{A|\exists\{B_\alpha\}\subset\beta$：$A=\bigcup B_\alpha\}$；若$\beta$仅满足(i)，则$\beta$中的集的有限交之全体满足(i)(ii). □

经常利用1.1.7来定义拓扑. 例如，设(X,τ)，(Y,τ')为拓扑空间，则以$\beta=\{A\times B|A\in\tau,\ B\in\tau'\}$作为拓扑基定义出$X\times Y$上的**积拓扑**（积拓扑的一般定义见1.5.1）.

1.1.8 定义 设X是一非空集，$d:X\times X\to[0,\infty)$满足条件：(i)$d(x,y)=0\Longleftrightarrow x=y$；(ii)$d(y,x)=d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(y,z)$($\forall x,y,z\in X$)，则称$d$为$X$上的一个**度量**，称$X$或$(X,d)$为**度量空间**. 任给$a\in X$，$r>0$，称$B(a,r)=\{x\in X|d(a,x)<r\}$[$\bar{B}(a,r)=\{x\in X|d(a,x)\leqslant r\}$]为以$a$为心以$r$为半径的

球[闭球]．以X中的所有球作为基开集在X上决定一拓扑，称为由d诱导的度量拓扑，称d为与此拓扑相容的度量．若一拓扑空间上存在与其拓扑相容的度量，则称它是可度量化的．

不致混淆时，任何度量空间的度量都记作d．设X为度量空间，$A, B\subset X$，称$d(A, B)=\inf d(A\times B)$为$A, B$间的距离，称$d(A)=\sup d(A\times A)$为$A$的直径，当$d(A)<\infty$时称$A$为有界集．给定一网$\{x_t\}\subset X$，显然$x_t\to x\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0, \exists t, \forall t'\geqslant t$: $d(x, x_{t'})<\varepsilon$．设Ω是一集，$\{f_t: \Omega\to X\}$是以函数为元素的网（函数网），它满足

$$\forall\varepsilon>0, \exists t_0, \forall t\geqslant t_0, \forall x\in\Omega: d(f_t(x), f(x))<\varepsilon, \quad (4)$$

则说$\{f_t\}$在Ω上一致收敛于f，记作$f_t\overset{\Omega}{\rightrightarrows}f$．

未加声明时，在R^n或C^n中总采用由Euclid度量$d(x, y)=|x-y|$决定的拓扑，任给$x=(x_1, \cdots, x_n)\in\mathrm{C}^n$，约定

$$|x|=(\sum_i|x_i|^2)^{1/2}. \quad (5)$$

1.1.9 定理 若X是第二可数空间，则X可分，X的每个开覆盖$\mathscr{U}$（即其并为X的一族开集）有可数子覆盖．可分度量空间是第二可数的．

证 若$\{B_n|n\in\mathrm{N}\}$是X的拓扑基，$b_n\in B_n$，$N'=\{n|\exists U_n\in\mathscr{U}: B_n\subset U_n\}$，则$\overline{\{b_n\}}=X$，$\{U_n|n\in N'\}$是$\mathscr{U}$的一个可数子覆盖．若$X$为度量空间，$\overline{\{a_n\}}=X$，则$\left\{B\left(a_n, \frac{1}{m}\right)\middle| m, n>0\right\}$是$X$的拓扑基． □

1.1.10 定义 设X, Y是拓扑空间，$f: X\to Y$、称f在$x\in X$连续，若对$f(x)$的任给邻域V，存在x的邻域U：$fU\subset V$．若f在每点$x\in X$连续，则说f连续．令$C(X, Y)=\{f: X\to Y|f\text{ 连续}\}$，$C(X)=C(X, \mathrm{K})$，$\mathrm{K}=\mathrm{R}$ 或 C，$C(X, n)=C(X, \mathrm{C}^n)$．若$f\in C(X, Y)$为双射且$f^{-1}\in C(Y, X)$，则称$f$为同胚，记作$f: X\simeq Y$．

当$f: X\cong f(X)\subset Y$时说f是一拓扑嵌入，此时将X与$f(X)$等同地看作Y的子空间．若f映开[闭]集为开[闭]集，则称f为开[闭]映射．若X,Y是度量空间，$f: X\to Y$满足条件

$$\begin{aligned}&\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \forall x,x'\in X:\\&d(x,x')<\delta\Rightarrow d(f(x),f(x'))<\varepsilon,\end{aligned}\tag{6}$$

则说f一致连续．

1.1.11 定理 设X,Y是拓扑空间，$f: X\to Y$，则以下条件互相等价：(i)$f\in C(X,Y)$；(ii)任给开集$B\subset Y$：$f^{-1}B\subset X$是开集；(iii)任给闭集$B\subset Y$：$f^{-1}B\subset X$是闭集；(iv)对Y的某个拓扑子基β，$\forall B\in\beta$：$f^{-1}B\subset X$是开集；(v)任给收敛网$\{x_t\}\subset X$：从$x_t\to x$推出$f(x_t)\to f(x)$．

证 只证(v)⇒(i)（其余是明显的）．若f在$x\in X$不连续，则有$f(x)$的邻域V，任给x的邻域U，存在$x_U\in U$：$f(x_U)\overline{\in}V$．$\{U\}$以包含为序是一有向集，因而$\{x_U\}$是一个网，显然$x_U\to x$，而$f(x_U)\not\to f(x)$． □

因形如$(-\infty,a),(a,\infty)(\forall a\in\mathbb{R})$的区间构成$\mathbb{R}$的一拓扑子基，由1.1.11，一函数$f: X\to\mathbb{R}$连续$\Longleftrightarrow\forall a\in\mathbb{R}$：$X(f<a)$与$X(f>a)$皆为开集．

参考文献：[25]，[48]，[82]．

习 题

1. 设$f: X\to Y$，X是第一可数的，则f在$x\in X$连续$\Longleftrightarrow$任给收敛于x的序列$\{x_n\}$：$f(x_n)\to f(x)$．
2. 设$f: X\to Y$，$\{U_\alpha\}$是X的一开覆盖，则$f\in C(X,Y)\Longleftrightarrow\forall\alpha$：$f|U_\alpha\in C(U_\alpha,Y)$．
3. $\overline{A}=\{x\mid$存在网$\{x_t\}\subset A$：$x_t\to x\}$．

§2 拓扑代数系统

首先概述必需的基本代数用语．给定非空集X，称任何映

射$\theta: X\times X\to X$为X上的一个运算，若写$\theta(x,y)$为$xy[x+y]$，则称θ为乘[加]法．运算的结合性与交换性分别由恒等式$x(yz)=(xy)z$与$xy=yx$界定．恒满足$ex=xe=x$的元e称为单位元，它存在时必是唯一的．满足$xy=e=yx$的元y称为x的逆元，记作x^{-1}；当x^{-1}存在（必定唯一）时称x为可逆元．对于加法，单位元与逆元相应地改称为零元（0）与负元（$-x$）．设K＝R或C，一映射$\theta: \mathrm{K}\times X\to X, (\alpha,x)\mapsto \alpha x$满足$(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$，$1x=x$，则称$\theta$为数乘，或说K是$X$的系数域．若$X$上定义了加法与乘法[与数乘]，满足$x(y+z)=xy+xz$，$(x+y)z=xz+yz$ [$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$，$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$，$\alpha,\beta\in\mathrm{K}$]，则说乘法[数乘]对加法是分配的．定义了满足一定规则的若干运算的系统称为代数系，几个常用的代数系界定如下：

1.2.1 定义 若集G上定义了一结合的乘[加]法，使得单位元存在且每个$x\in G$可逆，则称G为乘法群[加群]，或就叫作群．运算可交换的群称为交换群或Abel群，本书中约定加群总是交换群．若X是以K为系数域的加群且数乘对加法是分配的，则称X为K上的向量空间；若X上还定义了对加法分配的[且结合的]乘法，使得$\alpha(xy)=x(\alpha y)=(\alpha x)y$ $(x,y\in X,\alpha\in\mathrm{K})$，则称$X$为K上的[结合]代数．当说到代数$X$的单位元、可逆元与交换性时，都是对其中的乘法而言的．

关于向量空间的基与维数概念是熟知的．今后只要未加声明，所涉及的向量空间与代数概为复空间与复代数（即系数域为C），有关结论用于实空间或实代数时应作的修改通常是自明的．

处理代数系统时经常使用以下缩记号：

$$AB^{-1}=\{ab^{-1}|a\in A,b\in B\}, \tag{1}$$

只要其中ab^{-1}恒有意义．缩记号$A-B$，$A+B$等仿此．

1.2.2 定义 若一个群G同时是T_2拓扑空间，且映射$G\times G$

$\to G$，$(x,y)\mapsto xy^{-1}$连续，则称G为拓扑群．若一向量空间X依加法是拓扑群，且映射$\mathbb{C}\times X\to X$，$(\alpha,x)\mapsto \alpha x$连续，则称$X$为拓扑向量空间或简称TVS．类似地可定义拓扑代数．一般地，称任何具有连续代数运算的代数系为拓扑代数系．

给定拓扑代数系X，若一双射$\varphi: X\to X$本身及φ^{-1}都由X中的代数运算定义，则φ必为同胚．例如，拓扑群中的**左平移**$x\mapsto ax$（a固定）是同胚．这一简单事实有基本意义，它推出拓扑群[TVS]的拓扑结构完全决定于单位元[零元]的邻域基（本书中称零元的邻域为0-邻域）．下面列出两个基本结果，其证明是标准的，例如可参看[78]．

1.2.3 定理 若$\mathscr{U}$是拓扑群G的单位元e的邻域基，则$\mathscr{U}$有性质：(i) $\bigcap_{U\in\mathscr{U}}U=\{e\}$；(ii) $\forall U,V\in\mathscr{U}$，$\exists W\in\mathscr{U}$：$W\subset U\cap V$；(iii) $\forall V\in\mathscr{U}$，$\exists U\in\mathscr{U}$，$UU\subset V$；(iv) $\forall V\in\mathscr{U}$，$\exists U\in\mathscr{U}$：$U\subset V^{-1}$；(v) $\forall a\in G, V\in\mathscr{U}$，$\exists U\in\mathscr{U}$：$aUa^{-1}\subset V$．反之，若$G$是一个群，$\mathscr{U}\subset\mathscr{P}(G)$满足(i)—(v)，则$G$上存在唯一拓扑，使$G$成为以$\mathscr{U}$为$e$的邻域基的拓扑群．

1.2.4 定理 若$\mathscr{U}$是TVS X的0-邻域基，则$\mathscr{U}$有性质：(i) $\bigcap_{U\in\mathscr{U}}U=\{0\}$；(ii) $\forall U,V\in\mathscr{U}$，$\exists W\in\mathscr{U}$：$W\subset U\cap V$；(iii) $\forall V\in\mathscr{U}$，$\exists U\in\mathscr{U}$：$U+U\subset V$；(iv) $\forall V\in\mathscr{U}$，$\exists U\in\mathscr{U}$：$\alpha U\subset V$ $(|\alpha|\leqslant 1)$；(v) $\forall x\in X, U\in\mathscr{U}$，$\exists \alpha\in\mathbb{C}$：$x\in\alpha U$．反之，若$X$是一向量空间，$\mathscr{U}\subset\mathscr{P}(X)$满足(i)—(v)，则$X$上存在唯一拓扑，使$X$成为以$\mathscr{U}$为0-邻域基的TVS．

1.2.5 定义 若X,Y上都定义了乘法[数乘]，$f: X\to Y$满足$f(xy)=f(x)f(y)$ $[f(\alpha x)=\alpha f(x)]$，则说$f$保持乘法[数乘]．"保持加法"的意义仿此．若$X,Y$是同种代数系，$f: X\to Y$保持该种代数系中的所有运算，则称$f$为**同态**．群同态、线性同态(或线性算子)、代数同态的意义自明．是单[满、双]射的同态称为单同态[满同态、同构]．若e是Y的群单位元或零元，则

称$\mathrm{Ker}f=f^{-1}(e)$为同态$f:X\to Y$的核．若X,Y是拓扑代数系，$f:X\to Y$是同构且为同胚，则称f为拓扑同构．若X为［拓扑］向量空间，则［连续］线性泛函$f:X\to\mathrm{C}$之全体依自然的运算构成一向量空间，称为X的代数［拓扑］对偶，记作$X^*[X']$．若X为代数，则称任何代数同态$f:X\to\mathrm{C}$为复同态．

若X,Y为拓扑群，$f:X\to Y$是一同态，则由分解

$$f:x\overset{\text{平移}}{\longmapsto}a^{-1}x\longmapsto f(a^{-1}x)=(f(a))^{-1}f(x)\overset{\text{平移}}{\longmapsto}f(x) \qquad (2)$$

($a\in X$固定)看出：f在单位元处连续$\Longleftrightarrow f$处处连续．对线性同态与代数同态有类似结果．

1.2.6 **定义** 设X为TVS．若$A\subset X$关于X中的运算封闭，则A亦是一TVS，称为X的子空间．任给$B\subset X$，设$\langle B\rangle$是X中所有含B的闭子空间之交，则称$\langle B\rangle$为B生成的闭子空间，当$\langle B\rangle=X$时称B为X的**基本集**．任给$x,y\in X$，称点集$[x,y]=\{tx+(1-t)y\,|0\leqslant t\leqslant 1\}$为以$x,y$为端点的**线段**．若$A\subset X$，$\forall x,y\in A$：$[x,y]\subset A(\Longleftrightarrow\forall t\in[0,1]:tA+(1-t)A\subset A)$，则称$A$为**凸集**；若$|\alpha|\leqslant 1\Rightarrow\alpha A\subset A$，则称$A$为**平衡集**；称凸平衡集为**绝对凸集**．任给$B\subset X$，X中所有含B的凸集之交称为B的**凸包**．若X有一由凸集组成的0-邻域基，则称X为**局部凸空间**或简称**LCS**．称$A\subset X$为**有界集**，若对任给0-邻域V，存在$\alpha\in\mathrm{C}:A\subset\alpha V$．

若U,V如1.2.4之(iv)，则$W=\bigcup_{|\alpha|\leqslant 1}\alpha U$为平衡集且$W\subset V$，可见TVS总有由平衡集组成的0-邻域基；由此又推出：LCS总有由绝对凸集组成的0-邻域基．

1.2.7 **定义** 设X为向量空间．若一函数$X\to[0,\infty)$，$x\mapsto\|x\|$满足条件：(i)$\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$；(ii)$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$ ($\alpha\in\mathrm{C},x,y\in X$)，则称$\|x\|$为$X$上的**半范**；若它还满足：(iii) $\|x\|=0\Rightarrow x=0$，则称$\|x\|$为**范数**，称X为**赋范空间**．在赋范空间中总采用由度量$d(x,y)=\|x-y\|$决定的拓扑(称范数拓扑)．

若赋范空间X同时是一结合代数，其中的范数满足$\|xy\|\leqslant\|x\|\|y\|(x,y\in X)$，则称$X$为**赋范代数**．若$X,Y$为赋范空间［赋范代数］，一同构$f: X\to Y$满足$\|f(x)\|=\|x\|$，则称$f$为**等距同构**．

赋范空间显然是TVS，其中的有界集就是依范数（即依度量）有界的集．

1.2.8 定理 设$\{\|x\|_\alpha|\alpha\in A\}$是向量空间$X$上的一族半范，它满足"$x\neq0\Rightarrow\exists\alpha$: $\|x\|_\alpha\neq0$"．令$B_{\alpha,r}=\{x|\ \|x\|_\alpha<r\}$，则以$B_{\alpha,r}(\alpha\in A,\ r>0)$的有限交之全体作为0-邻域基定义$X$为LCS．每个LCS的拓扑都可如此得到．

证 定理前一半直接由1.2.4推出．今设X为LCS，取它的一绝对凸0-邻域基$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$，定义

$$\|x\|_\alpha=\inf\{\lambda>0|x\in\lambda U_\alpha\},\quad x\in X,\alpha\in A. \tag{3}$$

显然$\|\lambda x\|_\alpha=|\lambda|\|x\|_\alpha$．若$x\in\lambda U_\alpha$，$y\in\mu U_\alpha$，$\lambda,\mu>0$，则

$$x+y\in(\lambda+\mu)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}U_\alpha+\frac{\mu}{\lambda+\mu}U_\alpha\right)\subset(\lambda+\mu)U_\alpha,$$

由此推出$\|x+y\|_\alpha\leqslant\|x\|_\alpha+\|y\|_\alpha$，$\|x\|_\alpha$是一半范．设$B_{\alpha,r}=\{x|\ \|x\|_\alpha<r\}$，从$B_{\alpha,1}\subset U_\alpha\subset\frac{2}{r}B_{\alpha,r}$看出$\{B_{\alpha,r}\}$构成$X$的0-邻域基． □

若$\{\|x\|_\alpha\}$如1.2.8，则在X中$x_t\to0\Longleftrightarrow\forall\alpha$: $\|x_t\|_\alpha\to0$; $B\subset X$有界$\Longleftrightarrow\forall\alpha$: $\sup\limits_{x\in B}\|x\|_\alpha<\infty$．当$\{B_{\alpha,r}\}$是$X$的0-邻域基时称$\{\|x\|_\alpha\}$为$X$的**基本半范族**．若$X$是第一可数的LCS，则从1.2.8之证明看出存在基本半范族$\{\|x\|_n\}_{n\in\mathbf{N}}$．令

$$\|x\|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\|x\|_n}{1+\|x\|_n},\quad x\in X, \tag{4}$$

则(4)满足1.2.7的(ii)(iii)及$\|-x\|=\|x\|$，称它为X上的F-范数，称X为F-赋范空间，此时X的拓扑由度量$d(x,y)=\|x-y\|$

决定．但须注意，X中依度量有界的集未必是1.2.6所界定的有界集!

如Bourbaki学派所强调的，LCS是现代泛函分析的合适基础，它不如TVS那样失之过宽，又不象赋范空间那样失之过窄．在很多方面，LCS理论可与赋范空间理论平行地展开，差别常常只是以半范族代替范数而已．

1.2.9 **定义** 设X是一度量空间[TVS]．称一个网$\{x_t\}_{t\in T}\subset X$为Cauchy网，若 $\lim\limits_{(t,s)\in T\times T} d(x_t, x_s)=0\ [\lim\limits_{t,s}(x_t-x_s)=0]$．

若X中任何Cauchy网收敛，则称X完备．称完备的F-赋范空间[赋范空间、赋范代数]为Frechét空间[Banach空间、Banach代数]，简称F-空间[B-空间、B-代数]．

若$\{x_t\}$是度量空间X中的Cauchy网，则可取出下标$t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots$，使得$\forall t\geqslant t_n$：$d(x_t, x_{t_n})<1/n$；$\{x_{t_n}\}$是Cauchy序列，当$x_{t_n}\to x$时必$x_t\to x$．因此$X$完备$\Longleftrightarrow X$中任何Cauchy序列收敛．若$X$是赋范或$F$-赋范空间，则它在TVS意义上的完备与度量意义下的完备一致．

参考文献：[22]，[39]，[48]，[50]，[64]，[78]，[85]．

习　题

设X为TVS，$A\subset X$，则A有界$\Longleftrightarrow$任给$\{x_n\}\subset A$与正数列$\alpha_n\to 0$，有$\alpha_n x_n\to 0$。

§3　紧性与Baire定理

以下设X是给定的拓扑空间．

1.3.1 **定义** 设$A\subset X$．若从$A[X]$的任何开覆盖中可取出有限子覆盖，则称$A[X]$为**紧集**[紧空间]．当$\bar{A}$为紧集时称A为相对紧集．若X中每点有一紧邻域，则称X为**局部紧空间**．

粗言之，紧集就是使有限覆盖定理适用的点集．紧性的意

义在于，从一局部性条件出发，往往在紧集上推出一整体性结论．一般模式是：设 $\{P_\alpha|\alpha\in A\}$ 是以有向集A编序的一族命题，$\alpha\leqslant\beta$时$P_\alpha\Rightarrow P_\beta$，则要证有某个$P_\alpha$在紧集$K$上处处成立，只需证明：$\forall x\in K$，$\exists\alpha\in A$，$P_\alpha$在$x$的一邻域内成立．

1.3.2 例 给定映射序列 $\{f_n: X\to Y\}$，Y为度量空间．若 $\forall a\in X$，有a的邻域V，$f_n\overset{V}{\rightrightarrows}f$，则说$\{f_n\}$**局部一致收敛**于$f$；若在任何紧集$K\subset X$上$f_n\rightrightarrows f$，则说$\{f_n\}$**紧一致收敛**于$f$．取定紧集$K\subset X$，$\varepsilon>0$．若$\forall a\in K$，有$a$的邻域$V_a$，$n_a\in\mathbb{N}$，使得$\forall n\geqslant n_a$，$x\in V_a$：$d(f_n(x),f(x))<\varepsilon$，取$K$的有限覆盖$\{V_{a_i}\}$，则$\forall n\geqslant\max\limits_i n_{a_i}$，$x\in K$：$d(f_n(x),f(x))<\varepsilon$．这表明局部一致收敛蕴含紧一致收敛；当$X$局部紧时上述两种收敛等价．

1.3.3 定理 T_2空间的紧子集是闭集；紧空间的闭子集是紧集；连续映射映紧集为紧集；从紧空间到T_2空间的连续双射是同胚．

证 只证第一个结论，设A是T_2空间X的紧子集，$x\in A^c$．$\forall a\in A$，取不交的开集U_a, V_a：$x\in U_a$，$a\in V_a$．设$A\subset\bigcup_1^n V_{a_i}$，则$x\in U=\bigcap_1^n U_{a_i}\subset A^c$，可见$A^c$是开集． □

顺便指出，完备性与紧性有某些可对照之处．例如，度量空间的完备子空间是闭的，完备空间的闭子空间必完备，等等（还可参看1.3.8）．

对于紧度量空间有一些更合用的刻划．

1.3.4 定理 若X为度量空间，则以下条件互相等价：(i) X是紧的；(ii)若B_n是X的非空闭子集，$B_1\supset B_2\supset\cdots$，则$\bigcap B_n\neq\varnothing$；(iii)任何序列$\{x_n\}\subset X$含收敛子列；(iv) X完备且$\forall\varepsilon>0$，存在覆盖X的有限个球$B(x_i,\varepsilon)$（后一性质称为**全有界性**）．

证 显然(i)⇒(ii)．若 $\{x_n\}\subset X$ 不含收敛子列，则$B_n=\{x_i|i\geqslant n\}$是闭集，$n=1,2,\cdots$，而$\bigcap B_n=\varnothing$，可见(ii)⇒(iii)．

(iii)⇒(iv). 显然(iii)⇒完备性. 若X非全有界, 则有$\varepsilon>0$, X不为任何有限个半径为ε的球覆盖. 任取$x_1\in X$, 次取$x_2\in X\setminus B(x_1,\varepsilon)$, 再取$x_3\in X\setminus[B(x_1,\varepsilon)\cup B(x_2,\varepsilon)]$, …, 如此得到的序列$\{x_n\}$显然不含收敛子列.

(iv)⇒(i). 设(iv)满足, 而X的某个开覆盖β不含有限子覆盖. 以有限个半径为1的球覆盖X, 其中必有一个(记作B_1)不被β中有限个集覆盖; 又以有限个半径为1/2的球覆盖B_1, 其中必有一个, 记作B_2, $B_1\cap B_2$不被β中有限个集覆盖, …, 如此得到一列球$\{B_n\}$, B_n的半径为$1/n$, $A_n=\bigcap_1^n B_i$不被β中有限个集覆盖. 任取$x_n\in A_n$得Cauchy列$\{x_n\}$, 设$x_n\to x\in B\in\beta$, 则当n充分大时$A_n\subset B$, 得出矛盾. □

推论 设X为度量空间, $A\subset X$. 则A相对紧$\Longleftrightarrow A$中任何序列含有收敛子列⇒A全有界; 若X完备, 则A相对紧$\Longleftrightarrow A$全有界. 其次易见全有界性蕴含可分性, 故紧度量空间是可分的.

$\mathbb{R}^n$中的相对紧集[紧集]就是有界集[有界闭集].

任给集X, 赋范空间E, 映射$f: X\to E$, 约定

$$\|f\|_{\infty}=\sup_{x\in X}\|f(x)\|. \tag{1}$$

若X为紧空间, 则易验证$C(X,E)$依上确界范数(1)是一赋范空间, 当E是B-空间时$C(X,E)$亦是B-空间.

1.3.5 Arzela-Ascoli定理 设X是紧度量空间, E是B-空间, $\Phi\subset C(X,E)$. 则Φ相对紧$\Longleftrightarrow\forall x\in X$: $\Phi(x)=\{f(x)|f\in\Phi\}$相对紧, 且$\Phi$等度连续, 即$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\forall f\in\Phi$, $x,y\in X$, 当$d(x,y)<\delta$时$\|f(x)-f(y)\|<\varepsilon$.

证 设Φ相对紧. 取定$x\in X$, 由$C(X,E)\to E$: $f\mapsto f(x)$连续推出$\Phi(x)$相对紧. 若Φ不等度连续, 则有$\varepsilon>0$, $f_n\in\Phi$, $x_n,y_n\in X(n=1,2,\cdots)$: $d(x_n,y_n)\to 0$, $\|f_n(x_n)-f_n(y_n)\|\geqslant\varepsilon$. 不妨

设在$C(X,E)$中$f_n\to f$，在X中$x_n\to x$，$y_n\to x$，于是

$$\varepsilon\leqslant\|f_n(x_n)-f(x_n)\|+\|f(x_n)-f(x)\|+\|f(x)-f(y_n)\|$$
$$+\|f(y_n)-f_n(y_n)\|\to 0(n\to\infty),$$

得出矛盾．其次设每个$\Phi(x)(x\in X)$相对紧且Φ等度连续，$\{f_n\}\subset\Phi$是一序列．取X的可数稠子集$\{x_k\}$．从$\{f_n(x_1)\}$中取出收敛子列$\{f_n^1(x_1)\}$；再取$\{f_n^1(x_2)\}$的收敛子列$\{f_n^2(x_2)\}$，…，如此得到一串序列$\{f_n^k\}$，$k=1,2,\cdots$，其对角线序列$\{f_n^n\}$在每点$x_k(k=1,2,\cdots)$收敛．令$g_n=f_n^n$．任给$x\in X$，取充分接近x的x_k，由不等式

$$\|(g_n-g_m)(x)\|\leqslant\|g_n(x)-g_n(x_k)\|+\|(g_n-g_m)(x_k)\|$$
$$+\|g_m(x_k)-g_m(x)\|$$

及Φ的等度连续性推出$\|g_n-g_m\|_u\to 0(m,n\to\infty)$．由此得出$\Phi$的相对紧性． □

推论 若X是紧度量空间，$\Phi\subset C(X,\mathbb{C}^n)$，则$\Phi$相对紧$\Longleftrightarrow\Phi$有界（即一致有界）且等度连续．

将1.3.5前一半证明略加修改即可证明．

1.3.6 定理 从紧度量空间到度量空间的连续映射必一致连续．

1.3.7 定义 若$A\subset X$，$(\bar{A})^\circ=\varnothing$，则称$A$为**疏集**；称可数个疏集之并为**瘦集**；若X中任何瘦集之补在X中稠密，则称X为Baire空间．

易直接验证Baire空间X有以下性质：(i)若$X=\bigcup_1^\infty A_n$，A_n皆为闭集，则必有某个A_n含内点；(ii)若$G_n(n=1,2,\cdots)$是X中的稠密G_δ集（称可数个开集之交为G_δ集），则$\bigcap G_n$亦为稠密G_δ集．

本书中较多处使用记号$A\Subset B$，这意指$\bar{A}\subset B^\circ$．

1.3.8 Baire定理 若(i)每点$x\in X$有一邻域是完备度量空间，或(ii)X是局部紧Hausdorff空间（本书中简称为LCH），

则X是Baire空间.

证　不妨设X是完备度量空间[LCH]，$A=\bigcup A_n$，$(\bar{A}_n)^\circ=\varnothing(n=1,2,\cdots)$. 若$\bar{A}^\circ\neq X$，即$A^\circ\neq\varnothing$，则有球$B_1=B(x_1,r_1)\Subset A^\circ\setminus\bar{A}_1$，$0<r_1<1$[有$x_1\in X$及$x_1$的紧邻域$B_1\subset A^\circ\setminus\bar{A}_1$，参考1.4.6]. 同理有球$B_2=B(x_2,r_2)\Subset B_1\setminus\bar{A}_2$，$0<r_2<1/2$[有$x_2\in X$及$x_2$的紧邻域$B_2\subset B_1\setminus\bar{A}_2$]，…，如此得到一列球$B_n=B(x_n,r_n)\Subset B_{n-1}\setminus\bar{A}_n$，$0<r_n<1/n$[一列非空紧集$B_n$，$B_n\subset B_{n-1}\setminus\bar{A}_n$]，$n=1,2,\cdots$，$B_0=A^\circ$. 于是$\{x_n\}$是一Cauchy列，设$x_n\to x$，则$x\in A^\circ\setminus\bigcup\bar{A}_n[\varnothing\neq\bigcap B_n\subset A^\circ\setminus\bigcup\bar{A}_n]$，得出矛盾. 因此$\bar{A}^\circ=X$. □

1.3.9 例　$X=C([0,1],\mathrm{R})$依上确界范数是B-空间. 不难看出$G_n=\{f\in X\mid V(f)>n\}$是$X$中的开集，$V(f)$记$f$的全变差. 因每个$f\in X$可用全变差充分大的连续函数（如"锯齿形"函数）一致逼近，故$\bar{G}_n=X(n=1,2,\cdots)$. 于是1.3.8推出$\bigcap G_n=\{f\in X\mid V(f)=\infty\}$在$X$中稠密.

以上推理的优越性在于：断定"有足够多的非囿变连续函数"这一较难的问题转化成了一个较易的问题，即断定"有足够多的全变差充分大的连续函数". 一般的原理是，若每个命题$P_n(n=1,2,\cdots)$在Baire空间X的某稠开集G_n上成立，则P_n必在某个稠密集$G\subset X$上一致成立. 这一原理是分析中许多存在性证明的基础.

参考文献：[22]，[25]，[39]，[48]，[52]，[64]，[82].

习　题

1. 紧空间上的实连续函数取得最大最小值.

2. 设A，B是拓扑群G的紧子集，则AB是紧集；若A为紧集，B为闭集，则AB是闭集.

3. 设$f_n\in C([0,1],\mathrm{R})$，$\forall x\in[0,1]$：$f_n(x)\to f(x)$，则$f(x)$在$[0,1]$上有"足够多"的连续点.

§4 连通性与分离性

以下设X是给定的拓扑空间.

1.4.1 定义 若X不能分解为两个互不相交的非空开子集之并，则称X为**连通空间**. 称连通子空间为**连通集**；称连通开集为**区域**；称X的极大连通子集为**分支**. 若X中每点有由连通集组成的邻域基，则说X**局部连通**. 若$\varphi\in C([0,1],X)$，则称φ为X中连接$\varphi(0)$与$\varphi(1)$的**路**；若X中任意两点有路连接，则说X是**路连通的**.

约定称既开又闭的集为**开闭集**. 显然，X连通$\Longleftrightarrow X,\varnothing$是$X$中仅有的开闭集.

1.4.2 定理 X连通$\Longleftrightarrow \forall f\in C(X,\mathbb{R})$，$f(X)$是一区间($A\subset\mathbb{R}$是区间意味着：当$a,b\in A$，$a\leqslant b$时$[a,b]\subset A$).

证 若 $f\in C(X,\mathbb{R})$，$f(x)<r<f(y)$，$x,y\in X$，$r\bar{\in} f(X)$，则从$X=X(f<r)\cup X(f>r)$看出X不连通. 反之，若$A\subset X$是一异于$X,\varnothing$的开闭集，则$f=\chi_A\in C(X,\mathbb{R})$，$f(X)=\{0,1\}$非区间. □

以下定理收集了连通集的基本性质.

1.4.3 定理 (i)$A\subset X$连通$\Rightarrow\bar{A}$连通；(ii)若$\bigcap A_a\neq\varnothing$，$A_a$皆连通，则$\bigcup A_a$连通；(iii)连续映射映连通集为连通集；(iv)路连通空间是连通的；(v)X是其互不相交的分支之并；分支必为闭集；局部连通空间的分支皆为开闭集.

证明是平凡的，且多半可利用1.4.2. 例如对(i)，$\forall f\in C(\bar{A},\mathbb{R})$，从$fA\subset f\bar{A}\subset\overline{fA}$看出$f\bar{A}$是一区间.

1.4.4 定理 若一拓扑群G的子群H含有内点，则H是G中的开闭集，因此连通拓扑群的真子群(特别，TVS的真子空间)必无内点. 若E是一LCS(1.2.6)，$U\subset E$是一开集，则U

连通$\Longleftrightarrow U$路连通.

证 取定$a\in H^\circ$. $\forall x\in H$: $x\in H^\circ-a+x=(H-a+x)^\circ\subset H^\circ$，可见$H$是开集. 因$H^c=\bigcup\{xH|x\in H^c\}$是开集，故$H$也是闭集.

其次设$U\subset E$连通，取定$a\in U$，令$A=\{x\in U|x$与a可用U内之路连接$\}$，只需证$A=U$. 任给$b\in U$，取b的凸邻域$B\subset U$. 因B内任意两点可用B内之线段连接，故必$B\subset A$或者$B\cap A=\varnothing$. 这表明A是U中的开闭集，而$a\in A$，因此$A=U$. □

1.4.4 后半部分的证法今后将多次运用，颇堪留意. 一般说来，若要证明某命题P在某连通集X（如1.4.4中的U）上处处成立，则仅需证明：(i)P至少在某点$x_0\in X$成立；(ii)假定P在点x成立[不成立]可推出P在x邻近成立[不成立]. 这一推理格式可与数学归纳法相类比.

下面转向分离性的讨论.

1.4.5 定义 设X是T_2空间. 若对任给闭集$A\subset X$，闭集$B\subset A^c$[点$x\in A^c$]，存在A的邻域U与B[点x]的邻域V：$U\cap V=\varnothing$，则称X为正规[正则]空间.

直接从定义推出，若X是正规[正则]的，$A\Subset V\subset X$ [$\{x\}\Subset V\subset X$]，则$\exists U$: $A\Subset U\Subset V$ [$\{x\}\Subset U\Subset V$].

1.4.6 定理 度量空间与紧T_2空间是正规的；拓扑群与LCH是正则的；LCH中每点有紧邻域基.

证 设A,B是X中的不交闭集，$x\in A^c$. 若X为度量空间，则A,B被开集$U=\{x|d(x,A)<d(x,B)\}$与$V=\{x|d(x,A)>d(x,B)\}$分离. 若X为紧T_2空间，则$\forall b\in B$，有A的邻域U_b与b的邻域V_b: $U_b\cap V_b=\varnothing$. 取有限个V_{b_i}覆盖B，令$U=\bigcap U_{b_i}$，$V=\bigcup V_{b_i}$，则$A\Subset U$，$B\Subset V$，$U\cap V=\varnothing$. 若X是拓扑群，则$x^{-1}A^c$是单位元e的邻域，于是有e的邻域U: $U\bar{U}^{-1}\subset x^{-1}A^c$，$x$与$A$由邻域$xU$与$(x\bar{U})^c$分离. 若$X$是LCH，则$x$有紧邻域$K$，

K是正规的，故有x的邻域W，$W\Subset K\setminus A$，x与A由W与W^c分离． □

引进一些常用记号与术语．设$f: X\to E$，每个$f(x)(x\in X)$取在含于E的某向量空间中(特别，E本身可以是一向量空间)，则定义f的支集$\mathrm{supp}f$为集合

$$\mathrm{supp}f=\overline{\{x\in X\mid f(x)\neq 0\}}. \quad (1)$$

若$\mathscr{F}(X,E)$是从X到E中的一个函数集，则约定

$$\mathscr{F}_c(X,E)=\{f\in\mathscr{F}(X,E)\mid \mathrm{supp}f\text{为紧集}\}; \quad (2)$$

$$\mathscr{F}(X,n)=\mathscr{F}(X,\mathbf{C}^n),\ \mathscr{F}(X)=\mathscr{F}(X,\mathbf{C}), \quad (3)$$

有时将$\mathscr{F}_c(X,E)$或$\mathscr{F}(X,E)$简写为$\mathscr{F}_c$或$\mathscr{F}$（例如$C_c(X,E)$简写为C_c），而X,E由上下文决定．设$A,B\subset X$，记号$A\prec f$ $[f\prec B]$表示$f\in C(X,[0,1])$，$f|A=1$ $[\mathrm{supp}f\Subset B]$（依Rudin [65]）．

关于正规空间有属于Urysohn与Tietsz的以下著名结果：

1.4.7 定理 设X是T_2空间，则以下条件互相等价：(i)X正规；(ii)$A\Subset V\subset X\Rightarrow\exists f\in C(X)$：$A\prec f\prec V$；(iii)任给闭集$A\subset X$及$f\in C(A)$，$\exists g\in C(X)$：$g|A=f$且$\sup\limits_{x\in A}|f(x)|=\sup\limits_{x\in X}|g(x)|$．

证 若X正规，$A\Subset V\subset X$，则可递次取出集$U_r(r=k2^{-n}$，$k=1,2,\cdots,2^n$，$n=1,2,\cdots)$，使得$A\Subset U_r\Subset U_{r'}\Subset V(r<r')$．定义$f(x)=1-\inf\{r\mid x\in U_r\}$，则不难验证$A\prec f\prec V$．反之，$A\prec f\prec V$推出$A\Subset X(f>1/2)\Subset V$．关于(i)$\Longleftrightarrow$(iii)的证明从略，可参看[48]． □

关于LCH的以下结果可与1.4.7相对照．

1.4.8 定理 设X是LCH，$A\Subset V\subset X$，A为紧集．则(i)存在紧集W：$A\Subset W\Subset V$；(ii)$\exists f\in C_c(X)$：$A\prec f\prec V$；(iii)$\forall f$

$\in C(A)$，$\exists g\in C_c(X)$：$g|A=f$ 且 $\sup\limits_{x\in A}|f(x)|=\sup\limits_{x\in X}|g(x)|$.

证 (i)从1.4.6推出．将1.4.7用于W得$f\in C(W)$：$A<f<W$；补充定义$f|W^c=0$，则$f\in C_c(X)$，$A<f<V$．对于(iii)，由1.4.7，可设$f\in C(W)$．取$\varphi\in C(X)$：$A<\varphi<W$；令$g(x)=\varphi(x)f(x)(x\in W)$及$g|W^c=0$，则$g\in C_c(X)$，$g|A=f$．□

1.4.9 定理 设X为LCH，则存在紧T_2空间$\tilde{X}$，它以X为其子空间且$\tilde{X}\setminus X$仅含一点．这样的$\tilde{X}$在同胚的意义下是唯一的，称为X的一点紧化．

证 任取一个不在X中的元，不妨记作∞，令$\tilde{X}=X\cup\{\infty\}$．设$\tau$是$X$的开子集之全体，令$\tau'=\{\tilde{X}\setminus K|K\subset X$是紧集$\}$．以$\beta=\tau\cup\tau'$作为拓扑基在$\tilde{X}$中导入一拓扑．若$\mathscr{U}$是$\tilde{X}$的一开覆盖，则有$U_0\in\mathscr{U}$：$\infty\in U_0$；于是有紧集$K\subset X$：$\tilde{X}\setminus K\subset U_0$，取$\{U_i\}_{i=1}^n$覆盖$K$，则$\{U_i\}_{i=0}^n$覆盖$\tilde{X}$，可见$\tilde{X}$是紧的．定理的其余结论是明显的．□

1.4.10 定义 设X是LCH，E是一B-空间，$f\in C(X,E)$．若f可连续地延拓到一点紧化$X\cup\{\infty\}$上，使$f(\infty)=0$，则说"f在无穷远点为零"，这种函数之全体记作$C_0(X,E)$．

1.4.11 定理 设X是第二可数的LCH．则X可度量化；存在紧集K_n：$X=\bigcup K_n$，$K_n\Subset K_{n+1}$，$n=1,2,\cdots$（这样的$\{K_n\}$称为X中的紧集的穷竭序列）．

证 取X的可数拓扑基$\{B_n\}$．令$J=\{(m,n)|\exists f_{mn}\in C_c(X)$：$B_m<f_{mn}<B_n\}$，设当$(m,n)\in J$时$f_{mn}$已经取定．令$U_{mn}=X(f_{mn}>0)$．当$x\in B_n$时有紧集$W\subset B_n$及$B_m\subset W$：$x\in B_m$，于是1.4.8推出$(m,n)\in J$，$x\in U_{mn}\subset B_n$，可见$\{U_{mn}\}$是$X$的拓扑基．将$\{f_{mn}\}$与$\{U_{mn}\}$重新排列为$\{f_n\}$与$\{U_n\}$．

下面要利用B-空间l^2，其定义见§3.5．定义

$$\varphi: X\to l^2, x\longmapsto\left(f_1(x), \frac{1}{2}f_2(x), \cdots, \frac{1}{n}f_n(x), \cdots\right).$$

若在X中$x_k\to x$，则从不等式

$$\|\varphi(x_k)-\varphi(x)\|^2\leqslant\sum_{n<m}\frac{1}{n^2}|f_n(x_k)-f_n(x)|^2+\sum_{n>m}\frac{1}{n^2}$$

看出在l^2中$\varphi(x_k)\to\varphi(x)(k\to\infty)$. 若$x_k\not\to x$, 不妨设对某个$U_n$: $x\in U_n$, $\{x_k\}\subset U_n^c$, 于是$\|\varphi(x_k)-\varphi(x)\|\geqslant\frac{1}{n}|f_n(x)|>0$，可见在$l^2$中$\varphi(x_k)\not\to\varphi(x)$，这推出$\varphi$为单射且双向连续. 因此$\varphi$是一拓扑嵌入，$X$作为$l^2$的子空间是可度量化的.

令$K_1=\bar{U}_1$（注意$\bar{U}_n=\mathrm{supp}f_n$是紧集）；取最小的$n$，使得$K_1\subset\bigcup_1^n U_i$；令$K_2=\bigcup_1^n\bar{U}_i, \cdots$，如此得到所要求的$\{K_n\}$. □

推论 若X是第二可数的LCH, 则X有由相对紧集组成的可数拓扑基；X是可数个紧集之并（有这种性质的空间或点集称为σ-紧的）.

1.4.12 定义 称X的一子集族$\{A_\alpha\}$局部有限，若每点$x\in X$有一邻域至多与有限个A_α相交.

局部有限族在许多方面类似于有限族. 例如，若$\{A_\alpha\}$局部有限，则$\overline{\bigcup A_\alpha}=\bigcup\bar{A}_\alpha$；若$\{f_\alpha\}\subset C(X)$, $\{\mathrm{supp}f_\alpha\}$局部有限，则$f=\sum f_\alpha\in C(X)$（它局部地是有限和）.

1.4.13 单位分解定理 设X是第二可数的LCH, $\{W_\alpha\}$是X中一族开集，它覆盖闭集$A\subset X$. 则存在$\{\lambda_\alpha\}\subset C(X)$，使得$\lambda_\alpha\prec W_\alpha$, $\{\mathrm{supp}\lambda_\alpha\}$局部有限，$\sum\lambda_\alpha\leqslant 1$, $\sum\lambda_\alpha|A=1$. 这样的$\{\lambda_\alpha\}$称为A上从属于$\{W_\alpha\}$的一个**单位分解**.

证 可设$A=X$（一般情况可从考虑X的开覆盖$\{W_\alpha\}\cup\{A^c\}$得出）. 设$\{K_n\}$如1.4.11，令$A_{n\alpha}=W_\alpha\cap(K_{n+2}^\circ\setminus K_{n-1})$（约定$K_0=\varnothing$）. $\forall x\in A_{n\alpha}$，取x的紧邻域$V_{n\alpha x}\Subset A_{n\alpha}$. 固定$n$而取遍$\alpha$，从所得$\{V_{n\alpha x}\}$中取出有限个，记作$\{V_i\}$，使得$K_{n+1}\setminus$

$K_n^\circ \subset \bigcup V_i, V_i \Subset U_i, U_i$等于某个$A_{n\alpha}$. 然后遍取$n$，将所得的可数个集重新排列为$\{V_i\}$与$\{U_i\}$，显然$X=\bigcup V_i$，$\{U_i\}$ 是局部有限的.

由1.4.8, $\forall i, \exists g_i \in C_c(X)$: $V_i \prec g_i \prec U_i$. 于是$g=\sum g_i \in C(X), g>0, f_i = g_i/g \in C_c(X)$, $f_i \prec U_i$, $\sum f_i = 1$. 对每个i取定α_i: $U_i \subset W_{\alpha_i}$. 令$\lambda_\alpha = \sum\limits_{\alpha_i=\alpha} f_i$, 当$\{i \mid \alpha_i = \alpha\} = \varnothing$时令$\lambda_\alpha = 0$,

则$0 \leqslant \lambda_\alpha \in C(X)$,

$$\operatorname{supp}\lambda_\alpha = \bigcup_{\alpha_i=\alpha} \overline{X(f_i \neq 0)} = \bigcup_{\alpha_i=\alpha} \operatorname{supp} f_i \subset W_\alpha$$

($\lambda_\alpha = 0$ 时自然 $\operatorname{supp}\lambda_\alpha \subset W_\alpha$). 从$\{\operatorname{supp} f_i\}$局部有限直接推出$\{\operatorname{supp}\lambda_\alpha\}$局部有限，于是$\sum\limits_\alpha \lambda_\alpha = \sum\limits_i f_i = 1$. □

1.4.14 定理 设X是 TVS, 则以下条件互相等价：(i)$\dim X < \infty$; (ii)X拓扑同构于某个$\mathbf{C}^n$; (iii)X是LCH.

证 (i)⇒(ii), 取X的一组基$\{e_1, \cdots, e_n\}$，则$f: \mathbf{C}^n \to X$, $(\xi_1, \cdots, \xi_n) \longmapsto \sum \xi_j e_j$是一连续的线性同构. 令$B = \{\xi \in \mathbf{C}^n \mid |\xi| \leqslant 1\}$. 因$S = \partial B$是紧集，故有平衡的 0-邻域$V \subset X$: $f(S) \cap V = \varnothing$. 若$\exists \xi \in \mathbf{C}^n$: $|\xi| > 1$, $x = f(\xi) \in V$; 则$x/|\xi| = f(\xi/|\xi|) \in f(S) \cap V$，这个矛盾表明$V \subset f(B)$，可见$f^{-1}$连续.

显然(ii)⇒(iii), 今证(iii)⇒(i). 取X的平衡的紧0-邻域V，则有有限集$A \subset X$: $V \subset A + \frac{1}{2}V$. A生成X的有限维子空间B. 由已证结论，B必是闭的. 从$V \subset B + \frac{1}{2}V$ 归纳地推出$V \subset B + 2^{-n}V\ (n = 1, 2, \cdots)$，因此 $V \subset \bigcap (B + 2^{-n}V) = \overline{B} = B$, 于是1.4.4推出 $B = X$. □

1.4.14 表明每个有限维向量空间有唯一的方式定义为TVS, 今后涉及的有限维向量空间将自动地看作TVS.

参考文献：[25]，[48]，[64]，[65]，[82]，[85]．

习　题

1．无限维F-空间不存在代数意义下的可数基．

2．设X是TVS，$V\subset X$是紧0-邻域，则对任给$B\subset X$有$\overline{B}=\bigcap(B+2^{-n}V)$．

§5　积与商

本节依次从集论的、拓扑的、代数的及拓扑代数的观点处理积与商的构造．

1.5.1 定义　给定集族$\{X_i|i\in I\}$．

1°　定义$\{X_i\}$的积集$X=\prod X_i$为以下集合：

$$X=\{x:I\to\bigcup X_i|\ \forall i\in I,\ x(i)\in X_i\}. \qquad (1)$$

约定$x_i=x(i)(x\in X,i\in I)$，记x为(x_i)；称映射$p_i:X\to X_i$，$x\longmapsto x_i$为投影．若$\forall i\in I$，$X_i=Y$，则记$\prod X_i$为Y^I．

2°　设$\{(X_i,\tau_i)\}$是一族拓扑空间，以$\beta=\{p_i^{-1}V\,|\,V\in\tau_i,\ i\in I\}$作为拓扑子基在$X=\prod X_i$上决定一拓扑$\tau$，称为积拓扑，称$(X,\tau)$为$\{X_i\}$的积空间．

3°　设$\{X_i\}$是一族（乘法）群，则$X=\prod X_i$依乘法$(x_i)\cdot(y_i)=(x_iy_i)$是一个群，称为$\{X_i\}$的积群．积向量空间的定义仿此．若$\{X_i\}$是一族加群[向量空间]，则称

$$\bigoplus X_i=\{x\in\prod X_i\,|\,除有限个i外，x_i=0\} \qquad (2)$$

为$\{X_i\}$的直和．若$X_1,\cdots,X_n$是加群[向量空间]X的子群[子空间]，每个$x\in X$有唯一分解$x=\sum x_i$，$x_i\in X_i$，则$X\cong\prod X_i=\bigoplus X_i$，故也说$X$是$\{X_i\}$的直和，写作$X=\bigoplus X_i=X_1\oplus\cdots\oplus X_n$。

积拓扑有一些良好的性质．

1.5.2 定理　设X是拓扑空间族$\{(X_i,\tau_i)\}$的积空间．则

(i) 投影 $p_i: X\to X_i$ 皆为连续开映射；(ii) 任给网 $\{x^t\}\subset X$：$x^t\to x\Longleftrightarrow\forall i\in I$：$x_i^t\to x_i$；(iii) 任给拓扑空间 T 与映射 $f: T\to X$，$t\mapsto(f_i(t))$，$f\in C(T,X)\Longleftrightarrow\forall i\in I$：$f_i\in C(T,X_i)$.

证 (i) 显然 p_i 连续. p_i 为开映射基于等式：

$$p_i\left(\bigcap_{k=1}^{n}p_{i_k}^{-1}A_k\right)=\begin{cases}A_k, & i=i_k;\\ X_i, & i\neq i_1,\cdots,i_n.\end{cases}$$

(ii) 显然 $x^t\to x\Rightarrow x_i^t\to x_i$. 设 $\forall i\in I$，$x_i^t\to x_i$，$x=(x_i)\in p_i^{-1}V$，$V\in\tau_i$，则 $\exists t_0$，$\forall t\geqslant t_0$：$x_i^t\in V$，即 $x\in p_i^{-1}V$，可见 $x^t\to x$.

(iii) 设 $\forall i\in I$：$f_i\in C(T,X_i)$，则 $\forall i\in I$，$\forall V\in\tau_i$：$f^{-1}(p_i^{-1}V)=f_i^{-1}V$ 是 T 的开子集，因此 $f\in C(T,X)$ (1.1.11). 其逆显然. □

不难证明：任意个 T_2[正则、连通]空间的积空间是 T_2[正则、连通]空间. 更有意义的结果是：

1.5.3 Tychonoff定理 任意个紧空间的积空间是紧的.

关于1.5.3的证明可参看[48].

若每个 X_i 中有两种"相容"的结构，则在 $\prod X_i$ 中相应的"积结构"的相容性问题一般有肯定解答. 例如，若每个 X_i 是TVS（这意味着 X_i 中的拓扑结构与向量空间结构相容），则 $\prod X_i$ 依其积拓扑与积向量空间结构是一TVS，且当 X_i 皆完备时 $\prod X_i$ 亦完备（这颇类似于1.5.3，但证明容易得多）. 若 $\{X_i\}$ 是可数个 F-赋范空间[有限个赋范空间]，则 $\prod X_i$ 的拓扑可决定于一 F-范数[范数]，例如可令 $\|(x_i)\|=\sum\frac{1}{2^i}\frac{\|x_i\|_i}{1+\|x_i\|_i}$ [$\|(x_i)\|=\sum\|x_i\|_i$ 或 $\max\|x_i\|_i$，这种范数概称积范数]，其中 $\|\cdot\|_i$ 是 X_i 中的 F-范数[范数]. 若 $\{X_i\}$ 是一族 TVS，$X=\prod X_i$，则投影 $p_i: X\to X_i$ 与嵌入 $\theta_i: X_i\to X$ 皆为连续线性算子，θ_i 由条件"$p_i\circ\theta_i=\mathrm{id}$，$i\neq j$ 时 $p_i\circ\theta_j=0$"决定. 对于"积拓扑群"可建立类似结论.

在某种意义上，"商"是与"积"相对立的概念。

1.5.4 定义 给定非空集X与关系$R\subset X\times X$。

1° 以$x\sim y$记$(x,y)\in R$。若(i)$\forall x\in X$，$x\sim x$；(ii)$x\sim y\Rightarrow y\sim x$；(iii)$x\sim y\sim z\Rightarrow x\sim z$，则说$R$或$\sim$是$X$上一等价关系，称$R(x)$（通常写作$\bar{x}$或$\dot{x}$，$[x]$）为含$x$的等价类，所有等价类之集称为$X$（模$R$）的商集，记作$X/R$或$X/\sim$；称映射$p: X\to X/R$，$x\longmapsto\bar{x}$为投影。

2° 设(X,τ)是一拓扑空间，R是一等价关系，$p: X\to X/R$为投影。则$\bar{\tau}=\{B\subset X/R\mid p^{-1}B\in\tau\}$是$X/R$上一拓扑，称为商拓扑；称$(X/R,\bar{\tau})$为$X$的商(拓扑)空间。若$f: X\to Y$是拓扑空间之间的一满射，$\forall B\subset Y$：$B$是开集$\Longleftrightarrow f^{-1}B\subset X$是开集，则说$f$是**商映射**。于是$X/R$上的商拓扑是"$X/R$上使投影$p$为商映射的唯一拓扑"。通常说$X/R$是"粘合"$X$中互相等价的点而得之空间。

3° 若X是一个群，$A\subset X$是一子群，$x\sim y\Longleftrightarrow xA=yA$（$\Longleftrightarrow x^{-1}y\in A$），则$\sim$是一等价关系，记$X/\sim$为$X/A$，$X/A$就是所有左陪集$xA(x\in X)$之集，称为左陪集空间。若$\forall x\in X$：$xA=Ax$，则称$A$为$X$的正规子群，此时$X/A$依运算$xA\cdot yA=xyA$成为一个群，称为$X$（模$A$）的商群；通常用$x\equiv y\,(\mathrm{mod}A)$表示$x^{-1}y\in A$。若$X$是一向量空间，$A\subset X$是一子空间，$X/A$是将$X$当作加群时的商群，则$X/A$依数乘$\alpha(x+A)=\alpha x+A(\alpha\in\mathbb{C},x\in X)$是一向量空间，称为$X$(模$A$)的商空间。若$X$是一代数，$A\subset X$是一子代数，$XA\subset A$，$AX\subset A$，则称$A$为$X$的一个（双边）理想，此时商空间$X/A$（视$X$为向量空间）依乘法$(x+A)(y+A)=xy+A(x,y\in X)$是一代数，称为$X$的商代数或同余类代数。

关于商结构的"相容性"有以下结果。

1.5.5 定理 设X是一拓扑群[TVS，拓扑代数]，$A\subset X$是

一闭正规子群[闭子空间，闭理想]，则商群[商空间，商代数] X/A 依商拓扑是一拓扑群[TVS，拓扑代数]，投影 $p: X\to X/A$ 为开的连续同态．若 X 是一赋范空间[赋范代数]，$A\subset X$ 是一闭子空间[闭理想]，定义商范数 $\|\tilde{x}\|=\inf_{x\in\tilde{x}}\|x\|(\tilde{x}\in X/A)$，则 X/A 依商范数是一赋范空间 [赋范代数]；当 X 完备时 X/A 亦完备．

证　对定理前一半只考虑拓扑群的情况．任给开集 $V\subset X$，$p^{-1}pV=\bigcup_{x\in A}xV$ 为开集，因而 $pV\subset X/A$ 是开集，可见 p 是开映射．$\forall x,y\in X$，设 $W\subset X/A$ 是 $\tilde{x}\tilde{y}^{-1}$ 的邻域，分别取 x,y 的邻域 U,V，使 $UV^{-1}\subset p^{-1}W$，则 pU,pV 分别为 $\tilde{x},\tilde{y}$ 的邻域，$pU\cdot(pV)^{-1}=p(UV^{-1})\subset W$，可见 X/A 中的运算 $(\tilde{x},\tilde{y})\longmapsto\tilde{x}\tilde{y}^{-1}$ 连续．若 $\tilde{x}\neq\tilde{y}$，则 $x^{-1}y\overline{\in}A$，于是有单位元 e 的邻域 V，$x^{-1}Vy\subset A^c$．取 e 的邻域 U：$U^{-1}U\subset V$，则 $p(Ux)$ 与 $p(Uy)$ 分别为 $\tilde{x},\tilde{y}$ 的邻域且互不相交．这就证明了 X/A 是一拓扑群．

其次证定理后一半．不难验证 $\|\tilde{x}\|$ 确为范数，且当 X 是赋范代数时 $\|\tilde{x}\tilde{y}\|\leqslant\|\tilde{x}\|\|\tilde{y}\|$．因 $\|\tilde{x}\|<r\Longleftrightarrow\exists y\in\tilde{x}$：$\|y\|<r$，故 X/A 采用商范数时投影 p 是连续开映射，因而商范数决定商拓扑．若 X 完备，$\{\tilde{x}_n\}\subset X/A$ 是一Cauchy列，不妨设 $\|\tilde{x}_{n+1}-\tilde{x}_n\|<2^{-n}(n=1,2,\cdots)$．取 $y_1\in\tilde{x}_1$，次取 $y_2\in\tilde{x}_2$：$\|y_2-y_1\|<1$；再取 $y_3\in\tilde{x}_3$：$\|y_3-y_2\|<1/2,\cdots$，如此得Cauchy列 $\{y_n\}\subset X$，$y_n\in\tilde{x}_n$．设 $y_n\to y$，则 $\tilde{x}_n\to\tilde{y}$．□

商结构往往由某个"同态"导出．以下的一组结论可概称之为**同态定理**．

1.5.6 定理　设 $f: X\to Y$ 是一满射，$x\sim y\Longleftrightarrow f(x)=f(y)$．

1°　$\sim$ 是 X 上一等价关系，

$$g: X/\sim\to Y,\ p(x)\longmapsto f(x) \tag{3}$$

是一双射，$g\circ p=f$，其中 $p: X\to X/\sim$ 是投影．

2°　若 X,Y 是拓扑空间，f 是商映射，$X/\sim$ 中采用商拓

扑，则(3)是一同胚。

3° 若f是一群同态[线性同态，代数同态]，则Ker$f$是X的正规子群[子空间，理想]，$X/\sim=X/\mathrm{Ker}f$，且(3)是一群同构[线性同构，代数同构]。

4° 若3°中的f同时是连续开映射，X,Y是拓扑群[TVS，拓扑代数]，则Ker$f$是闭的，(3)为拓扑同构。

证 1°,3°是显然的。对于2°，任给开集$G\subset X/\sim$与开集$B\subset Y$，因$f^{-1}g(G)=p^{-1}G$与$f^{-1}B=p^{-1}g^{-1}B$皆为X的开子集，故gG与$g^{-1}B$分别为Y与$X/\sim$的开子集，可见g是同胚。4°直接从2°,3°推出。 □

1.5.6中的$X/\sim$与Y可等同地看作X的同一商集（或商群、商空间、商代数等）。容易验证开（或闭）的连续满射必为商映射。故当$X=\prod X_i$是积拓扑空间[积TVS]时，投影p_i：$X\to X_i$满足1.5.6之2°[4°]的条件，因此可以说X_i是X的商空间。这样，"积"与"商"在字面上的对立就获得了确切的含义。

若$X=A\oplus B$是向量空间，则从1.5.6之3°推出$X/A\cong B$。当X是TVS且拓扑同构于$A\times B$时称$A\oplus B$为**拓扑直和**。

1.5.7 定理 设X是一TVS，$X=A\oplus B$，$p: a+b\longmapsto a$，q：$a+b\longmapsto b$ $(a\in A, b\in B)$。则 (i) $A\oplus B$是拓扑直和$\Longleftrightarrow p,q$连续；(ii) 若$A\oplus B$为拓扑直和，则A，B为闭子空间，$X/A\cong B$（拓扑同构）；(iii) 若A是闭的，$\dim B<\infty$，则$A\oplus B$是拓扑直和。

证 (i) 若$A\oplus B$是拓扑直和，则p,q显然是开的连续线性满射。反之若p,q连续，则$f: A\times B\to X$，$(a,b)\longmapsto a+b$必为拓扑同构(参考1.5.2)。(ii)由1.5.6之4°，$X/A=X/\mathrm{Ker}q\cong B$。(iii) 设$\pi: X\to X/A$为投影，$\varphi: X/A\to B$，$A+b\longmapsto b$ $(b\in B)$，则φ连续(1.4.14)，于是$q=\varphi\circ\pi$及$p=I-q$连续，$I=1_X$，

$A \oplus B$是拓扑直和. □

1.5.8 定义 设X是一向量空间[代数], $A \subset X$是一子空间[理想], $A \neq X$. 若除X, A之外X中不再有包含A的子空间[理想], 则称A为X的**极大子空间**[极大理想]. 极大子空间的平移象称为**超平面**.

1.5.9 定理 设A是向量空间X的子空间, B是含单位元e的交换代数Y的理想. 则(i)A是极大子空间$\Longleftrightarrow X/A \cong \mathrm{C} \Longleftrightarrow \exists f \in X^* \setminus 0 : A = \mathrm{Ker} f$; (ii) 若$X$是TVS, 则$A$是闭的极大子空间$\Longleftrightarrow X/A \cong \mathrm{C}$ (拓扑同构) $\Longleftrightarrow \exists f \in X' \setminus 0$: $A = \mathrm{Ker} f$; (iii)B是极大理想$\Longleftrightarrow Y/B$是一个域, 即其非零元皆可逆.

证 (i) 若A是极大子空间, 取$x_0 \in X \setminus A$, 则必$X = A \oplus \mathrm{C}x_0$, 于是$X \setminus A \cong \mathrm{C}$. 其次设有$\varphi : X/A \cong \mathrm{C}$, $p : X \to X/A$为投影, 则$f = \varphi \circ p \in X^* \setminus 0$, $\mathrm{Ker} f = A$. 最后, 任给$f \in X^* \setminus 0$, 若$A = \mathrm{Ker} f$, 取$x_0 \in X \setminus A$, 则从分解

$$x = \left[x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0\right] + \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0, \quad x \in X$$

看出$X = A \oplus \mathrm{C}x_0$, 从而$A$是极大子空间.

(ii) 的证明类似于(i) (利用1.5.7).

(iii) 若B是极大理想, 取$x \in Y \setminus B$, 则$I = B + xY$是以B为真子集的理想, 从而$I = Y$. 于是$\exists b \in B$, $y \in Y$: $e = b + xy$, 由此推出$\tilde{y} \in Y/B$是$\tilde{x}$的逆. 若B非极大理想, 则有理想$J \supset B$: $B \neq J \neq Y$. 取$x \in J \setminus B$, 由$xY + B \subset J$推出$\forall y \in Y$, 在Y/B中$\tilde{x}\tilde{y} \neq \tilde{e}$, $\tilde{x}$不可逆. □

参考文献: [22], [25], [39], [48], [50], [64], [78], [82].

习 题

1. 连续开[闭]满射是商映射.
2. LCS[F-空间]的商空间是LCS[F-空间].
3. 设A, B是TVS X的闭子空间, $\dim B < \infty$, 则$A + B$是闭的.

§6 连续线性算子

设X,Y为TVS，以$L(X,Y)$记从X到Y的连续线性算子之全体，它依自然的运算成为一个向量空间，而$L(X)=L(X,X)$以算子复合作为“乘法”是以1_X为单位元的代数．若X,Y是赋范空间，则$L(X,Y)$[$L(X)$]依范数$\|T\|=\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|$是一赋范空间[赋范代数]，当$Y$是$B$-空间时可验证$L(X,Y)$[$L(Y)$]是$B$-空间[$B$-代数]，特别$X'$是$B$-空间．

给定线性算子$T: X\to Y$．若T映有界集为有界集，则称T为**有界算子**．显然T连续$\Rightarrow T$有界；当X可度量化时其逆亦真：取X的0-邻域基$U_1\supset U_2\supset\cdots$，若$T$不连续，则有$Y$的平衡0-邻域$V$及$x_n\in\frac{1}{n}U_n$：$Tx_n\overline{\in}V(n=1,2,\cdots)$，于是$\{T(nx_n)\}$无界，$nx_n\to 0$，$T$非有界算子．若$X,Y$为LCS且分别有基本半范族$\{\|x\|_\alpha\}$与$\{\|y\|_\beta\}$，则

$$T\text{连续}\Longleftrightarrow\forall\beta,\exists\alpha,\exists C>0,\forall x\in X:\|Tx\|_\beta\leqslant C\|x\|_\alpha. \tag{1}$$

特别，若f是X上的线性泛函，则

$$f\in X'\Longleftrightarrow\exists\alpha,\exists C>0,\forall x\in X:|f(x)|\leqslant C\|x\|_\alpha. \tag{2}$$

下面建立关于线性算子的几个基本定理．

1.6.1 定理 设X是F-空间，Y是TVS，$R\subset X\times Y$是一闭子空间．若$R(X)$（记号依1.1.1，R看作二元关系）是Y中的非瘦集，则$R(X)=Y$，且对$D=R^{-1}(Y)$的任何开子集U，$R(U)$是Y的开子集．

证 设$\|x\|$是X中的F-范数，约定$B(x,r)=\{v\in X\mid\|v-x\|<r\}$，$D(x,r)=D\cap B(x,r)$．任给$r>0$，由$R(X)=\bigcup_1^\infty n\cdot R(D(0,r/4))$推出$R(D(0,r/4))$非疏集，于是有$Y$的平衡0-邻

域V及 $b\in Y$：$b+V\subset\overline{R(D(0,r/4))}$，从而

$$V\subset\overline{R(D(0,r/4))}-\overline{R(D(0,r/4))}\subset\overline{R(D(0,r/2))}.$$

取定$y\in\overline{R(D(0,r))}$，必有$x_1\in D(0,r)$及$y_1\in(y+V)\cap R(x_1)$，于是$y-y_1\in V\subset\overline{R(D(0,r/2))}$.以$y-y_1$，$r/2$分别代替$y$，$r$，重复以上论证，可取出$x_2\in D(0,r/2)$，$y_2\in R(x_2)$，使得$y-y_1-y_2\in\overline{R(D(0,r/4))}$．如此继续，得$x_n\in D(0,r2^{1-n})$，$y_n\in R(x_n)$，使得$y-y_1-\cdots-y_n\in\overline{R(D(0,r2^{-n}))}$，$n=1,2,\cdots$．令$s_n=x_1+\cdots+x_n$，$z_n=y_1+\cdots+y_n$，则$s_n\to x\in B(0,2r)$，$z_n\in R(s_n)$．任给$(x,y)$的邻域$B(x,\varepsilon)\times W$，取$n$充分大，使得$s_n\in B(x,\varepsilon/2)$，$r2^{-n}<\varepsilon/2$．因$W-z_n$是$y-z_n$的邻域，故有$u\in D(0,r2^{-n})$，$z\in(W-z_n)\cap R(u)$，于是$(s_n+u,z_n+z)\in R\cap(B(x,\varepsilon)\times W)$．因$R$是闭的，故$(x,y)\in R$，$y\in R(x)\subset R(D(0,2r))$，因此$\overline{R(D(0,r))}\subset R(D(0,2r))$．

设U是D的开子集，$y\in R(U)$，可设$y\in R(x)$，$U\supset D(x,2r)$，于是从$V\subset\overline{R(D(0,r))}\subset R(D(0,2r))$推出

$$y+V\subset R(x)+R(D(0,2r))\subset R(D(x,2r))\subset R(U),$$

可见$R(U)$是开集.$R(X)$是开子空间推出$R(X)=Y$(1.4.4).□

若$T:D\subset X\to Y$是一线性算子，其“图象”$G(T)=\{(x,Tx)|x\in D\}$是$X\times Y$的闭子空间，则称T为闭算子．分别令1.6.1中的R为$G(T)$与$G(T)^{-1}$（依1.1.1）得到：

推论 1（开映射定理） 设X,Y是F-空间.若$T\in L(X,Y)$，$TX=Y$（或$TX\subset Y$非瘦集)，则T是开映射；若$T\in L(X,Y)$是双射，则它必为拓扑同构.

推论 2（闭图象定理）设X为TVS，Y为F-空间，$T:D\subset X\to Y$是一闭线性算子，D非瘦集，则$D=X$，$T\in L(X,Y)$.若X,Y为F-空间，线性算子$T:X\to Y$满足条件“$x_n\to x,Tx_n\to y\Rightarrow y=Tx$”，则$T\in L(X,Y)$.

任给$F\subset L(X,Y)$，$A\subset X$，令

$$F(A)=\{Tx \mid T\in F, x\in A\}. \qquad (3)$$

1.6.2 定义 设$F\subset L(X,Y)$. 若$A\subset X$, $F(A)$在Y中有界，则说F在A上一致有界；若F在每个有界集$A\subset X$上一致有界，则说F一致有界. 若任给0-邻域$V\subset Y$,存在0-邻域$U\subset X$: $F(U)\subset V$，则说F**等度连续**.

1.6.3 引理 设$F\subset L(X,Y)$,给定条件：(i) F在某0-邻域$U\subset X$上一致有界；(ii)F等度连续；(iii)F一致有界. 则(i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii)；当Y是赋范空间时(i)$\Longleftrightarrow$(ii)；当X可度量化且Y是赋范空间时(i)$\Longleftrightarrow$(ii)$\Longleftrightarrow$(iii)；当X,Y皆为赋范空间时(i)$\Longleftrightarrow$(ii)$\Longleftrightarrow$(iii)$\Longleftrightarrow \sup\{\|T\| \mid T\in F\}<\infty$.

证 设$U_1\supset U_2\supset\cdots$是$X$的0-邻域基. 若每个$F(U_n)$无界，$Y$是赋范空间，则$\forall n$, $\exists T_n\in F$, $x_n\in U_n$: $\|T_nx_n\|\geqslant n$, 于是$x_n\to 0$, $F(\{x_n\})$无界，可见(iii)$\Rightarrow$(i). 其它结论是明显的. □

1.6.4 一致有界原理 设X,Y是TVS, $F\subset L(X,Y)$, $D\subset X$, $\forall x\in D$: $F(x)\subset Y$有界. (i) 若D非瘦集，则F等度连续；(ii) 若D为紧凸集，则$F(D)\subset Y$有界.

证 任给0-邻域$V\subset Y$，取闭平衡0-邻域$W\subset Y$: $W-W\subset V$. 令$D_n=\bigcap_{T\in F}nT^{-1}W$，则$D_n$是闭集且$D\subset\bigcup_1^\infty D_n$.

(i) 若D非瘦集，则某个D_n含一内点a. 取0-邻域$U\subset X$，使得$a+nU\subset D_n$，则

$$F(U)\subset\frac{1}{n}[F(D_n)-F(a)]\subset\frac{1}{n}(nW-nW)\subset V.$$

(ii) 若D为紧凸集，则$\exists n$: $D\cap D_n$在D中有一内点a(1.3.8). 取平衡0-邻域$U\subset X$,使得$D\cap(a+U)\subset D_n$. 易见D有界，故有$\beta>1$: $D\subset a+\beta U$. 于是

$$\begin{aligned}D&=\beta[(1-\beta^{-1})a+\beta^{-1}D]-(\beta-1)a\\&\subset\beta[D\cap(a+U)]-(\beta-1)D_n\subset\beta D_n-(\beta-1)D_n,\end{aligned}$$

因此 $$F(D)\subset\beta F(D_n)-(\beta-1)F(D_n)\subset\beta n(W-W)$$

$$\subset \beta n V. \qquad \square$$

推论 设X为B-空间，Y为赋范空间，$\{T_\alpha\}\subset L(X,Y)$。若$\forall x\in X$：$\sup\limits_\alpha\|T_\alpha x\|<\infty$，则$\sup\limits_\alpha\|T_\alpha\|<\infty$；若$\sup\limits_\alpha\|T_\alpha\|=\infty$，则$A=\{x|\sup\limits_\alpha\|T_\alpha x\|=\infty\}=\bigcap\limits_n\{x|\ \exists\alpha:\ \|T_\alpha x\|>n\}$ 是X中的稠密G_δ集。

1.6.5 定理 设X,Y是F-空间，$D\subset X$是一稠密子空间，$T\in L(D,Y)$。则存在唯一的$T_1\in L(X,Y)$：$T_1|D=T$；当X，Y是B-空间时$\|T_1\|=\sup\{\|Tx\|\,|x\in D,\|x\|\leqslant 1\}$。

证 取定X,Y的可数基本半范族$\{\|x\|_n\}$与$\{\|y\|_k\}$。由(1)，$\forall k$，$\exists n(k)$，$\exists C_k>0$，$\forall x\in D$：$\|Tx\|_k\leqslant C_k\|x\|_{n(k)}$。任给$x\in D$，取$\{x_i\}\subset D$：$x_i\to x$。因$\|Tx_i-Tx_j\|_k\leqslant C_k\|x_i-x_j\|_{n(k)}\to 0$ $(i,\ j\to\infty)$，故$\{Tx_i\}$ 是Y中的Cauchy列，因此存在$T_1x=\lim\limits_i Tx_i$。T_1x与$\{x_i\}$的选取无关：若$x_i\to x$，$y_i\to x$，$\{z_i\}=\{x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots\}$，则$\lim\limits_i Tx_i=\lim\limits_i Tz_i=\lim\limits_i Ty_i$。显然$T_1|D=T$，且$T_1$由$T$唯一决定。设$x_i\to x$，$\{x_i\}\subset D$，则从$\|Tx_i\|_k\leqslant C_k\|x_i\|_{n(k)}$推出

$$\|T_1x\|_k\leqslant C_k\|x\|_{n(k)},\ x\in X,\ k=1,2,\cdots, \qquad (4)$$

可见$T_1\in L(X,Y)$。定理的后一结论从(4)推出。 $\square$

今后只要1.6.5的条件满足，就直接认为$T\in L(X,Y)$。

1.6.6 定义 称映有界集为相对紧集的线性算子为紧算子。

显然有有限维值域的线性连续算子(称有限秩算子)是紧算子；紧算子与连续线性算子之复合是紧算子。

1.6.7 定理 设X,Y是B-空间，则从X到Y的所有紧算子构成一B-空间（约定记作$K(X,Y)$）。

证 只需指明$K(X,Y)$在$L(X,Y)$中是闭的。设$T\in L(X,Y)$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists T_\varepsilon\in K(X,Y)$：$\|T_\varepsilon-T\|<\varepsilon/2$。令$B=$

$B(0,1)\subset X$. 因$T_\varepsilon B$全有界(1.3.4之推论), 故有有限集$F\subset Y$: $T_\varepsilon B\subset F+B(0,\ \varepsilon/2)$, 因此 $TB\subset(T-T_\varepsilon)(B)+T_\varepsilon B\subset F+B(0,\varepsilon)$, 这表明$TB$全有界 ($\Longleftrightarrow$相对紧), 于是$T\in K(X,Y)$. □

设$X_1,\cdots,X_n,Y$是TVS. 若一算子$T(x_1,\cdots,x_n): X_1\times\cdots\times X_n\to Y$对每个变元$x_i$是线性的, 则称它为$n$重线性算子, $n=2$时称作双线性算子. 从$X_1\times\cdots\times X_n$到$Y$的连续$n$重线性算子之全体记作$L(X_1,\cdots,X_n;Y)$, 令$L^n(X,Y)=L(\overbrace{X,\cdots,X}^{n个};Y)$. 若$T\in L^n(X,Y)$, $T(x_1,\cdots,x_n)$ (通常写作$Tx_1\cdots x_n$) 中任一对变元对调后其值不变[前置负号], 则称T是对称[反称]的; 令

$$L_s^n(X,Y)=\{T\in L^n(X,Y)\,|\,T对称\}. \qquad (5)$$

若$X_1,\cdots,X_n,Y$是赋范空间, 则$L(X_1,\cdots,X_n;Y)$如同$L(X_1,Y)$一样具有自然的赋范空间结构; 任给$T\in L(X_1,\cdots,X_n;Y)$,

$$\|T\|=\sup_{\|x_1\|\leqslant 1,\cdots,\|x_n\|\leqslant 1}\|T(x_1,\cdots,x_n)\|, \qquad (6)$$

于是$\|T(x_1,\cdots,x_n)\|\leqslant\|T\|\|x_1\|\cdots\|x_n\|(x_i\in X_i,1\leqslant i\leqslant n)$. 当$Y$完备时$L(X_1,\cdots,X_n;\ Y)$是一$B$-空间.

以下是连续双线性算子的几个典型例子:

$$L(X,Y)\times X\to Y,(T,x)\longmapsto Tx;$$
$$L(Y,Z)\times L(X,Y)\to L(X,Z),(S,T)\longmapsto S\circ T;$$
$$M_{mn}\times M_{np}\to M_{mp},(a,b)\longmapsto ab,$$

其中X,Y,Z是赋范空间, $M_{mn}=L(\mathrm{C}^n,\mathrm{C}^m)$.

1.6.8 定理 设X是F-空间, Y是可度量化的TVS, Z是TVS, $T: X\times Y\to Z$是一双线性算子. 若$T(x,y)$分别对x,y连续, 则$T\in L(X,Y;Z)$.

证 设在$X\times Y$中$(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)$. 令$T_n(x)=T(x,y_n)$ $(x\in X,n=1,2,\cdots)$, 则$\{T_n\}\subset L(X,Z)$. 因$\forall x\in X$: $\lim\limits_n T_n(x)$

存在，故$\{T_n\}$等度连续(1.6.4)．任给0-邻域$W\subset Z$，取0-邻域$U\subset X$：$T_n(U)=T(U\times y_n)\subset W$ $(n=1,2,\cdots)$．当n充分大时，$x_n\in x_0+U$，$T(x_0,y_n)\in T(x_0,y_0)+W$，于是

$$T(x_n,y_n)\in T(x_0,y_n)+T(U\times y_n)\subset T(x_0,y_0)+W+W,$$

可见$T(x_n,y_n)\to T(x_0,y_0)$，从而$T\in L(X,Y;Z)$． □

参考文献：[22]，[39]，[43]，[50]，[64]，[78]，[85]．

习 题

1．任给多项式$P(x)=\sum_0^n\lambda_k x^k$ ($\lambda_k\in\mathbb{C}$，n固定)，成立$\sum|\lambda_k|\leqslant C\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|P(x)|$，$C$与$P$无关。

2．设$X=A\oplus B$是F-空间，A，B是X的闭子空间，则$A\oplus B$是拓扑直和。

§7 Hahn-Banach定理

对于一个TVS X，一个首要的问题是：X的拓扑对偶X'是否含有"足够多"的元素？下面一组统称为Hahn-Banach定理的结果对此作了令人满意的解答．首先指出，若$f\in X^*$，则$\varphi=\mathrm{Re}f$是X上的实线性泛函且$f(x)=\varphi(x)-i\varphi(ix)$，$f$连续$\Longleftrightarrow\varphi$连续．若$p$：$X\to\mathbb{R}$满足$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$，$p(\alpha x)=\alpha p(x)$ $(x,y\in X,\alpha\geqslant 0)$，则称$p$为$X$上的Minkowski泛函．

1.7.1 定理 设p是X上的一个Minkowski泛函[半范]，$A\subset X$是一实[复]子空间，$f\in A^*$满足$f\leqslant p$ [$|f|\leqslant p$]．则存在X上的实[复]线性泛函g：$g|A=f$，$-p(-x)\leqslant g(x)\leqslant p(x)$ [$|g|\leqslant p$]．

证 令M是"对"(B,g)之全体，其中B是X的实子空间，$A\subset B$，$g\in B^*$，$g|A=f$，$-p(-x)\leqslant g(x)\leqslant p(x)$ $(x\in B)$．M依自然的包含成一偏序集，不难看出可对它应用Zorn引理得出一极大元(B,g)，只需证$B=X$．假定存在$a\in X\setminus B$，从不等式$g(x)$

$+g(y)\leqslant p(x+y)\leqslant p(x+a)+p(y-a)$ $(x,y\in B)$ 推出：存在 $r\in\mathrm{R}$，使得

$$\sup_{y\in B}[g(y)-p(y-a)]\leqslant r\leqslant\inf_{x\in B}[p(x+a)-g(x)]. \quad (1)$$

令$Y=B\oplus\mathrm{R}a$, $h(x+\lambda a)=g(x)+\lambda r(x\in B,\lambda\in\mathrm{R})$，则$h\in Y^*$，$h|B=g$. 设$y=x+\lambda a$, $x\in B$, $\lambda>0$，则由(1)推出

$$g\left(-\frac{x}{\lambda}\right)-p\left(-\frac{x}{\lambda}-a\right)\leqslant r\leqslant p\left(\frac{x}{\lambda}+a\right)-g\left(\frac{x}{\lambda}\right),$$

从而$-p(-y)\leqslant h(y)\leqslant p(y)$；当$\lambda<0$时以$-y$代$y$可达同一结论. 因此$(Y,h)\in M$，这与$(B,g)$是极大元矛盾.

若p是半范，$|f|\leqslant p$，则由已证结论有X上的实线性泛函φ：$\varphi|A=\mathrm{Re}f$, $-p\leqslant\varphi\leqslant p$.令$g(x)=\varphi(x)-i\varphi(ix)$ $(x\in X)$，则 $g|A=f$，$|g(x)|=eg(x)=\varphi(ex)\leqslant p(ex)=p(x)$ $(x\in X$，$|e|=1)$，g是定理所求之复线性泛函. □

若在1.7.1中X是LCS，$f\in A'$，则存在X上的半范$\|\cdot\|$，$\forall x\in A$：$|f(x)|\leqslant\mathrm{const}\|x\|=p(x)$ (§6(2)). 特别若$A=\mathrm{C}a(a\neq 0)$，$f(\lambda a)=\lambda\|a\|$，则可取$p(x)=\|x\|$. 于是从1.7.1推出：

推论 设X是LCS，$0\neq a\in X$，$A\subset X$是一子空间，$\|\cdot\|$是X上一连续半范，$f\in A'$. 则存在g，$h\in X'$：$g|A=f$，$h(a)=\|a\|$，$|h(x)|\leqslant\|x\|$ $(x\in X)$. 当X是以$\|\cdot\|$为范数的赋范空间时，可要求$\|g\|=\sup\{|f(x)|\,|\,x\in A,\|x\|\leqslant 1\}$，$\|h\|=1$.

1.7.2 定理 设$A,B\subset X$是不交的非空凸集，A是开的. 则存在X上的实连续线性泛函φ及$r\in\mathrm{R}$：$\varphi(a)<r\leqslant\varphi(b)$ $(a\in A,b\in B)$(约定说φ分离A,B).

证 取定 $u\in B-A$，令$V=A-B+u$，则V是X的凸0-邻域，$u\notin V$.定义

$$p(x)=\inf\{\lambda>0\,|\,x\in\lambda V\},x\in X, \quad (2)$$

参照§2(3)看出p是一个Minkowski泛函. 其次易见 $p(x)<1(x$

$\in V$), $p(u)\geqslant 1$. 定义 $f(\lambda u)=\lambda(\lambda\in\mathrm{R})$，则当 $\lambda\geqslant 0$ 时 $f(\lambda u)\leqslant\lambda p(u)=p(\lambda u)$, $\lambda<0$时$f(\lambda u)<0\leqslant p(\lambda u)$. 由1.7.1, 存在$X$上的实线性泛函$\varphi$: $\varphi|\mathrm{R}u=f$, $-p(-x)\leqslant\varphi(x)\leqslant p(x)(x\in X)$. 因$\forall x\in V\cap(-V)$: $|\varphi(x)|\leqslant\max\{p(x),p(-x)\}<1$, 故$\varphi$连续. 因$\varphi(u)=f(u)=1$, 故对任给$a\in A$, $b\in B$有 $\varphi(a)-\varphi(b)+1\leqslant p(a-b+u)<1$, 可见$\varphi(A)$与$\varphi(B)$是两个互不相交的实区间. 令$r=\inf\varphi(B)$, 则$\varphi, r$合乎定理所求. □

以下设X为LCS, 从1.7.2可得一系列推论.

推论 1 设$A\subset X$是凸[绝对凸]集, $b\in\bar{A}^c$. 则有$f\in X'$, $r\in\mathrm{R}$, $\forall x\in A$: $\mathrm{Re}f(x)\leqslant r<\mathrm{Re}f(b)$ [$|f(x)|\leqslant r<|f(b)|$].

证 取b的凸开邻域$V\subset A^c$. 由1.7.2, 有$f\in X'$, $r\in\mathrm{R}$: $\mathrm{Re}f(x)\leqslant r<\mathrm{Re}f(y)$ $(x\in A,\ y\in V)$; 若A绝对凸, $x\in A$, 则$|f(x)|=ef(x)=\mathrm{Re}f(ex)\leqslant r<\mathrm{Re}f(b)\leqslant|f(b)|(|e|=1)$. □

任给$A\subset X$, $F\subset X'$, 引进记号:

$A^{\perp}=\{f\in X'|f(A)=0\}$; $F^{\perp}=\{x\in X|F(x)=0\}$, (3)

显然$A^{\perp}$是X'的子空间, $F^{\perp}$是X的闭子空间.

推论 2 任给子空间$A\subset X$: $\bar{A}=A^{\perp\perp}=(A^{\perp})^{\perp}$.

直接看出$\bar{A}\subset A^{\perp\perp}$. 若$b\in\bar{A}^c$, 则依推论1有$f\in X'$: $|f(x)|<|f(b)|(\forall x\in A)$, 可见$f\in A^{\perp}$, $b\,\overline{\in}\,A^{\perp\perp}$.

推论 3 $(X')^{\perp}=\{0\}^{\perp\perp}=\{0\}$, 或简写作$X'^{\perp}=0$.

"$X'^{\perp}=0$"这一简短式子初看起来似无多大意义. 实际上, 它在整个LCS理论中起着基本的作用, 其意义简单说来在于: 若欲证**向量等式** $x=y(x,y\in X)$, 则只需证**数量等式** $f(x)=f(y)(\forall f\in X')$, 而后者可能是一个初等问题.

推论4 $A\subset X$是基本集(1.2.6)$\Longleftrightarrow A^{\perp}=0$.

事实上, 设A生成X的闭子空间B, 则易见$A^{\perp}=B^{\perp}$, 因此$B=X\Longleftrightarrow A^{\perp}=0$.

Hahn-Banach定理的一个经典应用是得出所谓无穷线性方

程组有解的条件．给定赋范空间X，$\{x_a|a\in A\}\subset X$及$\{\lambda_a\}\subset$ C．若$f\in X'$满足方程组

$$f(x_a)=\lambda_a,\ a\in A, \tag{4}$$

则有$C>0$，对任何$\{\mu_a\}\subset$C及A的有限子集B有：

$$\left|\sum_{a\in B}\lambda_a\mu_a\right|\leqslant C\left\|\sum_{a\in B}\mu_a x_a\right\|. \tag{5}$$

反之，若(5)满足，Y是$\{x_a\}$生成的子空间，则依(4)定义出$f\in Y'$，而依1.7.1可认为$f\in X'$，$\|f\|\leqslant C$．

在适当的几何语言下，Hahn-Banach定理表达了一些直观上富有启发性的事实．例如，1.7.2无非是说，不交的两凸集（其中一个是开的）可用超平面分开．下面建立关于凸性的另一个重要定理．设$S\subset K\subset X$，若对任给$x,y\in K$，当有$t\in(0,1)$：$tx+(1-t)y\in S$时必$x,y\in S$，则称S为K的极端集，当S仅含一点a时称a为极端点．

1.7.3 Krein-Milman定理 设X是LCS，E是紧集$K\subset X$的极端点之全体，H是E的凸包，则$K\subset\bar{H}$．

证 设ξ是K的紧极端集之全体，则$K\in\xi$．任给$S\in\xi$，令$\xi'=\xi\cap\mathscr{P}(S)$，设$\xi''$是$\xi'$的一个极大全序(依包含)子族，$M$是$\xi''$中所有集之交，则$M\neq\varnothing$(注意每个$A\in\xi$紧!)，显然$M\in\xi'$．任给$\varphi\in X'$，令$M_\varphi=\{x\in M|\ \mathrm{Re}\varphi(x)=\sup(\mathrm{Re}\varphi)(M)\}$，直接验知$M_\varphi\in\xi$，因此必$M_\varphi=M$．于是Hahn-Banach定理推出$M$是单点集，因此$S\cap E\neq\varnothing$．若有$x_0\in K\setminus\bar{H}$，则$\exists\varphi\in X'$，$\forall x\in\bar{H}$：$\mathrm{Re}\varphi(x)<\mathrm{Re}\varphi(x_0)$(1.7.2之推论1)，于是$\bar{H}\cap K_\varphi=\varnothing$($K_\varphi$的定义如同$M_\varphi$)．但$K_\varphi\in\xi$，$E\cap K_\varphi\neq\varnothing$，得出矛盾，因此$K\subset\bar{H}$． □

参考文献：[22]，[39]，[50]，[64]，[78]，[85]．

习 题

1．设X是LCS，则X的闭子空间是闭超平面之交，闭凸子集是闭半空间（其意义自明）之交．

2．设X是赋范空间，$0\neq f\in X'$，则$d(x,\mathrm{Ker}f)=|f(x)|/\|f\|$．

§8 强拓扑与弱拓扑

本节中设X,Y是给定的LCS.

1.8.1 定义 任给$A\subset X,F\subset X',x\in X,f\in X'$，令

$$\|x\|_F=\sup_{\varphi\in F}|\varphi(x)|,\quad \|f\|_A=\sup_{a\in A}|f(a)|;\qquad (1)$$

$$A^0=\{\varphi\in X'|\|\varphi\|_A\leqslant 1\},\quad F^0=\{a\in X|\|a\|_F\leqslant 1\}.\qquad (2)$$

由半范族$\{\|f\|_A|A\subset X$有界$\}$与$\{\|f\|_A|A\subset X$有限$\}$（或等价地，由0-邻域基$\{A^0|A\subset X$有界$\}$与$\{A^0|A\subset X$有限$\}$）在X'上定义的拓扑分别称为强拓扑与弱拓扑，带有这些拓扑的X'分别记作X'_S与X'_W；半范族$\{\|x\|_F|F\subset X'_S$有界$\}$与$\{\|x\|_F|F\subset X'$有限$\}$（或相应的0-邻域基$\{F^0\}$）分别定义出X上的强拓扑与弱拓扑，记号X_S与X_W有相应的意义. 依赖于强拓扑与弱拓扑的概念分别称为强概念与弱概念；$\bar{A}^W,\bar{A}^S,x_i\xrightarrow{W}x$等记号有自然的意义.

直接看出，在X'_W中$f_i\to f\Longleftrightarrow\forall x\in X$：$f_i(x)\to f(x)$，因此$X'_W\subset \mathbf{C}^X$是一拓扑嵌入(1.5.2). 对$X_W$可作类似结论.

1.8.2 定理 令$X''_W=(X'_W)'_W$，$X''_S=(X'_S)'_S$，$\tilde{x}(f)=f(x)(f\in X',x\in X)$. 则$X_W\to X''_W$，$x\longmapsto\tilde{x}$是一拓扑同构；若$X$是赋范空间，则$X\to X''_S$，$x\mapsto\tilde{x}$是一等距嵌入.

证 任给$x\in X$，显然$\tilde{x}\in X''_W$. 因$\tilde{x}=0\Rightarrow x\in X'^{\perp}=0$，故$x\longmapsto\tilde{x}$是单射. 任给网$\{x_i\}\subset X$：$x_i\xrightarrow{W}x\Longleftrightarrow\forall f\in X'$：$f(x_i)\to f(x)\Longleftrightarrow\tilde{x}_i\xrightarrow{W}\tilde{x}$. $\forall\varphi\in X''_W$，今证有$x\in X$：$\varphi(f)=f(x)$ $(f\in X')$. 取$A=\{x_1,\cdots,x_n\}\subset X$，使得$\forall f\in A^0$：$|\varphi(f)|<1$. 易见$A^{\perp}\subset\mathrm{Ker}\varphi$，于是

$$\psi:(f(x_1),\cdots,f(x_n))\longmapsto\varphi(f)\qquad (f\in X')$$

是定义在$\mathbf{C}^n$的某子空间上的线性泛函. 将ψ延拓到$\mathbf{C}^n$上，令

$\psi(e_i)=a_i$, $\{e_i\}$是C^n的标准基，则

$$\varphi(f)=\sum_i f(x_i)\psi(e_i)=f(\sum_i a_i x_i),f\in X'.$$

若X是赋范空间，则 X_S, X_S' 中的拓扑即范数拓扑. $\forall x\in X$,显然$\tilde{x}\in X_S''$, $\|\tilde{x}\|\leqslant\|x\|$. 设$x\neq 0$, 取$f\in X'$, $f(x)=\|x\|$, $\|f\|=1$(1.7.1之推论)，因此$\|x\|\leqslant\|\tilde{x}\|$，从而$\|x\|=\|\tilde{x}\|$. □

1.8.2与显然的事实$(X_W)'=X_W'$合起来说明，X_W与X_W'互为对偶，这使得每个有关X_W的定理自动地导出一个关于X_W'的“对偶定理”，且反之亦然.

1.8.3 **定理**(Mazur) 任给凸集$A\subset X$: $\bar{A}=\bar{A}^W$.

证 只要证$\bar{A}\supset\bar{A}^W$. 若$x\bar{\in}\bar{A}$，则从1.7.2之推论1直接看出，任何网$\{x_i\}\subset A$不弱收敛于x，故$x\bar{\in}\bar{A}^W$. □

推论 任给子空间$A\subset X$: $\bar{A}^W=A^{\perp\perp}$ (参考1.7.2之推论2)；对偶地，任给子空间$F\subset X'$: $\bar{F}^W=F^{\perp\perp}$; F是X_W'的基本集$\Longleftrightarrow F^\perp=0$ (与1.7.2之推论4对照).

1.8.4 **定理**(Banach-Alaoglu,1940) 若$F\subset X'$等度连续(1.6.2)，则$\bar{F}^W$弱紧，当X可分时$\bar{F}^W$依弱拓扑可度量化；特别，任给0-邻域$V\subset X$，V^0弱紧；若X是［可分］赋范空间，$V=\{x\mid\|x\|\leqslant 1\}$，则$V^0=\{f\in X'\mid\|f\|\leqslant 1\}$弱紧［依弱拓扑可度量化］.

证 可设$F=\bar{F}^W$. 因每个$F(x)$ (记号依§6(3)) 有界，故$P=\prod_{x\in X}\overline{F(x)}$是紧的 (1.5.3). 今证$F$在$P$中是闭的. 设网$\{f_t\}\subset F$逐点收敛于$f\in P$. $\forall\varepsilon>0$，取0-邻域$U\subset X$, $\forall x\in U$, $\forall t$, $|f_t(x)|<\varepsilon$，这推出$|f(x)|\leqslant\varepsilon\,(x\in U)$，可见$f\in X'$, 从而$f\in F$.

若$X=\overline{\{a_n\}}$，令$\|f\|_n=|f(a_n)|\,(f\in X', n=1,2,\cdots)$，则$F$的弱拓扑可用半范族$\{\|f\|_n\}$刻划，从而是可度量化的. □

1.8.5 **定理** 任给$A\subset X$: A有界$\Longleftrightarrow A$弱有界；若X是F-空间，$F\subset X'$，则F强有界$\Longleftrightarrow F$等度连续$\Longleftrightarrow$有X的连续半范

$\|x\|$: $\sup\{|f(x)|\,|\,f\in F, \|x\|\leqslant 1\}<\infty \Longleftrightarrow F$弱有界.

证 设A弱有界. 任给闭绝对凸0-邻域$V\subset X$, $A(\subset X''_W)$在每"点"$f\in V^0$有界推出A在弱紧集V^0上一致有界(1.6.4), 即有$\beta>0$: $A\subset\beta V^{00}$. 易验证$V=V^{00}$(参照1.7.2之推论2), 可见A有界. 对于定理后一半, 只要证F弱有界$\Rightarrow F$等度连续, 而这是1.6.4的直接推论. □

1.8.6 定理 设X是F-空间. 则(i) X中的强拓扑重合于原拓扑; (ii) X'是序列弱完备的, 即若序列$\{f_n\}\subset X'$逐点收敛于f, 则$f\in X'$.

证 (i) 可设X有可数基本半范族$\{\|x\|_n\}$. 令$\|f\|_n=\sup\{|f(x)|\,|\,\|x\|_n\leqslant 1\}$, $F_{n,r}=\{f\in X'\,|\,\|f\|_n\leqslant r\}$, $B_{n,r}=\{x\,|\,\|x\|_n\leqslant r\}$, 则易见$\{F^0_{n,r}\}$是$X_S$的0-邻域基, $B_{n,r}\subset F^0_{n,1/r}$, 只要证$B_{n,r}\supset F^0_{n,1/r}(r>0, n=1,2,\cdots)$. 若$\|x\|_n>r$, 则依1.7.1之推论有$f\in X'$: $f(x)=\|x\|_n$, $\|f\|_n=1$, 于是$\varphi=f/r\in F_{n,1/r}$, $x\overline{\in}F^0_{n,1/r}$.

(ii) $\{f_n\}$逐点收敛于f推出$\{f_n\}$弱有界, 从而等度连续(1.8.5), 这就不难推出f连续. □

1.8.7 定理 设X是赋范空间. (i)若X可分, 则X'_W可分且有$\{f_n\}\subset X'$: $\|f_n\|=1$, $\|x\|=\sup\limits_n|f_n(x)|(\forall x\in X)$; (ii) X'_S可分$\Rightarrow X$可分.

证 (i) 取X的可数稠子集$\{a_n\}$; 任给$F\subset X'$, 令$\varphi_n(F)=\{(f(a_1),\cdots,f(a_n))\,|\,f\in F\}$. 设$B=\{f\in X'\,|\,\|f\|\leqslant 1\}$, 取可数集$B_n\subset B$: $\varphi_n(B)\subset\overline{\varphi_n(B_n)}(n=1,2,\cdots)$, 则不难看出$B\subset\overline{\bigcup B_n}^W$由此显然推出$X'_W$可分. 取$f_n\in X'$: $\|f_n\|=1$, $f_n(a_n)=\|a_n\|$ $(n=1,2,\cdots)$, 则$\forall x\in X$:

$$\|x\|\geqslant\sup_n|f_n(x)|\geqslant\sup_n[\|a_n\|-|f_n(x-a_n)|]$$
$$\geqslant\sup_n(\|a_n\|-\|x-a_n\|)\geqslant\|x\|-\inf_n 2\|x-a_n\|=\|x\|.$$

(ii) 取$\{f\in X' \mid \|f\|=1\}$的稠子集$\{f_n\}$；取$x_n\in X$：$\|x_n\|=1$，$|f_n(x_n)|\geqslant 1/2(n=1,2,\cdots)$，$\{x_n\}$ 必为X的基本集（由此推出X可分）．否则，$\exists f\in(\{x_n\})^{\perp}$：$\|f\|=1$（1.7.2之推论4)，于是$\|f-f_n\|\geqslant|f_n(x_n)|\geqslant 1/2(n=1,2,\cdots)$，得出矛盾．□

1.8.8 定理 若X是可分F-空间［自反($X=X''_S$) B-空间］，则每个有界序列$\{f_n\}\subset X'$［$\{x_n\}\subset X$］含弱收敛子列．

证 因$\{f_n\}$等度连续(1.8.5)，用类似于1.3.5的证法可从$\{f_n\}$取出弱收敛子列.对定理之另一半,假定X可分（一般情况之证明参看[85]）.$X=X''_S$与1.8.7推出X'_S可分,于是$\overline{\{x_n\}}^W$弱紧且依弱拓扑可度量化(1.8.4),从而$\{x_n\}$含弱收敛子列(1.3.4).

□

1.8.9 定义 任给$T\in L(X,Y)$，依

$$T':Y'\to X',\ g\longmapsto g\circ T \tag{3}$$

定义的线性算子T'称为T的对偶算子．

任给$T\in L(X,Y)$，$g\in Y'$，有界集$A\subset X$，依(1)有

$$\|T'g\|_A=\sup_{x\in A}|g(Tx)|=\|g\|_{TA}. \tag{4}$$

从(4)看出$T\in L(Y'_S,X'_S)\cap L(Y'_W,X'_W)$．依1.8.2的记号，

$$(T''\tilde{x})(g)=(T'g)(x)=\widetilde{Tx}(g),x\in X,\ g\in Y',$$

可以认为$T=T''\in L(X_W,Y_W)$．若X,Y是赋范空间，则

$$\|T'\|=\sup_{\|g\|\leqslant 1,\|x\|\leqslant 1}|g(Tx)|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|=\|T\|. \tag{5}$$

1.8.10 定理 设$T\in L(X,Y)$．则(i)$\mathrm{Ker}T=(\mathrm{Im}T')^{\perp}$，$\mathrm{Ker}T'=(\mathrm{Im}T)^{\perp}$；(ii) $(\mathrm{Ker}T)^{\perp}=\overline{\mathrm{Im}T'}^W$，$(\mathrm{Ker}T')^{\perp}=\overline{\mathrm{Im}T}$；(iii)$T$是单射$\Longleftrightarrow\overline{\mathrm{Im}T'}^W=X'$；$T'$是单射$\Longleftrightarrow\overline{\mathrm{Im}T}=Y$．

证 由(3)直接推出(i)；结合(i)、1.8.3之推论及1.7.2之推论2推出(ii)；由(ii)推出(iii)．□

1.8.11 定理 设$A\subset X$是闭子空间．则$X'_W/A^{\perp}\cong A'_W$，$(X_W/A)'_W\cong(A^{\perp})_W$，$\cong$记拓扑同构．若$X$是赋范空间，则有等距同构：$X'/A^{\perp}\cong A'$，$(X/A)'\cong A^{\perp}$．

证 只证前一半（后半部分的证明更为直接）. 设 $i: A\subset X$，则$i'\in L(X'_W, A'_W)$，i'是满射（1.7.1之推论），$\mathrm{Ker}\, i'=A^{\perp}$. 要证$X'_W/A^{\perp}\cong A'_W$，只需指明$i': X'_W\to A'_W$是开映射(1.5.6). 任给$W=\{x_1,\cdots,x_n\}\subset X$，将$A\cup W$生成的向量空间写成$A\oplus B$，取$B$的一组基$\{b_k\}$. 若$\sum\lambda_k\tilde{b}_k|A^{\perp}=0$（记号$\tilde{x}$依1.8.2），则$\sum\lambda_k b_k\in A^{\perp\perp}=A$，从而$\sum\lambda_k b_k=0$. 可见$\{\tilde{b}_k|A^{\perp}\}$线性无关，于是有$\{f_k\}\subset A^{\perp}$: $f_k(b_l)=\delta_{kl}$. 令$x_j=a_j+y_j, a_j\in A$, $y_j\in B$ $(1\leqslant j\leqslant n)$. 任给$f\in F=\{\varphi\in A'\,|\,|\varphi(a_j)|\leqslant 1,\ 1\leqslant j\leqslant n\}$，可设$f\in X'$，令$g=f-\sum f(b_k)f_k$，则$i'(g)=g|A=f$, $g\in B^{\perp}$, $|g(x_j)|=|f(a_j)|\leqslant 1(1\leqslant j\leqslant n)$. 可见$g\in W^0$, $i'(W^0)\supset F$，这表明i'是开映射.

其次，$(X_W/A)'_W\cong(X''_W/A^{\perp\perp})'_W\cong(A^{\perp})''_W\cong(A^{\perp})_W$. □

任给 $T\in L(X,Y)$，称$\mathrm{coker}T=Y/\mathrm{Im}T$为$T$的余核. 若$\mathrm{Im}T$在$Y$中是闭的，则依1.8.11有线性同构:

$$(\mathrm{coker}T)'\cong(\mathrm{Im}T)^{\perp}=\mathrm{Ker}T'. \tag{6}$$

1.8.12 定理 设X, Y是赋范空间，$T\in L(X,Y)$. (i)若T是紧算子，则T映任何弱收敛序列$\{x_n\}\subset X$为收敛序列，当$X=X''_S$时其逆亦真. (ii) T是紧算子推出$T': Y'_S\to X'_S$是紧算子.

证 (i) $\{x_n\}$弱收敛推出$\{x_n\}$有界，于是$\{Tx_n\}$的任何子列有收敛子列，从而$\{Tx_n\}$本身收敛. 若$X=X''_S$，T映弱收敛序列为收敛序列，$\{x_n\}\subset X$是有界序列，取弱收敛子列$\{x_{n_k}\}$(1.8.8)，则$\{Tx_{n_k}\}$收敛.

(ii) 任给有界序列$\{g_n\}\subset Y'$. T是紧算子推出$\mathrm{Im}T$可分，因此$\{g_n\}$看作$(\overline{\mathrm{Im}T})'$中的序列含弱收敛子列(1.8.8)，不妨设$\forall y\in\overline{\mathrm{Im}T}: g_n(y)\to g(y) (g\in Y')$. 于是必有$\|T'g_n-T'g\|\to 0$，否则，不妨设$\|T'(g_n-g)\|\geqslant\varepsilon>0$，取$x_n\in X$: $\|x_n\|=1$, $|(g_n-g)(Tx_n)|\geqslant\varepsilon/2(n=1,2,\cdots)$，不妨设$Tx_n\to y\in\overline{\mathrm{Im}T}$. 则$\varepsilon/2\leqslant$

$\|g_n-g\|\|Tx_n-y\|+|(g_n-g)(y)|$，与$g_n(y)\to g(y)$矛盾． □

参考文献：[22]，[39]，[50]，[64]，[78]，[82]，[85]．

习 题

1．若在X_W中$x_n\to x$，在X'_S中$f_n\to f$，则$f_n(x_n)\to f(x)$．

2．设X，Y是B-空间，$\{T_n\}\subset L(X,Y)$．若$\forall x\in X$，$g\in Y'$：$\sup\limits_n|g(T_nx)|<\infty$，则$\sup\limits_n\|T_n\|<\infty$．

3．设X，Y是F-空间，则$L(X_S,Y_W)=L(X,Y)$．

§9 LF空间与Montel空间

本节讨论一种从一列已知LCS构成新的LCS的方法．首先建立一个基本引理．

1.9.1 引理 设X是一LCS，$A\subset X$是一闭子空间，U是A的一凸0-邻域．则存在X的凸0-邻域V，$U=A\cap V$；对给定的$x_0\in X\setminus U$，可要求V不含x_0．

证 设$U=A\cap W$，W是X的0-邻域．取X的凸0-邻域W_0：$W_0\subset W$；令W_1是$W_0\cup U$的凸包，则$U=A\cap W_1$．不妨设$x_0\in A^c$，于是有X的凸0-邻域B：$x_0\bar{\in}A+B=p^{-1}pB$，p：$X\to X/A$是投影，$V=W_1\cap(A+B)$即合定理所求． □

1.9.2 定理 设$X=\bigcup X_n$，X_n是LCS且X_n是X_{n+1}的闭子空间($n=1,2,\cdots$)．令$\mathscr{U}=\{U\subset X|U$是凸集，$\forall n$，$X_n\cap U$是$X_n$的0-邻域$\}$，则以$\mathscr{U}$为0-邻域基决定$X$上一局部凸拓扑，它在$X_n$上的相对拓扑即$X_n$的原拓扑．

证 首先验证$\mathscr{U}$满足1.2.4之条件(i)—(v)．(i)(iii)(v)显然满足．验证(ii)：若$x_0\in X\setminus 0$，则有X_1的凸0-邻域$U_1\subset X\setminus x_0$；由1.9.1又有$X_2$的凸0-邻域$U_2\subset X\setminus x_0$：$U_1=X_1\cap U_2$，…，一般地得$U_n\subset X\setminus x_0$，$U_n=X_n\cap U_{n+1}$，$n=1,2,\cdots$，于是$x_0\bar{\in}\bigcup U_n\in\mathscr{U}$．验证(iv)：设$U\in\mathscr{U}$，取每个$X_n$的绝对凸0-邻域$U_n\subset$

$X_n\cap U$，令V是$\bigcup U_n$的凸包，则$V\in\mathscr{U}$，$|\lambda|\leqslant 1\Rightarrow \lambda V\subset V\subset U$．因此$\mathscr{U}$决定$X$上一局部凸拓扑$\tau$．

任给X_n的凸0-邻域U_n，由1.9.1可求得$X_k(k\geqslant n$，n固定)的凸0-邻域U_k：$U_k=X_k\cap U_{k+1}$．于是$U=\bigcup_{k\geqslant n}U_k\in\mathscr{U}$，$U_n=X_n\cap U$．可见$X_n$的拓扑是$\tau$在$X_n$中的相对拓扑． □

1.9.2中的拓扑τ称为X上的归纳极限拓扑，称(X,τ)为$\{X_n\}$的归纳极限，写作$X=\varinjlim X_n$．归纳极限拓扑有一些良好的性质．首要的一点是，X中许多问题的讨论往往可归结于各个（或某个）X_n中相应问题的讨论，而X_n可能是较熟悉的空间．

以下设$X=\varinjlim X_n$，$\mathscr{U}$如1.9.2中所述．

1.9.3 定理 任给$A\subset X$，A有界$\Longleftrightarrow\exists n$，$A\subset X_n$且$A$在$X_n$中有界；任给序列$\{x_k\}\subset X$，在$X$中$x_k\to x\Longleftrightarrow$在某个$X_n$中$x_k\to x$；若$Y$是一LCS，$T:X\to Y$是一线性算子，则$T\in L(X,Y)\Longleftrightarrow\forall n$：$T|X_n\in L(X_n,Y)$．

证 设A有界，但$\exists x_n\in A\setminus X_n(n=1,2,\cdots)$．取$X_1$的凸0-邻域$U_1$，由1.9.1有$X_2$的凸0-邻域$U_2$：$U_1=X_1\cap U_2$，$k^{-1}x_k\,\overline{\in}\,U_2$，$k=1,2$；又有$X_3$的凸0-邻域$V_{3k}$：$U_2=X_2\cap V_{3k}$，$k^{-1}x_k\,\overline{\in}\,V_{3k}(k=1,2)$．令$U_3=V_{31}\cap V_{32}$，则$U_2=X_2\cap U_3$，$k^{-1}x_k\,\overline{\in}\,U_3$ $(k=1,2,3)$．如此继续，得凸集$\{U_n\}$：$k^{-1}x_k\,\overline{\in}\,U_n$ $(k\leqslant n=1,2,\cdots)$，$U=\bigcup U_n\in\mathscr{U}$．这与$A$有界矛盾（参考§2之习题），故$A$必为某个$X_n$的有界子集．若在$X$中$x_k\to x$，则$\{x_k\}$有界，故必在某个$X_n$中$x_k\to x$．若每个$T|X_n$连续，则对任给凸0-邻域$V\subset Y$，$X_n\cap T^{-1}V=(T|X_n)^{-1}V$是$X_n$的0-邻域，从而$T^{-1}V\in\mathscr{U}$，$T\in L(X,Y)$．以上所证三个结论的逆是显然的． □

若每个X_n是F-空间，则称$X=\varinjlim X_n$为LF空间．LF空间

是应用上很重要的一类 LCS，它较 F-空间为广，却又保持F-空间的许多性质（参看1.9.4—1.9.7）．首先，直接从1.9.3得到以下重要结论：

推论 设X是LF空间，Y是 LCS，$T: X\to Y$ 是一线性算子．则$T\in L(X,Y)\Longleftrightarrow T$是有界算子$\Longleftrightarrow$任给收敛序列$\{x_k\}\subset X$：$\lim\limits_k Tx_k=T(\lim\limits_k x_k)$；若$Y$也是$LF$空间，$T$是双射，则当"$x_k\to x\Longleftrightarrow Tx_k\to Tx$"时$T$为拓扑同构，因此$X$的"$LF$拓扑"完全由序列收敛决定．

1.9.4 定理(Dieudonné-Schwartz, 1949) 设$X=\varinjlim X_n$与$Y=\varinjlim Y_n$是LF空间，$T\in L(X,Y)$．则每个TX_n含于某个Y_m；当$TX=Y$时T是开映射（与1.6.1推论1对照）．

证 因$X_n=\bigcup\limits_m(X_n\cap T^{-1}Y_m)$，故某个$X_n\cap T^{-1}Y_m$在$X_n$中有内点(1.3.8)，于是1.4.4推出$TX_n\subset Y_m$．对定理之后半部只需证：任给凸0-邻域$U\subset X$，$Y_k\cap TU$是$Y_k$的0-邻域（$k=1,2,\cdots$）．因$Y_k=\bigcup\limits_n(Y_k\cap TX_n)=\bigcup\limits_n TZ_{n,k}$，其中$Z_{n,k}=X_n\cap T^{-1}Y_k$是$X_n$的闭子空间，必有某个$TZ_{n_k,k}$在$Y_k$中非瘦，从而$T|Z_{n_k,k}: Z_{n_k,k}\to Y_k$是开映射（1.6.1之推论）．因此$T(U\cap Z_{n_k,k})=Y_k\cap T(U\cap X_{n_k})$是$Y_k$的0-邻域，故$Y_k\cap TU$是$Y_k$的0-邻域． □

1.9.5 定理 设$X=\varinjlim X_n$是LF空间，Y是一LCS，$F\subset L(X,Y)$．若$\forall x\in X$，$F(x)\subset Y$有界，则F等度连续．特别，若$F\subset X'$，则F弱有界$\Longleftrightarrow F$等度连续$\Longleftrightarrow F$强有界；F弱紧$\Longleftrightarrow F$弱闭且弱有界（参照1.6.4，1.8.4，1.8.5）．

证 任取Y的闭绝对凸0-邻域V，令$U=\{x|F(x)\subset V\}$，则U是闭绝对凸集且$F(U)\subset V$．余下只要证：$U_n=X_n\cap U$是X_n的0-邻域($n=1,2,\cdots$)．易见$X_n=\bigcup_{k=0}^{\infty}kU_n$，于是$U_n$在$X_n$

中有内点x. 因U_n是绝对凸的，故 $0=\frac{1}{2}(x-x)$是U_n在X_n中的内点，从而U_n是X_n的0-邻域. □

1.9.6 定理 若每个X_n是完备（定义见1.2.9）[可分]的LCS，则$X=\varinjlim X_n$是完备[可分]的.

证 关于可分性的结论是明显的. 关于完备性只证一较弱的结论，任何Cauchy列$\{x_k\}\subset X$收敛(完全的证明见[78]). 任给X的0-邻域U, $\exists k_0$, $\forall k\geqslant k_0$: $x_k-x_{k_0}\in U$, 于是$\{x_k\}\subset\{x_1, \cdots, x_{k_0}\}+U$，可见$\{x_k\}$有界，这就可从1.9.3推出$\{x_k\}$收敛. □

推论 若$X=\varinjlim X_n$是LF空间，$\forall n$: $X_n\neq X$，则X必不可度量化（参考1.3.8，1.4.4）.

1.9.7 定理 设X是可分LF空间，则X'中任何弱有界序列包含弱收敛子列.

证 参看1.8.8. □

1.9.8 定义 称$A\subset X$为吸收集，若$X=\bigcup_{\lambda\in\mathbf{R}}\lambda A$；称绝对凸的闭吸收集为桶，称每个桶是0-邻域的TVS为桶空间. 若X是一局部凸的桶空间，它的有界闭子集为紧集，则称X为 Montel空间.

1.9.9 定理 设$X=\varinjlim X_n$是LF空间. 则X是桶空间，当X_n皆为Montel空间时X亦为Montel空间.

证 首先证每个桶$A\subset X$是0-邻域. 因$X_n\cap A$是X_n ($n=1,2,\cdots$)中的桶，不妨设X是F-空间. A是吸收的与平衡的推出$X=\bigcup_1^\infty nA$，于是$A^\circ\neq\varnothing$. A是绝对凸集推出$0\in\frac{1}{2}(A^\circ-A^\circ)\subset A^\circ$，可见$A$为0-邻域.

若每个X_n是Montel空间，$A\subset X$是有界闭集，则A是某个X_n的有界闭子集，从而是紧的. □

1.9.10 定理 设X是Montel空间. 则(i) 每个弱有界集$F\subset X'$等度连续，F上的强拓扑合于弱拓扑；(ii)X'中的序列弱收敛推出强收敛，X'是序列弱完备的（参看1.8.6）. 若加上X是F-空间，则还有：(iii) X中的序列弱收敛推出强收敛，X是序列弱完备的；(iv)X是可分的.

证 (i) 显然F^0是一个桶，而F在F^0上一致有界，故F等度连续. 设在F中$f_i\xrightarrow{W}f$, $A\subset X$有界. 因$\bar{A}$为紧集，故对$\forall\ \varepsilon>0$，存在有限集$\{x_i\}\subset X$; $A\subset\{x_i\}+\varepsilon F^0$，由此看出在$A$上$f_i\rightrightarrows f$，可见$\{f_i\}$强收敛于$f$.

(ii) 直接从(i)推出. 以下设X是F-空间.

(iii) 若在X_W中$x_n\to x$，则$\{x_n\}$有界，从而相对紧，于是$\{x_n\}$的每个子列含收敛子列，这推出$x_n\to x$. 只要假定$\{x_n\}$使每个$\{f(x_n)\}(f\in X')$收敛，上述推理同样得出$x_n\to x$，从而$x_n\xrightarrow{W}x$.

(iv) 设X的拓扑由半范$\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant\cdots$定义. 若对每个$n$存在可数集$A_n\subset X$; A_n依$\|\cdot\|_n$在X中稠密，则$X=\overline{\bigcup A_n}$. 若对某个n，如$n=1$，如上的A_1不存在，则可取出不可数集$B_1\subset X$，它依$\|\cdot\|_1$有界，其中任两点依$\|\cdot\|_1$之距离$\geqslant\varepsilon>0$; B_1必有不可数子集B_2，它依$\|\cdot\|_2$有界，…，如此得一列集$\{B_n\}$，取$x_n\in B_n$，使x_n互异，则$\{x_n\}$有界，它不含收敛子列，得出矛盾. □

参考文献：[30]，[50]，[64]，[78]，[85].

习 题

1.9.3的最后一个结论完全刻划了X上的归纳极限拓扑.

§10 Hilbert空间

1.10.1 定义 设H是K(=R或C)上的向量空间. 若$g(x,y)$:

$X\times X\to K$对x是线性的，对y是共轭线性的：$g(x,\alpha y+\beta z)=\bar{\alpha}g(x,y)+\bar{\beta}g(x,z)$，则称$g$为$H$上的Hermite双线性形式；若$g$进而满足$g(x,y)=\overline{g(y,x)}$，$g(x,x)\geqslant 0$，则称它为正Hermite形式；若再满足条件$g(x,x)=0\Rightarrow x=0$，则称$g$为内积，写作$g(x,y)=(x,y)$，令$\|x\|=\sqrt{(x,x)}$（在不等式$\|x-\alpha y\|^2\geqslant 0$中令$\alpha=(x,y)/\|y\|^2$得出Schwarz不等式：$|(x,y)|\leqslant\|x\|\|y\|$，由此可验证$\|x\|$确为范数），称以$\|x\|$作范数的$H$为内积空间，当它完备时称为Hilbert空间.

本书中用(x,y)记内积（对实内积空间也写作$\langle x,y\rangle$）. 以下设H是给定的复Hilbert空间. 不过本节的许多概念与结果也适用于实Hilbert空间，而不涉及完备性者可用于内积空间，具体情况读者不难自行判定. Hilbert空间的基本特色是其中可推广Euclid几何的种种事实. 简单的例子有：

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2),\quad x,y\in H;\qquad (1)$$

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2,\quad x,y\in H,(x,y)=0\qquad (2)$$

（"中线公式"与"勾股公式"），其几何解释是明显的.

1.10.2 正交分解定理 设A是H的闭子空间，$A^{\perp}=\{x|\forall a\in A,(x,a)=0\}$（$A$的正交补），则$H=A\oplus A^{\perp}$.

证 只要证对任给$x\in H$，$\exists a\in A$：$x-a\in A^{\perp}$. 令$\delta=d(x,A)$，取$\{a_n\}\subset A$：$\|x-a_n\|\to\delta$，将(1)中的x，y分别代之以$x-a_m$与$x-a_n$，推出$\{a_n\}$为Cauchy列，于是$a_n\to a\in A$. 令$b=x-a$，则$\|b\|=\delta$. 任给$y\in A$，$\alpha\in\mathbf{C}$，在

$$\delta^2\leqslant\|x-(a+\alpha y)\|^2=\delta^2-2\mathrm{Re}\,\bar{\alpha}(b,y)+|\alpha|^2\|y\|^2$$

中以$\alpha=(b,y)/\|y\|^2$代入立得$(b,y)=0$，即$x-a\in A^{\perp}$. □

令$f_a(x)=(x,a)$ $(x,a\in H)$，则$f_a\in H'$且$\|f_a\|\leqslant\|a\|$；从$\|a\|^2\leqslant\|f_a\|\|a\|$推出$\|f_a\|=\|a\|$. 任给$f\in H'\setminus 0$，$A=\mathrm{Ker}f$，有$H=A\oplus A^{\perp}$. 1.5.9推出$A^{\perp}=\mathbf{C}x_0$，$x_0\in A^{\circ}$. 于是不难验证$f=f_a$，$a=\overline{f(x_0)}x_0/\|x_0\|^2$，故得

1.10.3 定理 $H\to H'$, $a\longmapsto f_a$ 是一等距双射，满足$\lambda a+\mu b\longmapsto\bar{\lambda}f_a+\bar{\mu}f_b$(通常说$H$与$H'$共轭同构).

若将H与H'等同，则记号$A^\perp$的意义与§7(3)一致.

1.10.4 定义 称$\{e_i\}_{i\in I}\subset H$为一个法正交系，若$\|e_i\|=1$，$i\neq j$时$(e_i,e_j)=0$. 任给有限集$J\subset I$，$x\in H$，令$x_J=\sum_{j\in J}(x,e_j)e_j$，当$\{J\}$以包含关系序次时$\{x_J\}$是$H$中一个网(1.1.5)；若$x_J\to x$，则说$x$有展开式：

$$x=\sum_{i\in I}(x,e_i)e_i. \tag{3}$$

若(3)对每个$x\in H$成立，则说$\{e_i\}$是H的一个Hilbert基或法正交基，此时对任给x，$y\in H$有：

$$(x,y)=\sum_{i\in I}(x,e_i)\overline{(y,e_i)}; \tag{4}$$

$$\|x\|^2=\sum_{i\in I}|(x,e_i)|^2(\text{Parseval等式}), \tag{5}$$

和式(4)(5)的意义如同(3)一样理解.

1.10.5 引理 设$\{e_i\}_1^n\subset H$是一法正交系，A是$\{e_i\}$生成的H的子空间，$x\in H$，$x_n=\sum(x,e_i)e_i$.则$x-x_n\in A^\perp$，从而$\|x_n\|^2\leqslant\|x\|^2=\|x_n\|^2+\|x-x_n\|^2$.

证 任给$y=\sum\lambda_ie_i\in A$，可直接验证$(x-x_n,y)=0$. □

推论 若$\{e_i\}_{i\in I}\subset H$是一法正交系，$x\in H$，则

$$\sum_{i\in I}|(x,e_i)|^2\leqslant\|x\|^2(\text{Bessel不等式}). \tag{6}$$

因此(4)(5)(6)中的和式至多含可数个非零加项.

1.10.6 定理 若$\{e_i\}_{i\in I}\subset H$是一法正交系，则以下条件互相等价：(i)$\{e_i\}$是$H$的Hilbert基；(ii)$\{e_i\}$是$H$的基本集；(iii)$(\{e_i\})^\perp=0$；(iv)(5)对每个$x\in H$成立.

证 显然(iv)⇐(i)⇒(ii)⇒(iii). 今取定$x\in H$，(6)推出$\{x_J\}$（依1.10.4之记号）为Cauchy网. 设$x_J\to y$，则$x-y\in(\{e_i\})^\perp$，可见(iii)⇒(i). 从$\|x_J-x\|^2+\|x_J\|^2=\|x\|^2$看出(iv)

$\Rightarrow$(i). □

设$\dim H>0$. 由Zorn引理可推出H中必有一极大法正交系$\{e_i\}$，于是1.10.6之(iii)推出$\{e_i\}$是H的Hilbert基. 若H可分，则可用经典的Schmidt正交化方法从任何线性无关的稠子集$\{a_n\}\subset H$构成一可数Hilbert基.

任给一族Hilbert空间$\{H_i\}_{i\in I}$，不难验证

$$\bigoplus H_i=\{(x_i)\in\prod H_i \mid \sum\|x_i\|^2<\infty\} \tag{7}$$

依内积$((x_i),(y_i))=\sum(x_i,y_i)$是一Hilbert空间，称为$\{H_i\}$的Hilbert和.

1.10.7 定理 设H的闭子空间$H_i(i\in I)$互相正交(即$i\neq j\Rightarrow H_i\subset H_j^{\perp}$)，$\bigcap H_i^{\perp}=\{0\}$，则$H$等距同构于$\bigoplus H_i$.

证 定义$f:\bigoplus H_i\to H,(x_i)\longmapsto\sum x_i$. 当$\sum\|x_i\|^2<\infty$时$\sum x_i$有意义，且$\|\sum x_i\|^2\leqslant\sum\|x_i\|^2$. 任给$x\in H$, $\forall i\in I$, $\exists x_i\in H_i$: $x-x_i\in H_i^{\perp}$(1.10.2). 任给有限集$J\subset I$, $\sum\limits_{j\in J}\|x_j\|^2=\|\sum\limits_{j\in J}x_j\|^2\leqslant\|x\|^2$ (参照1.10.5)，可见$(x_i)\in\bigoplus H_i$，且$\|(x_i)\|^2\leqslant\|x\|^2$. 因$x-\sum x_i\in\bigcap H_i^{\perp}=\{0\}$，故$x=f((x_i))$，可见$f$是一等距同构. □

若$\{e_i\}_{i\in I}$是H的Hilbert基，每个e_i生成H的1维子空间H_i，则不难从1.10.7推出H等距同构于$\bigoplus H_i$，而后者又等距同构于$l^2(I)=\{(x_i)\in\mathbf{C}^I \mid \|(x_i)\|^2=\sum|x_i|^2<\infty\}$. 关于空间$l^2(I)$参看§3.5.

1.10.8 定义 任给$T\in L(H)=L(H,H)$，称由等式

$$(Tx,y)=(x,T^*y),\quad x,y\in H \tag{8}$$

决定的$T^*\in L(H)$为T的相伴算子. 所谓正规算子、酉算子(在实Hilbert空间中称正交算子)、自伴算子、正投影算子分别由等式$TT^*=T^*T$, $TT^*=1_H=T^*T$、$T=T^*$、$T^2=T=T^*$界定.

因H与H'共轭同构，将(8)与§8(3)对照看出，可将T^*解释为T的对偶. 对应$T\longmapsto T^*$显然有性质：$T^{**}=T$；$(\alpha T+\beta S)^*=\bar{\alpha}T^*+\bar{\beta}S^*$；$(S\circ T)^*=T^*\circ S^*$，$\|T^*\|=\|T\|$.

可直接验证以下恒等式($T\in L(H)$)：

$$2(Tx,y)=(T(x+y),x+y)\pm i(T(x\pm iy),x\pm iy). \quad (9)$$

从(9)推出：$(Tx,x)=0\Rightarrow T=0$；$(Tx,x)=(Sx,x)\Rightarrow T=S$.

1.10.9 定理 给定$T\in L(H)$. 则(i)T是正规的$\Longleftrightarrow\|Tx\|=\|T^*x\|$；(ii)$T$是酉算子$\Longleftrightarrow\|Tx\|=\|x\|$且$T(H)=H$；(iii)$T$是自伴的$\Longleftrightarrow\forall x\in H$，$(Tx,x)\in\mathbb{R}$；(iv)$T$是正投影算子$\Longleftrightarrow H=A\oplus A^\perp$，当$a\in A,b\in A^\perp$时$T(a+b)=a$.

证 (i)是明显的. 其次$T^*T=1_H\Longleftrightarrow\|Tx\|^2=(T^*Tx,x)=\|x\|^2$. 若$\|Tx\|=\|x\|$，$T(H)=H$，则$T^{-1}\in L(H)$，于是$TT^*=1_H=T^*T$.

显然$T=T^*\Rightarrow(Tx,x)=\overline{(Tx,x)}\in\mathbb{R}$. 反之，若$\forall x\in H$：$(Tx,x)\in\mathbb{R}$，则(9)推出$(Tx,y)=\overline{(Ty,x)}=(x,Ty)$，从而$T=T^*$.

若$T^2=T=T^*$，则$A=T(H)$是H的闭子空间，$H=A\oplus A^\perp$. $\forall x,y\in H$：$(x-Tx,Ty)=(x,Ty)-(x,T^*Ty)=0$，可见$x-Tx\in A^\perp$，于是$T$是"从$H$到$A$上的投影". 其逆是显然的.

□

1.10.10 定理(Lax-Milgram) 设f是H上的Hermite双线性形式，$M=\sup_{\|x\|=\|y\|=1}|f(x,y)|<\infty$，则存在唯一$T\in L(H)$，$f(x,y)=(Tx,y)$，$\|T\|=M$. 若$f$还满足$\inf_{\|x\|=1}|f(x,x)|>0$，则$T$是一双射.

证 令$f_y(x)=f(x,y)$，则定理条件推出$f_y\in H'$，且$\|f_y\|\leqslant M\|y\|(y\in H)$. 由1.10.3，$\forall y\in H$，$\exists Ay\in H$：$f_y(x)=(x,Ay)$，$\|Ay\|=\|f_y\|$. 这就得到一个$A\in L(H)$，$\|A\|\leqslant M$. 从$M\leqslant\sup_{\|x\|=\|y\|=1}|(x,Ay)|\leqslant\|A\|$推出$\|A\|=M$. 令$T=A^*$，则$T$即

合定理要求，且它显然由$f(x,y)=(Tx,y)$唯一确定．

若$\delta=\inf_{\|x\|=1}|f(x,x)|>0$，则$\forall x\in H$：$\|Tx\|\|x\|\geqslant|(Tx,x)|=|f(x,x)|\geqslant\delta\|x\|^2$，这推出$T$为单射．若$Tx_n\to y$，则从$\|x_m-x_n\|\leqslant\delta^{-1}\|T(x_m-x_n)\|$推出$x_n\to x\in H$，于是$y=Tx$，可见$T(H)$是闭集．任给$x\in(TH)^{\perp}$，从$\delta\|x\|^2\leqslant|f(x,x)|=|(Tx,x)|=0$推出$x=0$，于是$TH=H$，$T$为双射得证． □

参考文献：[22]，[39]，[52]，[64]，[82]，[85]．

习 题

1．任给闭凸集$A\subset H$，$x\in H$，存在唯一$a\in A$：$\|x-a\|=d(x,A)$；特别有$a\in A$：$\|a\|=\min\{\|y\|\,|\,y\in A\}$．

2．若A，B是H的闭子空间，$0<\varepsilon<1$，$\forall a\in A$，$b\in B$：$|(a,b)|\leqslant\varepsilon\|a\|\|b\|$，则$A+B$是$H$的闭子空间．

3．设$P=P^2\in L(H)$，则P是正投影算子$\Longleftrightarrow\mathrm{Im}P=(\mathrm{Ker}P)^{\perp}\Longleftrightarrow(Px,x)=\|Px\|^2$．

4．若线性算子$T:H\to H$满足$(Tx,y)=(x,Ty)$，则$T\in L(H)$（参考§8习题3）．

第二章　微　分　学

局部地用线性函数或多项式近似代替函数这一导致经典微分概念的基本思想，同样支配了近代微分学．本章将遵循类似于经典微分学的线索展开Banach空间中的微分理论及其应用．

约定　字母X，Y，Z等总表示K(＝R或C）上的赋范空间；写出映射$f: \Omega\subset X\to Y$时，总假定Ω是X的非空开子集；$\Delta f(x,h)$记“增量”$f(x+h)-f(x)$．

§1　微分与中值定理

2.1.1 定义　设$f: \Omega\subset X\to Y$，$x\in\Omega$．若有$a\in L(X,Y)$：

$$\Delta f(x,h)=ah+o(h),\quad x+h\in\Omega, \tag{1}$$

(1) 意味着$\lim\limits_{h\to 0}\|\Delta f(x,h)-ah\|/\|h\|=0$，则称$f$在$x$可微，称$a$为$f$在$x$的Frechét导数或就叫导数，记作$f'(x)$(或$Df(x)$，$df_x$)．若对于$h\in X$存在极限

$$\delta f(x,h)=\lim_{\lambda\to 0}\lambda^{-1}\Delta f(x,\lambda h), \tag{2}$$

则称$\delta f(x,h)$为f在x沿h的方向导数．若$\forall h\in X$：$\delta f(x,h)$存在，则说f在x处G-可微，称映射$h\longmapsto\delta f(x,h)$为$f$在$x$的Gâteaux导数或$G$-导数．若$f$在$\Omega$内每点可微[$G$-可微]，就说$f$在$\Omega$内可微[$G$-可微]．

注　1°　若$f: \Omega\subset X\to Y$可微，则f有导函数（或仍称导数）$f': \Omega\to L(X,Y)$，$x\longmapsto f'(x)$，f'也记作Df或df；$f'(x)h$

$(x\in\Omega, h\in X)$相当于经典意义下的全微分.

2° 设$f: \Omega\subset \mathrm{K}\to Y$. 因$L(\mathrm{K}, Y)\to Y$, $a\longmapsto a(1)$ 是一等距同构，且$\Delta f(x,h)=ah+o(h)\Longleftrightarrow\Delta f(x,h)/h\to a(1)(h\to 0)$，故$f'(x)$存在$\Longleftrightarrow\lim\limits_{h\to 0}\Delta f(x,h)/h$存在. 因此不妨规定$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\Delta f(x,h)/h$，$f'(x)$也写作$df(x)/dx$.

3° 若$f: \Omega\subset X\to\mathrm{R}$可微，则称$f'(x)\in X'$为$f$在$x$的梯度；当$X=\mathrm{R}^n$时$f'(x)$就是通常的梯度.

4° 设$f: \Omega\subset\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^m$，$(x_1,\cdots,x_n)\longmapsto(y_1,\cdots,y_m)$. 若所有$\partial y_i/\partial x_j$存在且连续，则如2.3.2将指明的，$f$可微，且

$$f'(x)h=\frac{\partial(y)}{\partial(x)}h,\quad x\in\Omega, \tag{3}$$

其中$\partial(y)/\partial(x)$记Jacobi矩阵$(\partial y_i/\partial x_j)$，$h\in\mathrm{R}^n$看作列向量.

2.1.2 例 1° 任给$f\in L(X,Y)$，显然$f'(x)=f$.

2° 设X是实Hilbert空间，$f: X\setminus 0\to\mathrm{R}$，$x\longmapsto\|x\|$，则

$$\Delta f(x,h)=\frac{\|x+h\|^2-\|x\|^2}{\|x+h\|+\|x\|}=\left(\frac{x}{\|x\|},h\right)+o(h),$$

故
$$f'(x)h=\left(\frac{x}{\|x\|},h\right),\quad x\in X\setminus 0,\quad h\in X. \tag{4}$$

注意到$X'=X$(1.10.3)，所得结果可写成$f'(x)=x/\|x\|$.

3° $f: C[0,1]\to\mathrm{R}$，$x(t)\longmapsto\int_0^1|x(t)|dt$不可微：令$e(t)=t$，$x_s(t)=st$，则对任给$\varphi\in(C[0,1])'$，当$0\neq s\to 0$时，$\|x_s\|_u=|s|\to 0$，但$|\Delta f(0,x_s)-\varphi(x_s)|/\|x_s\|_u=\left|\frac{1}{2}-\frac{s}{|s|}\varphi(e)\right|\not\to 0$.

一般说来，“G-可微”比“可微”要弱得多.

2.1.3 定理 设$f: \Omega\subset X\to Y$, $x\in\Omega$, 则f在x可微$\Longleftrightarrow f$在x处G-可微，G-导数是有界线性算子，且关于$\|h\|=1$一致地

有$\lim\limits_{\lambda\to 0}\Delta f(x,\lambda h)/\lambda=\delta f(x,h)$.

证 若$f'(x)$存在，则显然有$\delta f(x,h)=f'(x)h$，$f'(x)$即f在x的G-导数，当$\|h\|=1$时，关于h一致地有

$$\begin{aligned}&\|\Delta f(x,\lambda h)/\lambda-\delta f(x,h)\|\\&=\|\Delta f(x,\lambda h)-f'(x)(\lambda h)\|/\|\lambda h\|\to 0(\lambda\to 0).\end{aligned}$$

反之，令$\lambda=\|h\|$，$k=h/\lambda$，从等式

$$\|\Delta f(x,h)-\delta f(x,h)\|/\|h\|=\|\Delta f(x,\lambda k)/\lambda-\delta f(x,k)\|$$

看出定理条件是充分的. □

经典微分学中的链规则可推广于下：

2.1.4 定理 设$f:\Omega\subset X\to Y$与$g:\Omega'\subset Y\to Z$分别在$x\in\Omega$与$y=f(x)\in\Omega'$可微，则$\varphi=g\circ f$在x可微，且

$$\varphi'(x)=g'(f(x))\circ f'(x). \tag{5}$$

证 令$k=\Delta f(x,h)$，则$h\to 0\Rightarrow k\to 0$，于是$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$\|h\|<\delta$时，$\|\Delta f(x,h)-f'(x)h\|\leqslant\varepsilon\|h\|$且$\|\Delta g(y,k)-g'(y)k\|\leqslant\varepsilon\|k\|$，

$$\begin{aligned}&\|\Delta\varphi(x,h)-g'(y)f'(x)h\|\\&\leqslant\|\Delta g(y,k)-g'(y)k\|+\|g'(y)\|\|\Delta f(x,h)-f'(x)h\|\\&\leqslant\varepsilon\|k\|+\varepsilon\|g'(y)\|\|h\|.\end{aligned}$$

注意到$\|k\|\leqslant\varepsilon\|h\|+\|f'(x)\|\|h\|$，即看出(5)成立. □

推论 1 若$f:\Omega\subset X\to Y$可微，$g\in L(Y,Z)$，则

$$D(g\circ f)(x)=g\circ Df(x),\quad x\in\Omega. \tag{6}$$

(6) 可说成是“连续线性算子可进入微分号”.

推论 2 设$f:\Omega\subset\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^m$，$(x_1,\cdots,x_n)\longmapsto(y_1,\cdots,y_m)$与$g:\Omega'\subset\mathrm{R}^m\to\mathrm{R}^p$，$(y_1,\cdots,y_m)\longmapsto(z_1,\cdots,z_p)$可微，$f\Omega\subset\Omega'$，则结合(3)与(5)得到Jacobi矩阵的乘法规则：

$$\frac{\partial(z)}{\partial(x)}=\frac{\partial(z)}{\partial(y)}\,\frac{\partial(y)}{\partial(x)}. \tag{7}$$

推广经典的 Leibniz 微分规则需要用有界双线性算子代替通常的乘积.

2.1.5 定理 设$f: \Omega \subset X \to U$与$g: \Omega \subset X \to V$ 可微, $\omega \in L(U, V; Y)$. 则$\varphi(x)=\omega(f(x), g(x))$在$\Omega$内可微, 且

$$\varphi'(x)h=\omega(f'(x)h, g(x))+\omega(f(x), g'(x)h), \quad (8)$$
$$x\in\Omega, \ h\in X.$$

证 记$\omega(u,v)$为$u\cdot v$. 取定$x\in\Omega$, 不难验证映射

$$a: h\longmapsto f'(x)h\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)h$$

属于$L(X,Y)$. 于是(8)从以下估计推出:

$$\|\Delta\varphi(x,h)-ah\|\leqslant\|[\Delta f(x,h)-f'(x)h]\cdot g(x+h)\|$$
$$+\|f(x)\cdot[\Delta g(x,h)-g'(x)h]\|+\|f'(x)h\cdot\Delta g(x,h)\|=o(h).$$

□

若$X=\mathrm{R}$或C, 则在(8)中令$h=1$得:

$$\frac{d}{dx}\omega(f(x), g(x))=\omega(f'(x), g(x))+\omega(f(x), g'(x)). \quad (9)$$

下面是微分学的基本定理之一.

2.1.6 中值定理 设$f: \Omega\subset X\to Y$ G-可微, Ω含线段 $L[x, x+h]$, 则 $\|\Delta f(x,h)\|\leqslant\sup\limits_{y\in L}\|\delta f(y,h)\|$.

证 易见$\varphi(t)=f(x+th)$在$[0,1]$上可微, 且 $\varphi'(t)=\delta f(x+th, h)$. 令$\beta=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\|\varphi'(t)\|$, 则只要对任给 $\rho>\beta$ 证$\|\varphi(1)-\varphi(0)\|\leqslant\rho$. 令$T=\{t\in[0,1] \mid \|\varphi(t)-\varphi(0)\|\leqslant\rho t\}$, 则$T$是闭集, $0\in T$. 令$\tau=\sup T$, 则必$\tau=1$. 否则当$s>0$充分小时有

$$\|\varphi(\tau+s)-\varphi(0)\|\leqslant\|\varphi(\tau)-\varphi(0)\|+\rho s\leqslant\rho(\tau+s),$$

这推出$\tau+s\in T$, 得出矛盾. □

推论 依2.1.6的记号, 若f可微, $a\in L(X,Y)$, 则

$$\|\Delta f(x,h)-ah\|\leqslant\sup_{y\in L}\|f'(y)-a\|\|h\|; \quad (10)$$

特别，
$$\|\Delta f(x,h)\| \leqslant \sup_{y\in L}\|f'(y)\|\|h\|. \tag{11}$$

参考文献：[2]，[19]，[22]，[39]，[52]，[53].

习　题

1． 设$f: \Omega\subset \mathrm{R}\to Y$在$x\in\Omega$可微，则
$$f'(x)=\lim_{u\to x+0,\, v\to x-0}\frac{f(u)-f(v)}{u-v}.$$

2． 若$f:\Omega\subset X\to Y$可微，$0\in\Omega$，$f(\lambda x)\equiv\lambda f(x)$，则$f(x)=f'(0)x$. 由此推出：函数“$f(x,y)=x^3/(x^2+y^2)\ ((x,y)\in \mathrm{R}^2\setminus 0)$，$f(0,0)=0$”在原点必不可微，而$f$是$G$-可微的.

3． 若$f:\Omega\in X\to Y$ G-可微，G-导数是有界线性算子且在Ω内连续变动，则f可微.

§2　高阶微分与Taylor公式

高阶导数依自然的方式递归地定义：

2.2.1 定义　给定$f:\Omega\subset X\to Y$. 若f在Ω内可微，函数$Df:\Omega\subset X\to L(X,Y)$在点$x\in\Omega$可微，则称$D(Df)(x)$为$f$在$x$的2阶导数，记作$D^2f(x)$或$f''(x)$，此时$f''(x)\in L(X,L(X,Y))$. 一般地，若$f$在$\Omega$内$r$次可微，则$r$阶导数$f^{(r)}$(或$D^rf$)是一个如下的映射：

$$f^{(r)}:\Omega\subset X\to L(\overbrace{X,L(X,\cdots,L(X}^{r\text{层}},Y)\cdots)),\ x\longmapsto f^{(r)}(x); \tag{1}$$

当$f^{(r)}$连续时称f为C^r函数. 以$C^r(\Omega,Y)$记从Ω到Y的C^r函数之全体，令$C^r(\Omega)=C^r(\Omega,\mathrm{C})\ (0\leqslant r\leqslant\infty)$，$C^0$与$C^\infty$分别意指连续与无限次可微. 若$f:\Omega\to\Omega'$为双射且$f$与$f^{-1}$皆为$C^r$ $(r\geqslant 1)$函数，则称f为C^r微分同胚；C^∞微分同胚就叫微分同胚.

空间 $L(X, L(X, \cdots, L(X, Y)\cdots))$ 可用形式上较简单的 $L^r(X, Y)$ 替代. 一般地, 对任给 $a \in L(X_1, L(X_2, \cdots, L(X_r, Y)\cdots))$, 定义

$$\bar{a}: X_1 \times \cdots \times X_r \to Y, \quad (x_1, \cdots, x_r) \longmapsto (\cdots(ax_1)x_2\cdots)x_r, \tag{2}$$

则 $\bar{a} \in L(X_1, \cdots, X_r; Y)$, $\|\bar{a}\| \leqslant \|a\|$ (参看§1.6). 对应 $a \longmapsto \bar{a}$ 显然是线性的. 任给 $b \in L(X_1, \cdots, X_r; Y)$, $(x_1, \cdots, x_{r-1}) \in X_1 \times \cdots \times X_{r-1}$, 映射

$$b(x_1, \cdots, x_{r-1}, \cdot): X_r \to Y, \quad x_r \longmapsto b(x_1, \cdots, x_{r-1}, x_r)$$

是一连续线性算子, 且 $\|b(x_1, \cdots, x_{r-1}, \cdot)\| \leqslant \|b\| \|x_1\| \cdots \|x_{r-1}\|$. 于是

$$X_1 \times \cdots \times X_{r-1} \to L(X_r, Y), \quad (x_1, \cdots, x_{r-1}) \longmapsto b(x_1, \cdots, x_{r-1}, \cdot)$$

是一个 $(r-1)$ 重线性算子, 其范数 $\leqslant \|b\|$. 递次进行下去, 最后将得出一个 $a \in L(X_1, L(X_2, \cdots, L(X_r, Y)\cdots))$, 它满足 $\bar{a} = b$, $\|a\| \leqslant \|b\|$. 这就建立了

2.2.2 定理 对应 $L(X_1, L(X_2, \cdots, L(X_r, Y)\cdots)) \to L(X_1, \cdots, X_r; Y)$, $a \longmapsto \bar{a}$ 是一等距同构, 其中 $\bar{a}$ 由(2)式给定.

因此, 当 $f: \Omega \subset X \to Y$ r 次可微时不妨认为 $f^{(r)}(x) \in L^r(X, Y)$; 自然, $f^{(r)}(x)h_1 \cdots h_r = (\cdots(f^{(r)}(x)h_1) h_2 \cdots) h_r$, $x \in \Omega$, $h_1, \cdots, h_r \in X$. $f^{(r)}(x)h^r = f^{(r)}(x)\overbrace{h \cdots h}^{r\text{个}}$ 可看作通常的 r 阶微分 $f^{(r)}(x)dx^r$ 的推广; 当 $X = \mathrm{R}$ 时, $f^{(r)}(x)h^r$ 就是向量 $f^{(r)}(x) \in Y$ 与数量 h^r 的乘积.

2.2.3 例 1° 设 $f: \Omega \subset X \to Y$ 与 $g: \Omega' \subset Y \to Z$ 2 次可微, $f\Omega \subset \Omega'$, $\varphi = g \circ f$. 将 Leibniz 规则用于 $\varphi'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x)$ 得:

$$\begin{aligned} D^2\varphi(x)hk &= D[D\varphi(x)k]h = D[g'(f(x)) \cdot f'(x)k]h \\ &= (g''(f(x)) \cdot f'(x)h) \cdot f'(x)k + g'(f(x)) \cdot f''(x)hk. \end{aligned}$$

2° 设 $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 有所有 2 阶连续偏导数，则对任给 $x \in \Omega$，$h=(h_1,\cdots,h_n)$，$k=(k_1,\cdots,k_n) \in \mathbb{R}^n$，有

$$D^2 f(x)hk = D\left(\sum_j \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} k_j\right)h$$

$$= \sum_j \left(D\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right)h\right)k_j = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} h_i k_j. \qquad (3)$$

2.2.4 定理 若 $f: \Omega \subset X \to Y$ 在 $x \in \Omega$ r 次可微，$r \geqslant 1$，则 $f^{(r)}(x) \in L_s^r(X,Y)$（记号参看§1.6(5)）.

证 首先设 $r=2$，要证者：

$$f''(x)hk = f''(x)kh, \quad h,k \in X. \qquad (4)$$

任给 $\varepsilon > 0$，取 $\delta > 0$，使当 $l \in X$，$\|l\| \leqslant 2\delta$ 时，

$$\|\Delta f'(x,l) - f''(x)l\| \leqslant \varepsilon \|l\|.$$

显然 $\Delta^2 f(x;h,k) = f(x+h+k) - f(x+h) - f(x+k) + f(x)$ 关于 (h,k) 是对称的. 当 $\|h\| \leqslant \delta$，$\|k\| \leqslant \delta$ 时，

$$\|\Delta^2 f(x;h,k) - f''(x)hk\| \leqslant \sup_{0<t<1} \|\Delta f'(x+tk,h)$$

$$- f''(x)h\| \|k\| \leqslant \sup_{\|l\|<\delta} \|\Delta f'(x+l,h) - f''(x)h\| \|k\|$$

$$\leqslant \sup_{\|l\|<\delta} [\|\Delta f'(x,l+h) - f''(x)(l+h)\| + \|\Delta f'(x,l)$$

$$- f''(x)l\|] \|k\| \leqslant 2\varepsilon\delta^2 + \varepsilon\delta^2 = 3\varepsilon\delta^2.$$

同理 $\|\Delta^2 f(x;h,k) - f''(x)kh\| \leqslant 3\varepsilon\delta^2$，于是

$$\|f''(x)hk - f''(x)kh\| \leqslant 6\varepsilon\delta^2.$$

利用 $f''(x)$ 的双线性去掉 $\|h\| \leqslant \delta$，$\|k\| \leqslant \delta$ 的限制后得：

$$\|f''(x)hk - f''(x)kh\| \leqslant 6\varepsilon \|h\| \|k\|.$$

令 $\varepsilon \to 0$ 即得(4). 一般情况由(4)及以下等式推出：

$$D^r f(x)h_1 \cdots h_r$$

$$= D^{i-1}(D^2(D^{r-i-1} f(x)h_{i+2} \cdots h_r)h_i h_{i+1})h_1 \cdots h_{i-1}. \qquad \square$$

下面考虑推广Taylor公式. 对于实值可微函数，事情是很简单的.

2.2.5 定理 设 $f: \Omega\subset X\to \mathrm{R}$ $(r+1)$次可微，$0\leqslant r<\infty$，Ω包含线段$[x,x+h]$，则成立以下Taylor公式：

$$f(x+h)=\sum_{k=0}^{r}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)h^k+\frac{1}{(r+1)!}f^{(r+1)}(x+\theta h)h^{r+1}. \tag{5}$$

其中$f^{(0)}(x)h^0=f(x)$，$0<\theta<1$.

证 将通常的Taylor公式用到$\varphi(t)=f(x+th)$得：

$$\varphi(1)=\sum_{k=0}^{r}\frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(0)+\frac{1}{(r+1)!}\varphi^{(r+1)}(\theta),\quad 0<\theta<1.$$

归纳地指明$\varphi^{(k)}(t)=f^{(k)}(x+th)h^k(0\leqslant k\leqslant r+1)$,即得(5)式. □

特别，在(5)中令$r=0$得中值公式：

$$f(x+h)-f(x)=f'(x+\theta h)h,\quad 0<\theta<1. \tag{6}$$

对于向量值可微函数，可建立带积分余项的Taylor公式. 首先推广 Riemann 积分如下（积分学的系统展开将在下章进行）：设 $f\in C([a,b],Y)$，Y是B-空间. 依通常的方式构成"Riemann和" $\sum f(\tau_i)\Delta t_i$，其中 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$，$a=t_0\leqslant\tau_1\leqslant t\leqslant\cdots\leqslant\tau_n\leqslant t_n=b$，则可证明（参看 3.7.6 之推论）：存在与$\{t_i,\tau_i\}$的取法无关的极限：

$$\int_a^b f(t)dt=\lim\sum_i f(\tau_i)\Delta t_i, \tag{7}$$

极限是关于$\max\Delta t_i\to 0$取的. 易验证积分的以下性质：

$$\left\|\int_a^b f(t)dt\right\|\leqslant\int_a^b\|f(t)\|dt; \tag{8}$$

$$\int_a^b F'(t)dt=F(b)-F(a),\quad F\in C^1; \tag{9}$$

$$\int_a^b\varphi' f dt=\varphi f\Big|_a^b-\int_a^b\varphi f' dt, \tag{10}$$

(10)中$\varphi\in C^1[a,b]$，$f\in C^1([a,b],Y)$.

2.2.6 定理 设$f: \Omega \subset X \to Y$是$C^{r+1}$函数，$0 \leqslant r < \infty$，$\Omega$包含线段$[x, x+h]$，$Y$是$B$-空间，则成立Taylor公式：

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{r} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) h^k + \frac{1}{r!} \int_0^1 (1-t)^r f^{(r+1)}(x+th) h^{r+1} dt. \tag{11}$$

证 $r=0$时(11)由(9)得出. 设定理已对$C^r(r \geqslant 0)$函数证明，则应用(10)得：

$$f(x+h) - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) h^k$$

$$= \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 (1-t)^{r-1} f^{(r)}(x+th)\, h^r dt$$

$$= \frac{1}{r!} f^{(r)}(x) h^r + \frac{1}{r!} \int_0^1 (1-t)^r f^{(r+1)}(x+th) h^{r+1} dt. \qquad \square$$

若令$M = \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} \| f^{(r+1)}(x+th) \|$，则从(11)推出：

$$\left\| f(x+h) - \sum_{k=0}^{r} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) h^k \right\| \leqslant \frac{M \|h\|^{r+1}}{(r+1)!}. \tag{12}$$

(12)给出用“r阶Taylor多项式”逼近C^{r+1}函数的误差估计. 若$f \in C^\infty$，$\sup\limits_{|y-x| \leqslant \delta} \| f^{(r)}(y) \| \leqslant r!\rho^r$，$\rho, \delta > 0$与$r$无关，则(12)推出$f$在$x$的某邻域内可展开为“Taylor级数”：

$$f(x+h) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x) h^r. \tag{13}$$

在定义域中每点的一邻域内可展开为Taylor级数的C^∞函数称为C^ω函数或解析函数；每个C^ω函数$f: \Omega \subset \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$称为**实解析函数**.

最后，考虑C^r函数在极限运算下的封闭性.

2.2.7 定理 设$f_n: \Omega \subset X \to Y$是$C^r(1 \leqslant r \leqslant \infty)$函数，$n = 1, 2, \cdots$，$Y$是$B$-空间. 若$\forall x \in \Omega$，$f_n(x) \to f(x)$，当$m, n \to \infty$时，$\{f_m^{(k)} - f_n^{(k)}\}(1 \leqslant k < r+1)$在$\Omega$内局部一致收敛于0(1.8.2)，

则$f\in C^r(\Omega,Y)$，$\{f_n^{(k)}\}(0\leqslant k<r+1)$在$\Omega$内局部一致收敛于$f^{(k)}$.

证 显然仅需对$r=1$证明，且不妨设$\Omega=B(a,\delta)$，$f_n'\overset{\Omega}{\rightrightarrows}g$，$g:\Omega\to L(X,Y)$. 任给$x\in\Omega$，由§2.1(11)有

$$\|f_m(x)-f_n(x)\|\leqslant\|f_m(a)-f_n(a)\|+\sup_{y\in\Omega}\|f_m'(y)-f_n'(y)\|\cdot\delta,$$

可见$f_n\overset{\Omega}{\rightrightarrows}f$（注意实际上只用到$\{f_n(a)\}$收敛！）.

任给$x\in\Omega$，今证$f'(x)=g(x)$. 设$x+h\in\Omega$，则

$$\|\Delta f_n(x,h)-f_n'(x)h\|\leqslant\sup_{0<t<1}\|\Delta f_n'(x,th)\|\|h\|. \qquad (14)$$

因$\{f_n'\}$一致收敛（从而g连续），故可在(14)两边取极限：

$$\|\Delta f(x,h)-g(x)h\|\leqslant\sup_{0<t<1}\|\Delta g(x,th)\|\|h\|.$$

这表明$f'(x)=g(x)$，从而$f\in C^1(\Omega,Y)$. □

推论 若$f_n:\Omega\subset X\to Y$是$C^r(1\leqslant r\leqslant\infty)$函数，$n=1,2,\cdots$，$Y$是$B$-空间，$\sum_n\|f_n^{(k)}(x)\|$在$\Omega$内局部一致收敛，$0\leqslant k<r+1$，则$\sum f_n(x)$是一$C^r$函数，且可逐项微分：

$$D^k(\sum_n f_n(x))=\sum_n D^k f_n(x),\ k<r+1,\ x\in\Omega. \qquad (15)$$

参考文献：[2]，[19]，[22]，[52]，[53]，[81].

习 题

1. 设$f:\Omega\subset X\to Y$在$x\in\Omega$ r次可微，$[x,x+h]\subset\Omega$. 则

$$\left\|f(x+h)-\sum_0^r\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)h^k\right\|=o(\|h\|^r).$$

2. 设$f:B(0,2)\subset X\to Y$是C^2函数，当$\|x\|\leqslant1$时$\|f(x)\|\leqslant1$，$\|f''(x)\|\leqslant1$. 则当$\|x\|\leqslant1$时$\|f'(x)\|\leqslant1$.

3. 设$f:(a,b)\subset\mathbb{R}\to X$是$C^1$函数，$g\in C[a,b]$，$\lambda\neq0$，$\|g(t)f(t)+\lambda f'(t)\|\leqslant\|f(t)\|$. 则$\forall t\in(a,b)$：$f(t)\neq0$，除非$f\equiv0$.

§3 偏导数

首先建立一个涉及线性算子的预备结果．设 X_j, Y_i $(1\leqslant j\leqslant n,\ 1\leqslant i\leqslant m)$为 TVS，$X=\prod X_j$，$Y=\prod Y_i$，$p_j: X\to X_j$ 与 $q_i: Y\to Y_i$为投影，$\theta_j: X_j\to X$ 与$\sigma_i: Y_i\to Y$为嵌入，它们满足

$$\sum_j \theta_j p_j = 1_X;\quad p_k\theta_j=\begin{cases}\mathrm{id}, & k=j;\\ 0, & k\neq j.\end{cases} \tag{1}$$

2.3.1 定理 $T\in L(X,Y)\Longleftrightarrow \exists\, a_{ij}\in L(X_j,Y_i)$:

$$T=\sum_{i,j}\sigma_i a_{ij} p_j; \tag{2}$$

分解式(2)由 T 唯一决定．

证 若$a_{ij}\in L(X_j,Y_i)$，则(2)表示的T显然属于 $L(X,Y)$，且$a_{ij}=q_i T\theta_j$由 T 确定．反之，任给 $T\in L(X,Y)$，令$a_{ij}=q_i T\theta_j$，则$a_{ij}\in L(X_j,Y_i)$，

$$T=\Big(\sum_i \sigma_i q_i\Big)\circ T\circ\Big(\sum_j\theta_j p_j\Big)=\sum_{i,j}\sigma_i a_{ij}p_j. \qquad \square$$

由(2)得出T的矩阵表示：任给$x=(x_1,\cdots,x_n)\in X$，

$$Tx=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, \tag{3}$$

将$a_{ij}x_j$形式地看作“乘积”．这样，可将T等同于“算子矩阵”(a_{ij})．不难证明，算子矩阵的“积”与“逆”恰对应算子的复合与逆．由(2)也得到线性同构：

$$L(X,Y)\cong\prod L(X_j,Y),\quad T\longmapsto(T\theta_1,\cdots,T\theta_n); \tag{4}$$

$$L(X,Y)\cong\prod L(X,Y_i),\quad T\longmapsto(q_1T,\cdots,q_mT); \tag{5}$$

$$X'\cong\prod X_j';\quad (X^n)'\cong(X')^n\cong L(X,\mathbb{C}^n). \tag{6}$$

当X_j, Y_i是赋范空间时，以上同构为拓扑同构．

以下设X_j, Y_i是赋范空间．给定映射

$$f: \Omega \subset X \to Y, \quad (x_1, \cdots, x_n) \longmapsto (y_1, \cdots, y_m), \tag{7}$$

其中$y_i = f_i(x_1, \cdots, x_n)$是$f$的"分量"．(7)可分解成：

$$f = \sum \sigma_i f_i, \quad f_i = q_i f, \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{8}$$

(沿用前面的记号)．若$f(x_1, \cdots, x_n)$看作变元x_j的函数可微，则将其导数称为f对x_j的偏导数，记作$\partial f/\partial x_j$（简记f'_{x_j}或$\partial_j f$）．类似地可定义高阶偏导数，记号$\partial^r f(x)/\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_r}$或$\partial_{j_1} \cdots \partial_{j_r} f(x)$的意义自明．

2.3.2 定理 设f如(7)．则(i)f r次可微$\Longleftrightarrow$每个f_i r次可微$\Longrightarrow$每个f_i存在所有r阶偏导数；(ii)$f \in C^r \Longleftrightarrow$所有$r$阶偏导数$\partial_{j_1} \cdots \partial_{j_r} f_i$存在且连续($1 \leqslant r < \infty$)．

证 (i)从(8)看出，f r次可微$\Longleftrightarrow$每个f_i r次可微．映射$x_j \longmapsto f_i(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n)$可分解成：

$$x_j \xmapsto{\theta_j} (0, \cdots, x_j, \cdots, 0) \xmapsto{\text{平移}} (x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n)$$

$$\xmapsto{f} f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n) \xmapsto{q_i} f_i(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n),$$

于是当f可微时由链规则得出：

$$\partial f_i(x)/\partial x_j = q_i \circ f'(x) \circ \theta_j, \quad x = (x_1, \cdots, x_n); \tag{9}$$

因此
$$f'(x) = \sum_{i,j} \sigma_i \circ \partial_j f_i(x) \circ p_j. \tag{10}$$

若f $r(>1)$次可微，则f' $r-1$次可微，于是不难归纳地推出所有偏导数$\partial_{j_1} \cdots \partial_{j_r} f_i$存在．

(ii) 因可对r用归纳法，只需考虑$r=1$的情况．若$f \in C^1$，则从(9)直接看出所有$\partial_j f_i$连续．反之，若所有$\partial_j f_i$存在且连续，则必$f \in C^1$，不妨就$m=1$，$n=2$证明这一点．取定$x=(x_1, x_2) \in \Omega$，则$\sum \partial_j f(x) \circ p_j \in L(X, Y)$．设$h=(h_1, h_2) \in X_1 \times X_2$，$x+h \in \Omega$．以下估计

$$\|\Delta f(x,h) - \sum \partial_j f(x) h_j\| \leqslant \|f(x+h) - f(x_1, x_2+h_2) - \partial_1 f(x) h_1\| + \|f(x_1, x_2+h_2) - f(x) - \partial_2 f(x) h_2\|$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\|\partial_1 f(x_1+th_1,x_2+h_2)-\partial_1 f(x)\|\|h_1\|$$
$$+\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\|\partial_2 f(x_1,x_2+th_2)-\partial_2 f(x)\|\|h_2\|=o(\|h_1\|+\|h_2\|)$$

表明$f'(x)=\sum\partial_j f(x)\circ p_j$．由此直接看出$f'$连续． □

任给$h=(h_1,\cdots,h_n)\in X$，将(3)用到(10)得：

$$f'(x)h=(\partial f_i(x)/\partial x_j)h, \tag{11}$$

右端h看作"列矩阵"．算子矩阵$(\partial f_i/\partial x_j)$可称为$f$的"Jacobi矩阵"（参照§1(3)）．当$m=1$或$n=1$时，(11)可写成

$$f'(x)h=\sum_j\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}h_j \tag{12}$$

或
$$f'(x)h=(f_1'(x)h,\cdots,f_m'(x)h). \tag{13}$$

本节的后一部分考虑从C^r函数构成C^r函数的几种典型方式．首先证明：

2.3.3 定理 若$f:\Omega\subset X\to Y$与$g:\Omega'\subset Y\to Z$是$C^r(0\leqslant r\leqslant\infty)$函数，$f\Omega\subset\Omega'$，则$\varphi=g\circ f\in C^r(\Omega,Z)$．

证 $r=0$时定理显然成立．设定理对C^{r-1}函数成立，g，$f\in C^r(1\leqslant r<\infty)$，则$g'\circ f$与$f'$属于$C^{r-1}$．因

$$\omega:L(Y,Z)\times L(X,Y)\to L(X,Z),\ (a,b)\longmapsto a\circ b$$

显然是C^∞函数，而$\varphi':x\longmapsto(g'(f(x)),\ f'(x))\overset{\omega}{\longmapsto}\varphi'(x)$，故由归纳假设得$\varphi'\in C^{r-1}$，从而$\varphi\in C^r$． □

令$I=[0,1]$．$C^r(I,X)(0<r<\infty)$依范数

$$\|\varphi\|_r=\sup_{t\in I,0\leqslant k\leqslant r}\|\varphi^{(k)}(t)\| \tag{14}$$

是一赋范空间，当X是B-空间时$C^r(I,X)$亦为B-空间．

2.3.4 定理 在上述记号下，"赋值映射"

$$\theta:C^r(I,\Omega)\times(0,1)\subset C^r(I,X)\times\mathrm{R}\to X,$$
$$(\varphi,t)\longmapsto\varphi(t) \tag{15}$$

是C^r的，且对任给$(g_i,s_i)\in C^r(I,X)\times\mathrm{R}(1\leqslant i\leqslant r)$，有

$$D^r\theta(\varphi,t)(g_1,s_1)\cdots(g_r,s_r)$$
$$=\varphi^{(r)}(t)s_1\cdots s_r+\sum_{i=1}^{r}g_i^{(r-1)}(t)s_1\cdots \hat{s}_i\cdots s_r, \tag{16}$$

其中$(\varphi,t)\in C^r(I,\Omega)\times(0,1)$，$\hat{s}_i$表示$s_i$已被划去.

证 首先设$r=1$. 取定$(\varphi,t)\in C^1(I,\Omega)\times(0,1)$，易见

$$C^1(I,X)\times\mathrm{R}\to X,\ (g,s)\longmapsto\varphi'(t)s+g(t)$$

是一连续线性算子. 由

$$\|\Delta\theta((\varphi,t),(g,s))-\varphi'(t)s-g(t)\|$$
$$\leqslant\|\Delta\varphi(t,s)-\varphi'(t)s\|+\|\Delta g(t,s)\|=o(|s|+\|g\|_1)$$

得
$$D\theta(\varphi,t)(g,s)=\varphi'(t)s+g(t). \tag{17}$$

取$(\psi,\tau)\in C^1(I,\Omega)\times(0,1)$，$(g,s)\in C^1(I,X)\times\mathrm{R}$，使$\|g\|_1=1=|s|$，则

$$\|[D\theta(\varphi,t)-D\theta(\psi,\tau)](g,s)\|=\|\varphi'(t)s-\psi'(\tau)s+g(t)$$
$$-g(\tau)\|\leqslant\|\varphi'(t)-\varphi'(\tau)\|+\|\varphi-\psi\|_1+|t-\tau|,$$

可见$D\theta$在"点"(φ,t)连续，因此$\theta\in C^1$.

假定定理已对C^{r-1}函数证明，$r>1$. 任给$(\varphi,t)\in C^r(I,\Omega)\times(0,1)$，$(g_1,s_1)\in C^r(I,X)\times\mathrm{R}$，由(17)有

$$D\theta(\varphi,t)(g_1,s_1)=\theta(\varphi',t)s_1+g_1(t). \tag{18}$$

因$C^r(I,X)\to C^{r-1}(I,X)$，$\varphi\longmapsto\varphi'$是连续线性映射，故$(\varphi,t)\longmapsto\theta(\varphi',t)$是$C^{r-1}$函数. 于是不难从(18)推出$D\theta$是$(\varphi,t)$的$C^{r-1}$函数，从而$\theta\in C^r$. (16)推出如下：

$$D^r\theta(\varphi,t)(g_1,s_1)\cdots(g_r,s_r)$$
$$=D^{r-1}[\theta(\varphi',t)s_1+g_1(t)](g_2,s_2)\cdots(g_r,s_r)$$
$$=[\varphi^{(r)}(t)s_2\cdots s_r+\sum_{i=2}^{r}g_i^{(r-1)}(t)s_2\cdots\hat{s}_i\cdots s_r]s_1$$
$$+g_1^{(r-1)}(t)s_2\cdots s_r$$
$$=\varphi^{(r)}(t)s_1\cdots s_r+\sum_{i=1}^{r}g_i^{(r-1)}(t)s_1\cdots\hat{s}_i\cdots s_r,$$

其中$\hat{s}_i$表示s_i已划去. □

推论 若$\Omega'\subset Y\to C^r(I,\Omega)$，$y\longmapsto\varphi_y$是$C^r$映射，则$(0,1)\times\Omega'\subset \mathrm{R}\times Y\to X$，$(t,y)\longmapsto\varphi_y(t)$是$C^r$映射．

2.3.5 定理 给定紧拓扑空间T，$C(T,X)$，$C(T,Y)$中采用上确界范数(§1.3(1))．则任给C^r映射$g:\Omega\subset X\to Y$导出一C^r映射Ω_g：

$$\Omega_g: C(T,\Omega)\subset C(T,X)\to C(T,Y),\quad \varphi\longmapsto g\circ\varphi. \tag{19}$$

证 首先设$r=1$．任给φ，$\varphi+h\in C(T,\Omega)$，依估计

$$\|\Delta\Omega_g(\varphi,h)-(g'\circ\varphi)\cdot h\|_u$$
$$\leqslant \sup_{0<\theta<1,\ t\in T}\|g'(\varphi(t)+\theta h(t))-g'(\varphi(t))\|\|h\|_u=o(\|h\|_u)$$

有
$$(\Omega_g'(\varphi)h)(t)=g'(\varphi(t))\cdot h(t),\quad t\in T. \tag{20}$$

依(20)可将映射$\varphi\longmapsto\Omega_g'(\varphi)$分解成：

$$\varphi\overset{\Omega_g'}{\longmapsto}g'\circ\varphi\overset{L}{\longmapsto}(h(t)\longmapsto g'(\varphi(t))\cdot h(t)),$$

其中$L\in L(C(T,L(X,Y)),\ L(C(T,X),\ C(T,Y)))$．于是可如同2.3.4一样归纳地完成证明． □

以上两定理都是处理函数空间中的C^r映射，它们将是证明3.6.1的基础．这一事实多少说明了考虑“无限维空间中的微分学”的必要性．

参考文献：[2]，[19]，[22]，[52]，[53]．

习 题

1．若$f(x,y):\Omega\subset X\times Y\to Z$对$x$连续，对$y$可微且$\sup\limits_{\Omega}\|\partial f/\partial y\|<\infty$，则$f\in C(\Omega,Z)$；$f\in C^r(r\geqslant1)\Longleftrightarrow\partial f/\partial x\in C^{r-1},\partial f/\partial y\in C^{r-1}$；若$f\in C^2$，$X=\mathrm{R}$，则$\partial^2 f/\partial x\partial y=\partial^2 f/\partial y\partial x$．

2．若$f:\Omega\subset X\to Y$ r次可微，$x\in\Omega$，h_1，…，$h_r\in X$，则
$$f^{(r)}(x)h_1\cdots h_r=\partial^r f(x+t_1h_1+\cdots+t_rh_r)/\partial t_1\cdots\partial t_r|_{t_1=\cdots=t_r=0}.$$

3．设$f:\Omega\subset X\to Y$是C^2函数，h，$k\in X$，$A\in L(\mathrm{R}^2,X)$由$A(1,0)=h$，

$A(0,1)=h$决定。若$A(u,v)=x\in\Omega$，则$D^2(f\circ A)(u,v)(1,0)(0,1)=D^2f(x)hk$。由此推出2.2.4。

§4 R^n上的向量值可微函数

本节中设E是给定的LCS，$\{\|x\|_s|s\in S\}$是它的一族基本半范(参看§1.2)；$\Omega\subset\mathrm{R}^n$是给定的非空开集.

2.4.1 定义 给定$f:\Omega\to E$，$x=(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega$。称

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}=\lim_{h\to 0}h^{-1}[f(x_1,\cdots,\ x_i+h,\cdots,x_n)-f(x)]\quad(1)$$

为f在x对变元x_i的偏导数，只要(1)右端存在. 高阶偏导数依通常的方式归纳地定义. 若f在Ω内有所有$<r+1$阶($0\leqslant r\leqslant\infty$)的连续偏导数，则说$f$是$C^r$函数，记作$f\in C^r(\Omega,E)$.

若$f\in C^r(\Omega,E)(1\leqslant r<\infty)$，则利用(1)可归纳地得出：

$$\frac{\partial^r\varphi(f(x))}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_r}}=\varphi\left(\frac{\partial^r f(x)}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_r}}\right),\ \forall\varphi\in E',\quad(2)$$

由此推出$\partial^r f(x)/\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_r}$与微分顺序无关.

规定一套缩记号如下：对于点$x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathrm{R}^n$，微分算子$\partial=(\partial_1,\cdots,\partial_n)$ ($\partial_i=\partial/\partial x_i$，必要时写$\partial$为$\partial_x$)及重指标$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathrm{N}^n$，约定

$$x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n},\ \partial^\alpha=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n};\quad(3)$$

$$|\alpha|=\sum\alpha_i,\ \alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!,$$

$$\binom{\alpha}{\beta}=\binom{\alpha_1}{\beta_1}\cdots\binom{\alpha_n}{\beta_n}=\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!},\quad(4)$$

(4)中$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\in\mathrm{N}^n$，$\beta\leqslant\alpha$(即$\beta_i\leqslant\alpha_i$，$1\leqslant i\leqslant n$)，$\alpha-\beta=(\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_n-\beta_n)$. 若$P(x,\xi)=\sum_{|\alpha|\leqslant r}a_\alpha(x)\xi^\alpha$，$a_\alpha\in C^\infty(\Omega)$，至少对某个$\alpha$：$|\alpha|=r,a_\alpha\neq0$，则$P(x,\xi)$决定一$r$阶

微分算子

$$P(x,\partial)=\sum_{|\alpha|\leqslant r}a_\alpha(x)\partial^\alpha. \qquad (5)$$

任给$f\in C^r(\Omega,E)$，$P(x,\partial)$对f作用的结果是：

$$P(x,\partial)f=\sum_{|\alpha|\leqslant r}a_\alpha(x)\frac{\partial^\alpha f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},\quad x\in\Omega.$$

若E是赋范空间，则可归纳地证明：

$$f^{(r)}(x)h^r=\sum_{|\alpha|=r}\frac{r!}{\alpha!}\partial^\alpha f(x)h^\alpha=(\partial\cdot h)^r f(x), \qquad (6)$$

其中$x\in\Omega$，$h\in\mathbf{R}^n$，$\partial\cdot h=\sum h_i\partial_i$．于是当$f\in C^{r+1}(\Omega,E)$，$E$为$B$-空间，$[x,x+h]\subset\Omega$时成立以下Taylor公式(参照2.2.6)：

$$f(x+h)=\sum_{|\alpha|\leqslant r}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(x)h^\alpha$$
$$+\sum_{|\alpha|=r+1}\frac{r+1}{\alpha!}\int_0^1(1-t)^r\partial^\alpha f(x+th)h^\alpha dt. \qquad (7)$$

前几节的某些结果可推广于E-值可微函数．

2.4.2 定理 设$f\in C^r(\Omega,E_1)$，$g\in C^r(\Omega,E_2)$($1\leqslant r\leqslant\infty$)，$\varphi(x)=\omega(f(x),g(x))$($x\in\Omega$)，$\omega\in L(E_1,E_2;E)$($E_1$，$E_2$，$E$为LCS)．则$\varphi\in C^r(\Omega,E)$，当$\alpha\in\mathbf{N}^n$，$|\alpha|<r+1$时成立Leibniz公式：

$$\partial^\alpha\varphi(x)=\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\omega(\partial^{\alpha-\beta}f(x),\ \partial^\beta g(x)),\quad x\in\Omega. \qquad (8)$$

(8)的证明可用对$|\alpha|$的归纳法标准地完成．

2.4.3 中值定理 设$f:[x,x+h]\subset\mathbf{R}\to E$可微(在点$x$，$x+h$处的可微性意义自明)，则当$s\in S$，$a\in E$时有：

$$\|f(x+h)-f(x)\|_s\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant1}\|f'(x+th)\|_s|h|; \qquad (9)$$

$$\|f(x+h)-f(x)-ah\|_s\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant1}\|f'(x+th)-a\|_s|h|. \qquad (10)$$

证 因$\forall s\in S$，$\|\Delta f(x_0,\delta)-f'(x_0)\delta\|_s=o(\delta)(x_0,x_0+\delta\in$

$[x,x+h]$)，故 2.1.6 的证法可用，只要以 $\|\cdot\|_s$ 代替那里的范数．□

本节的主要课题是讨论装备适当拓扑的函数空间 $C^r(\Omega,E)$．任给 $f\in C^r(\Omega,E)(0\leqslant r<\infty)$，紧集 $K\subset\Omega$，$s\in S$，令

$$\|f\|_{K,r,s}=\sup_{x\in K,|\alpha|\leqslant r}\|\partial^\alpha f(x)\|_s. \tag{11}$$

所有形如(11)的半范所成之族定义 $C^r(\Omega,E)$ 为一LCS，记作 $\mathscr{E}^r(\Omega,E)$；再令 r 遍取N，半范族 $\{\|f\|_{K,r,s}\}$ 定义 $C^\infty(\Omega,E)$ 为一LCS，记作 $\mathscr{E}^\infty(\Omega,E)$ 或 $\mathscr{E}(\Omega,E)$．直接看出，在 $\mathscr{E}^r(\Omega,E)$ $(0\leqslant r\leqslant\infty)$ 中 $f_k\to 0\Longleftrightarrow$ 当 $|\alpha|<r+1$，$s\in S$ 时，$\|\partial^\alpha f_k(x)\|_s$ 在 Ω 内紧（即局部）一致收敛于 0（参看1.3.2）．

取 Ω 中紧集的穷竭序列 $\{K_i\}$(1.4.11)．令 $\mathscr{D}^r(K_i,E)=\{f\in C^r(\Omega,E)|\text{supp}f\subset K_i\}$，则 $\mathscr{D}^r(K_i,E)(i=1,2,\cdots)$ 作为 $\mathscr{E}^r(\Omega,E)$ 的闭子空间是LCS，于是依1.9.2有归纳极限：

$$\mathscr{D}^r(\Omega,E)=\varinjlim\mathscr{D}^r(K_i,E),\quad 0\leqslant r\leqslant\infty.$$

记 $\mathscr{D}(\Omega,E)=\mathscr{D}^\infty(\Omega,E)$．不难从1.9.3推出：在 $\mathscr{D}^r(\Omega,E)$ 中 $\varphi_k\to 0\Longleftrightarrow$ 存在紧集 $K\subset\Omega$：$\{\varphi_k\}\subset\mathscr{D}^r(K,E)$，且在 $\mathscr{E}^r(\Omega,E)$ 中 $\varphi_k\to 0$；由此可见 $\mathscr{D}^r(\Omega,E)$ 中的拓扑与 $\{K_i\}$ 的选取无关．

约定 $\mathscr{E}^r(\Omega,m)=\mathscr{E}^r(\Omega,\mathbb{C}^m)$，$\mathscr{E}^r(\Omega)=\mathscr{E}^r(\Omega,\mathbb{C})$；记号 $\mathscr{D}^r(\Omega,m)$ 与 $\mathscr{D}^r(\Omega)$ 仿此．$\mathscr{E}^r(\Omega,m)(0\leqslant r<\infty)$ 的拓扑决定于半范族 $\{\|f\|_{K,r}|K\subset\Omega\text{紧}\}$：

$$\|f\|_{K,r}=\sup_{x\in K,|\alpha|\leqslant r}|\partial^\alpha f(x)|. \tag{12}$$

(12)定义的 $\|f\|_{K,r}$ 今后亦在 K 非紧的情况下使用．

2.4.4 定理 若 E 是 F-空间，则 $\mathscr{E}^r(\Omega,E)(0\leqslant r\leqslant\infty)$ 是 F-空间，从而 $\mathscr{D}^r(\Omega,E)$ 是 LF 空间；特别，$\mathscr{E}^r(\Omega,m)$ 是 F-空间而 $\mathscr{D}^r(\Omega,m)$ 是 LF 空间；$\mathscr{E}(\Omega,m)$ 与 $\mathscr{D}(\Omega,m)$ 是Montel空间．

证 首先证 $\mathscr{E}(\Omega,E)$ 为 F-空间（对 $\mathscr{E}^r(\Omega,E)$ 的证明是类

似的）．取E的可数基本半范族$\{\|\cdot\|_j\}$，Ω中紧集的穷竭序列$\{K_i\}$．任给 Cauchy 列$\{f_k\}\subset\mathscr{E}(\Omega,E)$，$E$的完备性推出

$\forall\alpha\in\mathbf{N}^n$，$\exists g^\alpha\in C(\Omega,E)$：$\|\partial^\alpha f_k(x)-g^\alpha(x)\|_j\overset{K_i}{\rightrightarrows}0(k\to\infty, i,j\in\mathbf{N})$．令$f=g^0$，今证$\partial^\alpha f=g^\alpha$．因可对$|\alpha|$用归纳法，只需考虑$|\alpha|=1$，且不妨设$n=1$．于是问题归于从条件$\|f_k(x)-f(x)\|_j\overset{K_i}{\rightrightarrows}0$，$\|f'_k(x)-g(x)\|_j\overset{K_i}{\rightrightarrows}0(k\to\infty,i,j\in\mathbf{N})$推出$f'=g$，这可用类似于2.2.7的证法并利用2.4.3来完成．

其次证$\mathscr{E}(\Omega,m)$为Montel空间（由此可从1.9.9推出$\mathscr{D}(\Omega,m)$为Montel空间）．设$\{f_k\}\subset\mathscr{E}(\Omega,m)$是一有界序列，则$\forall i,r\in\mathbf{N}$：$\sup\limits_k\|f_k\|_{K_i,r}<\infty$，$\{K_i\}$如前述．用中值定理（2.1.6）可说明$\{\partial^\alpha f_k\}$在$K_i$（$\alpha$，$i$固定）上等度连续．固定$\alpha$，相继在$K_1$，$K_2$，…上应用1.3.5，再用“对角线法”可得出$\{\partial^\alpha f_k\}$的紧一致收敛子列．将$\alpha$排成一序列，再用一次对角线法，即得出$\{f_k\}$在$\mathscr{E}(\Omega,m)$中的收敛子列．　□

下面的两个定理提供一些定义于$\mathscr{E}(\Omega,E)$与$\mathscr{D}(\Omega,E)$上的典型的连续线性映射．

2.4.5 定理　设$P(x,\partial)$如(5)，则$P(x,\partial)$：$\mathscr{E}(\Omega,E)\to\mathscr{E}(\Omega,E)$与$P(x,\partial)$：$\mathscr{D}(\Omega,E)\to\mathscr{D}(\Omega,E)$为连续线性映射．若假定$P(x,\partial)$的“系数”$a_\alpha\in C^\infty(\Omega,M_{pm})$，$M_{pm}=L(\mathbf{C}^m,\mathbf{C}^p)$，则$P(x,\partial)$：$\mathscr{E}(\Omega,m)\to\mathscr{E}(\Omega,p)$与$P(x,\partial)$：$\mathscr{D}(\Omega,m)\to\mathscr{D}(\Omega,p)$亦为连续线性映射．

证　任给紧集$K\subset\Omega$，$r\in\mathbf{N}$，$s\in S$，$\alpha\in\mathbf{N}^n$，$\varphi\in C^\infty(\Omega)$，$a\in C^\infty(\Omega,M_{pm})$，$f\in\mathscr{E}(\Omega,E)$，$g\in\mathscr{E}(\Omega,m)$，有（记号依(11)(12)）：

$$\|\partial^\alpha f\|_{K,r,s}\leqslant\|f\|_{K,r+|\alpha|,s};\quad\|\partial^\alpha g\|_{K,r}\leqslant\|g\|_{K,r+|\alpha|}\qquad(13)$$

$$\|\partial^\alpha(\varphi f)(x)\|_s\leqslant\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\|\partial^{\alpha-\beta}\varphi(x)\partial^\beta f(x)\|_s$$

$$\leqslant \text{const}\|f\|_{K,r,s},\quad x\in K,\quad |\alpha|\leqslant r,$$

$$\|\varphi f\|_{K,r,s}\leqslant \text{const}\|f\|_{K,r,s};\tag{14}$$

$$\|ag\|_{K,r}\leqslant \text{const}\|g\|_{K,r},\tag{15}$$

于是定理结论由(13)(14)(15)、§1.6(1)及1.9.3推出. □

2.4.6 定理 设$\varphi\in E'$,$h\in C^\infty(\Omega',\Omega)$, $\Omega'\subset\mathbf{R}^{n'}$是一开集. 则$\mathscr{E}(\Omega,E)\to\mathscr{E}(\Omega)$, $f\longmapsto\varphi\circ f$, $\mathscr{D}(\Omega,E)\to\mathscr{D}(\Omega)$, $f\longmapsto\varphi\circ f$及$\mathscr{E}(\Omega,E)\to\mathscr{E}(\Omega',E)$, $f\longmapsto f\circ h$皆为连续线性映射; 当h为微分同胚时$\mathscr{D}(\Omega,E)\to\mathscr{D}(\Omega',E)$, $f\longmapsto f\circ h$亦为连续线性映射.

证 任给$f\in\mathscr{E}(\Omega,E)$,显然$\varphi\circ f\in\mathscr{E}(\Omega)$, $f\circ h\in\mathscr{E}(\Omega',E)$. 设$|\varphi(e)|\leqslant C\|e\|_s$, C, s与$e\in E$无关(§1.6(2)). 任给紧集$K\subset\Omega$, $K'\subset\Omega'$, $r\in\mathbf{N}$, 当$|\alpha|\leqslant r$, $x\in K$, $x'\in K'$时,

$$|\partial^\alpha(\varphi\circ f)(x)|=|\varphi(\partial^\alpha f(x))|\leqslant C\|\partial^\alpha f(x)\|_s$$
$$\leqslant C\|f\|_{K,r,s};$$
$$\|\partial^\alpha(f\circ h)(x')\|_s\leqslant \text{const}\|f\|_{h(K'),r,s},$$

推出后一式时只需重复运用链规则. 于是看出$\mathscr{E}(\Omega,E)\to\mathscr{E}(\Omega)$, $f\longmapsto\varphi\circ f$与$\mathscr{E}(\Omega,E)\to\mathscr{E}(\Omega',E)$, $f\longmapsto f\circ h$为连续线性映射. 余下结论由1.9.3推出. □

本节的结果特别用于E是函数空间的情况. 应用上颇重要的特例如下: 设$\Omega=\Omega_1\times\Omega_2\subset\mathbf{R}^{n_1}\times\mathbf{R}^{n_2}=\mathbf{R}^n$是一开集, 则$\mathscr{E}(\Omega_2,\mathscr{E}(\Omega_1,m))$是一$F$-空间(2.4.4). 其次不难看出, $\mathscr{D}(\Omega_2,\mathscr{D}(\Omega_1,m))$可表为形如$\mathscr{D}(K_2,\mathscr{D}(K_1,m))$($K_i\subset\Omega_i$为紧集, $i=1,2$)的空间的归纳极限, 因而是LF空间. 下面证明,以上两个空间可代之以较方便的空间$\mathscr{E}(\Omega,m)$与$\mathscr{D}(\Omega,m)$.

2.4.7 定理 任给$\varphi\in C^\infty(\Omega,m)$, 令$\varphi^y(x)=\varphi(x,y)$($(x,y)\in\Omega_1\times\Omega_2$), $T_\varphi(y)=\varphi^y$. 则有拓扑同构$\mathscr{E}(\Omega,m)\cong\mathscr{E}(\Omega_2,\mathscr{E}(\Omega_1,m))$, $\varphi\longmapsto T_\varphi$与$\mathscr{D}(\Omega,m)\cong\mathscr{D}(\Omega_2,\mathscr{D}(\Omega_1,

$m))$, $\varphi \longmapsto T_\varphi$.

证 取定$\varphi \in \mathscr{E}(\Omega, m)$. 首先证$T_\varphi \in \mathscr{E}(\Omega_2, \mathscr{E}(\Omega_1, m))$. 任给$y \in \Omega_2$, 显然$\varphi^y \in \mathscr{E}(\Omega_1, m)$. 今归纳地指明

$$\partial_y^\beta T_\varphi = T_{\partial_y^\beta \varphi}, \ \beta \in \mathbf{N}^{n_2}. \qquad (16)$$

不妨只考虑$n_2 = 1$, $\beta = 1$, 此时(16)相当于在$\mathscr{E}(\Omega_1, m)$中

$$\lim_{h \to 0} h^{-1}[T_\varphi(y+h) - T_\varphi(y)] = T_{\partial\varphi/\partial y}(y). \qquad (17)$$

任给紧集$K \subset \Omega_1$, $\alpha \in \mathbf{N}^{n_1}$. 从$\partial_x^\alpha \partial_y \varphi$在$K \times y$上一致连续推出:

$$\overline{\lim_{h \to 0}} \sup_{x \in K} \left| \partial_x^\alpha \left[\frac{\varphi(x, y+h) - \varphi(x, y)}{h} - \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \right] \right|$$

$$\leqslant \overline{\lim_{h \to 0}} \sup_{x \in K, 0<t<1} |\partial_x^\alpha \partial_y [\varphi(x, y+th) - \varphi(x, y)]| = 0,$$

这推出(17). 因此$T_\varphi \in \mathscr{E}(\Omega_2, \mathscr{E}(\Omega_1, m))$. $\varphi \longmapsto T_\varphi$ 显然是线性单射, 其连续性之证明类似于证(17). 若 $T \in \mathscr{E}(\Omega_2, \mathscr{E}(\Omega_1, m))$, 令$\varphi(x, y) = T(y)(x)$, 则易见 $\varphi \in \mathscr{E}(\Omega, m)$ 且 $T = T_\varphi$. 于是1.6.1之推论 1 推出$\mathscr{E}(\Omega, m) \to \mathscr{E}(\Omega_2, \mathscr{E}(\Omega_1, m))$, $\varphi \longmapsto T_\varphi$为拓扑同构.

当$\varphi \in \mathscr{D}(\Omega, m)$时显然 $T_\varphi \in \mathscr{D}(\Omega_2, \mathscr{D}(\Omega_1, m))$. 1.9.3推出 $\mathscr{D}(\Omega, m) \to \mathscr{D}(\Omega_2, \mathscr{D}(\Omega_1, m))$, $\varphi \longmapsto T_\varphi$ 连续. 任给$T \in \mathscr{D}(\Omega_2, \mathscr{D}(\Omega_1, m))$, 令$K_2 = \operatorname{supp} T$, 则$T(K_2)$在 $\mathscr{D}(\Omega_1, m)$中有界, 从而有紧集 $K_1 \subset \Omega_1$: $T(K_2) \subset \mathscr{D}(K_1, m)$. 令$\varphi(x, y) = T(y)(x)$, 则$\varphi \in \mathscr{D}(K_1 \times K_2, m)$. 由1.9.4, $\mathscr{D}(\Omega, m) \to \mathscr{D}(\Omega_2, \mathscr{D}(\Omega_1, m))$, $\varphi \longmapsto T_\varphi$为拓扑同构. □

结合2.4.6与2.4.7得到(依2.4.7的记号):

推论 给定$f \in (\mathscr{E}(\Omega_1, m))'$, $g \in (\mathscr{D}(\Omega_1, m))'$, 对应$\mathscr{E}(\Omega, m) \to \mathscr{E}(\Omega_2)$, $\varphi \longmapsto f \circ T_\varphi$ 与$\mathscr{D}(\Omega, m) \to \mathscr{D}(\Omega_2)$, $\varphi \longmapsto g \circ T_\varphi$皆为连续线性映射.

参考文献: [22], [41], [78].

习 题

1. 设$f\in C^1(\Omega,E)$，$x\in\Omega$，$h\in R_n$，则

$$\lim_{h\to 0}\left[\Delta f(x,h)-\sum_i\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}h_i\right]\Big/|h|=0.$$

2. 设$f\in C^1(\Omega,E)$，$\varphi:(\alpha,\beta)\subset R\longrightarrow\Omega$可微，则

$$\frac{df(\varphi(t))}{dt}=\sum_i\partial_i f(\varphi(t))\,\varphi_i'(t).$$

§5 隐函数定理

隐函数定理无疑是微分学中最重要的定理，它与反函数定理可互相推出．本节采用先证明反函数定理然后推出隐函数定理的方法，前者的证明基于以下著名定理：

2.5.1 压缩映射原理(Banach，1922) 设X是一完备度量空间，$f:X\to X$是一"压缩映射"，即满足

$$d(f(x),f(y))\leqslant rd(x,y),\quad x,y\in X,\qquad(1)$$

$r\in(0,1)$为常数，则存在唯一$x\in X$：$f(x)=x$.

证 任取$x_0\in X$，令$x_n=f(x_{n-1})$，$n=1,2,\cdots$，则

$$d(x_n,x_m)\leqslant\sum_{i=n}^{m-1}d(x_i,x_{i+1})\leqslant\sum_{i=n}^{m-1}r^i d(x_0,x_1)<\frac{r^n d(x_0,x_1)}{1-r},$$

其中$0<n<m$．可见$\{x_n\}$是一Cauchy列．设$x_n\to x$，则$f(x)=x$．其次，$f(x)=x$，$f(y)=y\Rightarrow d(x,y)\leqslant rd(x,y)\Rightarrow x=y$. □

2.5.2 反函数定理 设X,Y是B-空间，$f:\Omega\subset X\to Y$是一$C^r(1\leqslant r\leqslant\infty)$映射，$x_0\in\Omega$．若$f'(x_0):X\cong Y$，则$f$在$x_0$处为局部$C^r$微分同胚，即存在$x_0$的邻域$U$与$f(x_0)$的邻域$V$，使得$f|U:U\to V$为$C^r$微分同胚．

注 当$\|h\|$充分小时，$f(x_0+h)$近似于"非齐次线性函数"$f(x_0)+f'(x_0)h$，而后者有反函数，定理无非是要将后者的这

一性质转移到相近的函数$f(x_0+h)$.

证 不妨设$X=Y$，$x_0=f(x_0)=0$，$f'(0)=1_X$（否则代以函数$\varphi(x)=(f'(x_0))^{-1}\cdot[f(x_0+x)-f(x_0)]$，若在$x=0$邻近可解出$C^r$的反函数$\varphi^{-1}(x)$，则$C^r$函数$y\longmapsto x_0+\varphi^{-1}((f'(x_0))^{-1}\cdot(y-f(x_0)))$是$f$在$x_0$邻近的反函数）. 定理实际上是一个解方程$f(x)=y$的问题，因此以下证明自然地分为"解的存在性"、"解的可微性"及"C^r可微性"等步骤.

1° 证反函数存在. 取$\delta>0$，使当$x\in\bar{B}(0,\delta)$时，$\|f'(x)-I\|<1/2(I=1_X)$且$f'(x): X\cong X$（这种δ存在之理由在3°中说明）. 取定$y\in V=B(0,\delta/2)$. 方程$f(x)=y$有唯一解$x\in\bar{B}(0,\delta)$相当于$g_y(x)=y+x-f(x)$在$\bar{B}(0,\delta)$上有唯一不动点. 任给x，$x'\in\bar{B}(0,\delta)$，由中值定理(2.1.6)有：

$$\|g_y(x)\|\leqslant\|y\|+\|(f-I)(x)\|<\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta;$$

$$\|g_y(x)-g_y(x')\|=\|f(x)-f(x')-I(x-x')\|\leqslant\frac{1}{2}\|x-x'\|. \tag{2}$$

于是将2.5.1用到$g_y: \bar{B}(0,\delta)\to\bar{B}(0,\delta)$得出反函数$f^{-1}: V\to U=B(0,\delta)\cap f^{-1}V$，它满足$f(f^{-1}(y))=y(y\in V)$. 从(2)不难看出$\|x-x'\|\leqslant2\|f(x)-f(x')\|(x,\ x'\in\bar{B}(0,\delta))$，因此

$$\|f^{-1}(y)-f^{-1}(y')\|\leqslant2\|y-y'\|,\quad y,y'\in V. \tag{3}$$

(3)特别推出$\|f^{-1}(y)\|\leqslant2\|y\|<\delta(y\in V)$，故$U\subset B(0,\delta)$，$U$为开集.

2° 证f^{-1}在V内可微. 取定$y\in V$，$x=f^{-1}(y)$，今指明$Df^{-1}(y)=(Df(x))^{-1}$. 设$y+k\in V$，$f^{-1}(y+k)=x+h$，则$k=\Delta f(x,h)$，$h=\Delta f^{-1}(y,k)$. (3)推出$\|h\|\leqslant2\|k\|$，于是

$$\|\Delta f^{-1}(y,k)-(Df(x))^{-1}k\|=\|h-(Df(x))^{-1}k\|$$
$$\leqslant\|(Df(x))^{-1}\|\|\Delta f(x,h)-Df(x)h\|=o(\|k\|).$$

3° 证 $f^{-1}\in C^r$. 现在要引用将由 4.5.1 确立的事实：B-代数$L(X)$中可逆元之全体G是一开集；G包含$L(X)$中的球$B(I,1)$；映射$G\to G$，$a\longmapsto a^{-1}$是C^∞的. 对映射$Df^{-1}: V\to G$作如下分解：

$$y\stackrel{f^{-1}}{\longmapsto}x\stackrel{Df}{\longmapsto}Df(x)\longmapsto(Df(x))^{-1},$$

据此可归纳地指明$Df^{-1}\in C^{k-1}(k<r+1)$，因此$f^{-1}\in C^r$. □

2.5.3 隐函数定理 设X,Y,Z是B-空间，$F: \Omega\subset X\times Y\to Z$是一$C^r(1\leqslant r\leqslant\infty)$映射，$F(x_0,y_0)=0$，$(x_0,y_0)\in\Omega$. 若$F'_y(x_0,y_0): Y\cong Z$，则存在$(x_0,y_0)$的开邻域$U\times V$及唯一$C^r$映射$f: U\to V$，使得$F(x,f(x))=0(x\in U)$，$f(x_0)=y_0$.

证 作辅助函数

$$g: \Omega\subset X\times Y\to X\times Z,\ (x,y)\longmapsto(x,F(x,y)). \tag{4}$$

显然$g\in C^r$. 由§3(11)，对任给$(h,k)\in X\times Y$有：

$$Dg(x_0,y_0)(h,k)=\begin{pmatrix}1x & 0\\ F_x^0 & F_y^0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix}, \tag{5}$$

其中$F_x^0=F'_x(x_0,y_0)$，F_y^0仿此. 不难验证算子矩阵

$$\begin{pmatrix}1x & 0\\ F_x^0 & F_y^0\end{pmatrix}\text{与}\begin{pmatrix}1x & 0\\ -(F_y^0)^{-1}F_x^0 & (F_y^0)^{-1}\end{pmatrix}$$

互逆，因此$Dg(x_0,y_0): X\times Y\cong X\times Z$. 由2.5.2，$g$的反函数$g^{-1}$在$(x_0,0)$的一邻域内定义且为$C^r$函数. 设$p: X\times Y\to Y$是投影，则$f(x)=pg^{-1}(x,0)$是$x_0$的某邻域$U$内的$C^r$函数. $f(x_0)=y_0$，从$(x,F(x,f(x)))=g(x,f(x))=(x,0)$推出$F(x,f(x))=0(x\in U)$. $f(x)$的唯一性由g的反函数的(局部)唯一性推出. □

由方程$F(x,y)=0$定义的隐函数$y=f(x)$的存在性与可微性一旦确定，其导数就如同在初等分析中一样可通过微分恒等

式$F(x,f(x))=0$来计算：依§3(12)及2.1.4有 $F'_x h+F'_y f'(x)h=0$，于是

$$f'(x)h=-(F'_y(x,f(x)))^{-1}F'_x(x,f(x))h,\ h\in X. \quad (6)$$

将2.5.3用到实变元的方程组

$$F_i(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=0,\ i=1,2,\cdots,m, \quad (7)$$

可得如下结论：若每个$F_i\in C^r(1\leqslant r\leqslant\infty)$，且

$$\begin{cases}F_i(x_1^0,\cdots,x_n^0,y_1^0,\cdots,y_m^0)=0,\ i=1,2,\cdots,m,\\ \det(\partial F_i(x_1^0,\cdots,y_m^0)/\partial y_j)\neq 0,\end{cases}$$

则从(7)可局部地解出m个C^r函数$y_i=y_i(x_1,\cdots,x_n)$，使得$y_i^0=y_i(x_1^0,\cdots,x_n^0)(1\leqslant i\leqslant m)$，且

$$(\partial y_i/\partial x_j)=-(\partial F_k/\partial y_l)^{-1}(\partial F_k/\partial x_j). \quad (8)$$

反函数定理从函数$f(x)$在一点x_0的"无穷小范围内"的性状($f'(x_0)$是同构)推断出$f(x)$在x_0邻近的一个局部性质(f在x_0处为局部微分同胚)，这正是微分学用于函数研究的典型方式．基于同一想法，我们自然提出这样的问题：从$f'(x_0):X\to Y$是满射或单射能否推出$f(x)$局部地是满射或单射？在一定条件下回答是肯定的．

2.5.4 定理 设X，Y是B-空间，$f:\Omega\subset X\to Y$是一C^1映射，$x_0\in\Omega$，$T=f'(x_0)$，$A=\mathrm{Ker}\,T$．(i) 若$TX=Y$，$X=A\oplus B$，B是X的闭子空间，则$f(x_0)$是$f(\Omega)$的内点．(ii) 若$T:X\cong TX$，TX是Y的闭子空间，则存在x_0的开邻域U，使得$f|U:U\to Y$是一拓扑嵌入．

证 (i) 可设$X=A\times B$（参看§1.6习题2），分别以$\partial_1 f$与$\partial_2 f$记$f(a,b)(a\in A,b\in B)$对变元a，b的偏导数．因

$$Tb=\partial_1 f(x_0)0+\partial_2 f(x_0)b=\partial_2 f(x_0)b,\ b\in B,$$

故$\partial_2 f(x_0):B\cong Y$．将2.5.3用于$C^1$函数$F(a,y,b)=f(a,b)-y$得出：当$\|y-f(x_0)\|$充分小时，存在$x=(a,b)\in\Omega$，使得$y=f(x)$．可见$f(x_0)$是$f(\Omega)$的内点．

(ii) 以T^{-1}记$T: X\to TX$之逆，则$\|T^{-1}\|>0$. 取$\delta>0$，使得当$x\in U=B(x_0,\delta)$时，$\|f'(x)-T\|<\frac{1}{2}\|T^{-1}\|^{-1}$. 任给$x$, $y\in U$,

$$\|f(x)-f(y)\|\geqslant\|T(x-y)\|-\|f(x)-f(y)-T(x-y)\|$$

$$\geqslant\|T^{-1}\|^{-1}\|x-y\|-\frac{1}{2}\|T^{-1}\|^{-1}\|x-y\|$$

$$=\frac{1}{2}\|T^{-1}\|^{-1}\|x-y\|,$$

由此看出$f|U: U\to fU$是一同胚. □

推论 若$f: \Omega\subset X\to Y$在每点$x\in\Omega$满足2.5.4之(i)的条件，则f是开映射. 特别，若$f: \Omega\subset \mathrm{R}^m\to\mathrm{R}^n$是一$C^1$映射，$\forall x\in\Omega$: $\mathrm{rank}f'(x)=n$（这样的f称为"浸满"，参看5.1.3），则f是开映射.

注 1950年Graves在较弱的条件下证明了上述结论，即只要每个$f'(x)(x\in\Omega)$为满射，f就是开映射（参看[2]）. 这是经典的开映射定理(1.6.1之推论1)的一个出色的推广.

参考文献：[2]，[19]，[22]，[35]，[52]，[53]，[64].

习 题

1. 设$U\subset X$, $V\subset Y$为开集，$f: U\to V$是一同胚，$x_0\in U$, $y_0=f(x_0)$. 若$f'(x_0)$存在且是一同构，则$Df^{-1}(y_0)=(Df(x_0))^{-1}$；若$f\in C^r(r\geqslant1)$, $\forall x\in U$, $f'(x): X\cong Y$，则f为C^r微分同胚.

2. 设$F: U\times V\subset X\times Y\to Z$为$C^r(r\geqslant1)$映射，$(x_0,y_0)\in U\times V$, $F'_y(x_0,y_0): Y\cong Z$. 则有开集$W\subset U$, $G\subset Z$及唯一C^r映射$f: W\times G\to V$，使得$x_0\in W$, $F(x_0,y_0)=z_0\in G$, $f(x_0,z_0)=y_0$，当$(x,z)\in W\times G$时$F(x,f(x,z))=z$.

§6 微 分 方 程

本节证明关于常微分方程的两个基本定理，以作为前几节

内容的应用实例.

设X, M是B-空间，考虑"带参数"的一阶方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,\mu), \tag{1}$$

其中$f: \Omega\subset \mathrm{R}\times X\times M\to X$是满足一定条件的函数.

2.6.1 **基本存在定理** 设$f\in C^r(\Omega, X)(1\leqslant r\leqslant\infty)$，则对任给$(t_0, x_0, \mu_0)\in\Omega$，存在含$t_0$的开区间$I$，$(x_0,\mu_0)$的邻域$U\times V\subset X\times M$及$I\times I\times U\times V$内的$X$-值$C^r$函数$\theta(t,s,x,\mu)$，使得对任给$(s,x,\mu)\in I\times U\times V$，$x(t)=\theta(t,s,x,\mu)$满足(1)及初值条件$x(s)=x$，且若某个$\varphi(t,\mu)((t,\mu)\in I\times V)$看作$t$的函数满足(1)，$\varphi(s,\mu)=x$，则必$\varphi(t,\mu)=\theta(t,s,x,\mu)(t\in I)$.

证 首先简化方程(1). 令$Y=\mathrm{R}\times X\times M$，定义

$$g(y)=(1,f(y),0)\in Y,\quad y=(t,x,\mu)\in\Omega,$$

则$g\in C^r$. 取定$y_0=(t_0,x_0,\mu_0)\in\Omega$，设存在$I_\delta\times W$内的$Y$-值$C^r$函数$\sigma(t,y)$，其中$I_\delta=(-\delta,\delta)$，$\delta>0$，$W=I\times U\times V$，$I=t_0+I_{\delta/2}$，$U\times V$是$(x_0,\mu_0)$的邻域，$\partial\sigma/\partial t=g(\sigma)$，$\sigma(0,y)=y$. 设$\pi:(t,x,\mu)\longmapsto x$，$\theta(t,s,x,\mu)=\pi\sigma(t-s,s,x,\mu)$，则$\theta$满足定理要求. 因此可将要证命题改述为：若$f:\Omega\subset X\to X$是$C^r(r\geqslant 1)$函数，$x_0\in\Omega$，则存在$\delta>0$，$x_0$的邻域$U$及$C^r$函数$\theta: I_\delta\times U\to X$，使得$\forall \bar{x}\in U$：函数$x(t)=\theta(t,\bar{x})$ $(t\in I_\delta)$满足方程

$$\frac{dx}{dt}=f(x) \tag{2}$$

及初值条件$x(0)=\bar{x}$；且(2)的任何满足$g(0)=\bar{x}$的解$g(t)(t\in I_\delta)$在I_δ上必重合于$\theta(t,\bar{x})$.

证明(2)的解存在的经典方法基于压缩映射原理. 下面的较新颖的证法属于Robbin([62], 1968)，它是隐函数定理的巧

妙运用．令$J=[-1,1]$，在$C(J,X)$与$C^1(J,X)$中分别采用范数$\|\psi\|_*$与$\|\varphi\|_1=\max\{\|\varphi\|_*,\|\varphi'\|_*\}$，令$C_0^1(J,X)=\{\varphi\in C^1(J,X)|\varphi(0)=0\}$．取定球$B(x_0,2\rho)\subset\Omega$，令$B=B(x_0,\rho)$，$B_0=B(0,\rho)$，定义

$$\begin{cases} F:\mathrm{R}\times B\times C_0^1(J,B_0)\longrightarrow C(J,X), \\ \quad (s,x,\varphi)\longmapsto\varphi'-sf\circ(x+\varphi), \end{cases} \tag{3}$$

则2.3.5推出$F\in C^1$．因$F(0,x_0,0)=0$，$F'_\varphi(0,x_0,0)=\frac{d}{dt}$：$C_0^1(J,X)\cong C(J,X)$，故可用隐函数定理：存在$\delta>0$，$x_0$的邻域$U$及$C^1$函数$U\to C_0^1(J,B)$，$x\longmapsto\varphi_x$，使得

$$\frac{d}{dt}\varphi_x-\delta f\circ(x+\varphi_x)=0, x\in U. \tag{4}$$

令$\theta(t,x)=x+\varphi_x(t/\delta)$，$t\in I_\delta=(-\delta,\delta)$，$x\in U$，则$\theta\in C^1$（参看2.3.4之推论），$\theta(0,x)=x$，(4)推出$\partial\theta/\partial t=f(\theta)$．若$g:I_\delta\to X$满足(2)，$g(0)=\bar{x}$，令$\psi(t)=g(\delta t)-\bar{x}$，则$\psi$满足隐函数方程$\Phi(\delta,\psi)=\psi'-\delta f\circ(\bar{x}+\psi)=0$，类似于上面的讨论得出$\psi=\varphi_{\bar{x}}$，从而$g(t)=\theta(t,\bar{x})$．这样，对于$r=1$定理已获证．

设$1<r<\infty$，作归纳假设：$\theta\in C^{r-1}$．因

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)=f'(\theta)\circ\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

（参考§3习题1），故$\partial\theta/\partial x$满足含“参数”$x$的方程

$$\frac{dz}{dt}=f'(\theta(t,x))\circ z \tag{5}$$

及初值条件$z(0)=1_X$．由归纳假设，(5)的解$\partial\theta/\partial x$是$(t,x)$的$C^{r-1}$函数．其次，$\partial\theta/\partial t=f(\theta)$亦是$(t,x)$的$C^{r-1}$函数，于是由2.3.2得出$\theta\in C^r$． □

上面所得的$\theta(t,x)$可看作(2)的某种通解．

2.6.2 定理 设(2)中的 f 满足 $\|f'\|_\infty=\beta<\infty$，$\theta(t,x)$ 的意义如2.6.1，Ω 是凸集，则 $\|\theta(t,x)-\theta(t,y)\|\leqslant e^{\beta|t|}|x-y|$.

证 证明基于如下的 Gronwall 不等式：若非负连续函数 g，h 满足 $g(t)\leqslant A+\int_0^t g(s)h(s)ds=\varphi(t)$（$A>0$，$t\geqslant 0$），则

$$g(t)\leqslant A\exp\left(\int_0^t h(s)ds\right),\quad t\geqslant 0. \tag{6}$$

(6)由 $\varphi(t)=A\exp\left(\int_0^t \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}ds\right)\leqslant A\exp\left(\int_0^t h(s)ds\right)$

推出. 令 $g(t)=\|\theta(t,x)-\theta(t,y)\|$，则易知 $g(t)\leqslant\|x-y\|+\int_0^t \beta g(s)ds$，于是所要结果从(6)推出. □

下面考虑线性微分方程

$$\frac{dx}{dt}=a(t)x+b(t) \tag{7}$$

及

$$\frac{dx}{dt}=a(t)x, \tag{8}$$

其中 $a\in C(I,L(X))$，$b\in C(I,X)$，$I\subset\mathrm{R}$ 是一开区间，X 是 B-空间. 对线性方程可得到较强的结果.

2.6.3 定理 取定 $t_0\in I$.

1° (7)有如下的通解 $\theta(t,x)$：$\theta\in C^1(I\times X,X)$，$\forall x\in X$，$\theta_x(t)=\theta(t,x)$ 是(7)在 I 上满足 $\theta_x(t_0)=x$ 的唯一解.

2° 设 $\theta(t,x)$ 是(8)的通解(意义依1°). 则 θ 决定一族拓扑同构 $\theta_t:X\cong X$，$x\longmapsto\theta(t,x)$ $(t\in I)$；(8)的解之全体是一个同构于 X 的向量空间（谓之解空间）；

$$\sigma(t,x)=\theta(t,x)+\theta\left(t,\int_{t_0}^t \theta_\tau^{-1}b(\tau)d\tau\right) \tag{9}$$

是(7)的通解.

证 1° 不妨设 $t_0=0$. 任给 $(t,x)\in I\times X$，令 $\theta_0(t,x)=x$，

$$\theta_{n+1}(t,x)=x+\int_0^t [a(\tau)\theta_n(\tau,x)+b(\tau)]d\tau, \quad n\geqslant 0. \tag{10}$$

取一列有限区间 $\{I_k\}$：$0\in I_k\subseteq I$，$\bigcup I_k=I$．令 $M_k=\sup\limits_{I_k}[\|a(t)\|+\|b(t)\|]$，$L_x=\|x\|+1$，则用(10)可归纳地证明：任给 $(t,x)\in I_k\times X$，

$$\|\theta_n(t,x)-\theta_{n-1}(t,x)\|\leqslant\frac{L_x M_k^n |t|^n}{n!}, \quad n,k=1,2,\cdots. \tag{11}$$

(11)推出 $\{\theta_n(t,x)\}$ 在 $I\times X$ 上局部一致收敛于某个连续函数 $\theta(t,x)$．在(10)两边令 $n\to\infty$ 得

$$\theta(t,x)=x+\int_0^t [a(\tau)\theta(\tau,x)+b(\tau)]d\tau,$$

由此推出 $\theta(0,x)=x$，$\frac{\partial}{\partial t}\theta(t,x)=a(t)\theta(t,x)+b(t)$，$t\in I$，$x\in X$．利用(10)又可归纳地指明 $\partial\theta_n/\partial x$ 存在、连续且满足：

$$\frac{\partial\theta_{n+1}(t,x)}{\partial x}=1_X+\int_0^t a(\tau)\circ\frac{\partial\theta_n(\tau,x)}{\partial x}d\tau;$$

$$\left\|\frac{\partial\theta_n(t,x)}{\partial x}-\frac{\partial\theta_{n-1}(t,x)}{\partial x}\right\|\leqslant\frac{M_k^n |t|^n}{n!}, \quad t\in I_k.$$

于是2.2.7推出$\partial\theta/\partial x$存在且连续，可见$\theta\in C^1$．

若$g(t)$($t\in I$)满足(7)且$g(0)=x$，令 $\varphi(t)=\|g(t)-\theta(t,x)\|$，则当$0\leqslant t\in I_k$时

$$\varphi(t)\leqslant\varepsilon+M_k\int_0^t\varphi(\tau)d\tau, \quad k=1,2,\cdots. \tag{12}$$

其中 ε 是任意正数．于是Gronwall 不等式推出

$$\varphi(t)\leqslant\varepsilon\exp M_k t, \quad 0\leqslant t\in I_k \quad k=1,2,\cdots.$$

令 $\varepsilon\to 0$ 得 $\varphi(t)=0\,(0\leqslant t\in I)$. 当 $0>t\in I$ 时, 类似地可证 $\varphi(t)=0$, 因此, $g(t)=\theta(t,x)\,(t\in I)$, 唯一性结论得证.

2° 任给 $\alpha,\beta\in K$, $x,y\in X$, 直接验证 t 的函数 $\alpha\theta(t,x)+\beta\theta(t,y)$满足(8), 故由唯一性得

$$\alpha\theta(t,x)+\beta\theta(t,y)=\theta(t,\alpha x+\beta y),$$

即
$$\alpha\theta_t(x)+\beta\theta_t(y)=\theta_t(\alpha x+\beta y); \tag{13}$$

$$(\alpha\theta_x+\beta\theta_y)(t)=\theta_{\alpha x+\beta y}(t) \tag{14}$$

(注意$\theta_t(x)=\theta(t,x)=\theta_x(t)$). (13)表明$\theta_t\in L(X)$. 因$x(t)=0$ 满足(8), 故θ_t是单射. 固定 $t\in I$, $y\in X$, 设 $\varphi(\tau)$ 满足(8)且$\varphi(t)=y$, 令$x=\varphi(t_0)$, 则必$y=\theta_t(x)$, 可见$\theta_t: X\cong X$. (14)表明 $x\longmapsto\theta_x(x\in X)$是一线性同构.

今预定(7)的通解可写成$\sigma(t,x)=\theta(t,C(t,x))$, C是待定函数 (参照经典的参数变易法), $C(t_0,x)=x$. 由 $\sigma(t,x)=\theta_t C(t,x)$得$\partial\sigma/\partial t=\partial\theta/\partial t+\theta_t(\partial C/\partial t)$, 代入(7)得

$$\frac{\partial C}{\partial t}=\theta_t^{-1}b(t),\quad t\in I,$$

故
$$C(t,x)=x+\int_{t_0}^{t}\theta_\tau^{-1}b(\tau)d\tau,$$

由此得到(9). 直接验证表明(9)确为(7)之通解. □

推论 若$a\in C(I,M_n(\mathrm{C}))$, $M_n(\mathrm{C})=L(\mathrm{C}^n)$, $b\in C(I,\mathrm{C}^n)$, 则(8)有 n 个线性无关的解, 以它们作列向量构成一 n 阶矩阵函数$X(t)$, 使得 $X(t_0)=$单位矩阵; $\theta(t,x)=X(t)x$ (x 当作列向量) 是(8)的通解, 此时(9)可写成

$$\sigma(t,x)=X(t)\left[x+\int_{t_0}^{t}(X(\tau))^{-1}b(\tau)d\tau\right], \tag{15}$$

$$(t,x)\in I\times\mathrm{C}^n.$$

当$a(t)=a\in M_n(\mathrm{C})$时, $X(t)=\exp ta=\sum_0^\infty(ta)^k/k!$.

参考文献：[2]，[6]，[22]，[37]，[39].

习　题

1. 设$f_0\in C([a,b], X)$，$f_{n+1}(t)=\int_a^t f_n(\tau)d\tau$，$n\geqslant 0$，$t\in[a,b]$. 则在$[a,b]$上$f_n\rightrightarrows 0$.

2. 设$f\in C^1(X,X)$，$x'(t)=f(x(t))$. 若在$x(t)$的定义域内的任何有限区间上$\|f(x(t))\|$有界，则$x(t)$可延拓为方程$\frac{dx}{dt}=f(x)$在R上的解.

§7　极值·变分学问题

经典微分学中有关极值的内容几乎可以整个地推广于泛函的极值. 设$f:\Omega\subset X\to \mathrm{R}$, $x_0\in\Omega$. 若当$\|h\|$充分小时$\Delta f(x_0,h)$保持非负[非正]，则称x_0为f的（局部）极小[极大]点，而称$f(x_0)$为极小[极大]值. 显然可限于考虑极小值.

2.7.1 **定理**　设X是一实赋范空间，$f:\Omega\subset X\to\mathrm{R}$. (i) 若$x_0\in\Omega$是$f$的极值点，$f'(x_0)$存在，则$f'(x_0)=0$；(ii) 若$f\in C^2(\Omega)$，$x_0\in\Omega$，$f'(x_0)=0$（此时称$x_0$为$f$的临界点），$f''(x_0)$正定，即$\exists\beta>0$，$\forall h\in X$：$f''(x_0)h^2\geqslant\beta\|h\|^2$，则$x_0$是$f$的极小点.

证　当x_0是f的极值点时$t=0$是$\varphi(t)=f(x_0+th)$的极值点，这就直接得出(i). 对于(ii)，当$\|h\|$充分小时$\|\Delta f''(x_0,h)\|<\beta/2$，于是依Taylor公式有：

$$\Delta f(x_0,h)=\frac{1}{2}f''(x_0+\theta h)h^2\quad(0<\theta<1)$$

$$\geqslant\frac{1}{2}f''(x_0)h^2-\frac{1}{2}\|\Delta f''(x_0,\theta h)\|\|h\|^2$$

$$\geqslant\frac{\beta}{4}\|h\|^2\geqslant 0,$$

可见x_0是f的极小(而且是“严格极小”！)点. □

设X,Y,Z是实B-空间，$f:\Omega\subset X\times Y\to\mathrm{R}$，$F:\Omega\subset X\times Y\to Z$. 称$f(x,y)$在“曲面$F(x,y)=0$”上的极值点为**条件极值点**. 若$f,F\in C^1$，$(x_0,y_0)\in\Omega$是一个如上的条件极值点，$F$在$(x_0,y_0)$满足2.5.3之条件，从而可局部地解出$y=y(x)$，$y(x_0)=y_0$，则$x_0$是$\varphi(x)=f(x,y(x))$的极值点(或叫**直接极值点**). 令$l=-f'_y(x_0,y_0)(F'_y(x_0,y_0))^{-1}(\in Z')$，$L=f+l\circ F$（所谓Lagrange函数），则依2.7.1及§5(6)有$L'_x(x_0,y_0)=\varphi'(x_0)=0$；直接验知$L'_y(x_0,y_0)=0$，可见$(x_0,y_0)$是$L$的临界点. 反之，若$(x_0,y_0)$是$L$的临界点，$f,F\in C^2$，则从$\varphi(x)=L(x,y(x))$推出$\varphi''(x_0)h^2=L''(u_0)k^2$，$u_0=(x_0,y_0)$，$k=(h,y'(x_0)h)$，$h\in X$. 可见当$L''(u_0)$正定时$\varphi''(x_0)$亦是正定的. 因此若能用2.7.1解$L$的直接极值问题，则亦可解$f$的条件极值问题. 具体解法如下：

取待定的$l\in Z'$，写出方程组

$$\begin{cases}D[f(x,y)+l\circ F(x,y)]=0;\\ F(x,y)=0,\end{cases}\tag{1}$$

从(1)解出x，y，l，然后检查(x,y)是否为条件极值点. 若l决定于一组参数λ_i(当$X=\mathrm{R}^n$，$Y=Z=\mathrm{R}^m$时便是如此，此时λ_i是所谓Lagrange乘数)，则(1)是关于未知量x，y，λ_i的方程组.

若“曲面”$F(x,y)=0$是$X\times Y$中的“平面”$X\times b(b\in Y)$，则(1)的第一个方程归结为$f'_x(x,y)=0$，因此可将f看作x的函数而考虑其直接极值.

作为前述结果的应用实例，下面考虑一类古典变分学问题. 给定有界区域$\Omega\subset\mathrm{R}^n$，取开集$\Omega'\subset\mathrm{R}^n$；$\bar{\Omega}\subset\Omega'$，令$Y=\{\varphi|\bar{\Omega}\,|\varphi\in C^1(\Omega',\mathrm{R}^m)\}$，$Y$看作$\mathscr{B}^1(\Omega',m)$的子空间. 给定$\partial\Omega$上的函数$g$，$C^2$函数

$$F(x,y,p): W\subset \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^{nm}\to\mathbf{R};$$

令 $$U=\{y\in Y\mid \forall x\in\bar{\Omega}: (x,y(x),y'(x))\in W;\ y|\partial\Omega=g\}.$$

于是 F 产生一个 U 内的泛函

$$f(y)=\int_\Omega F(x,y(x),y'(x))dx, \tag{2}$$

今导出 f 取极值的条件．不妨设 $g=0$（否则将 U 作一平移），因此可将 f 当作 $Y_0=\{y\in Y|\ y|\partial\Omega=0\}$ 上的泛函而讨论条件 $f'(y)=0$．设 y，$y+h\in U$，则

$$\left|\Delta f(y,h)-\int_\Omega(F'_yh+F'_ph')dx\right|$$

$$\leqslant\int_\Omega|F(x,y+h,y'+h')-F(x,y,y')-F'_y(x,y,y')h$$

$$-F'_p(x,y,y')h'|dx$$

$$\leqslant\int_\Omega\|F'_y(x,y+\theta h,y'+\theta h')-F'_y(x,y,y')\|dx\cdot\|h\|_u$$

$$+\int_\Omega\|F'_p(x,y+\theta h,y'+\theta h')-F'_p(x,y,y')\|dx\cdot\|h'\|_u,$$

其中 $0<\theta=\theta(x)<1$，$F'_y=F'_y(x,y(x),y'(x))$，F'_p 仿此．这就得到

$$f'(y)h=\int_\Omega(F'_yh+F'_ph')dx,\quad y\in U,h\in Y_0. \tag{3}$$

以 $y=(y_1,\cdots,y_m)$，$h=(h_1,\cdots,h_m)$，$p=(p_{ij})$ 代入(3)，利用条件 $h|\partial\Omega=0$ 作分部积分得

$$f'(y)h=\int_\Omega\sum_i\left[\frac{\partial F}{\partial y_i}-\sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial F}{\partial p_{ij}}\right)\right]h_idx.$$

这就得到 f 的临界点 y 应满足的微分方程组：

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}=\sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial F}{\partial p_{ij}}\right),\quad i=1,2,\cdots,m, \tag{4}$$

这就是古典变分学中著名的Euler方程．当 $m=n=1$，$p=dy/dx$

时，(4)变得特别简单：

$$F'_y=\frac{d}{dx}F'_p. \tag{5}$$

若F不显含x，则(5)推出$d(F-pF'_p)=\left(F'_y-\frac{d}{dx}F'_p\right)dy=0$，因此$F-pF'_p=\text{const}$.

利用(5)可解决一些著名的古典问题.

2.7.2 例(最速降线问题) 求铅直平面上过两定点A，B的曲线$y=y(x)$，使一物体沿此曲线无摩擦地从A滑至B所用时间T最短.

解 设A在原点，B在点(a,b)，y轴朝下，m是物体质量，g是重力加速度，$v=ds/dt$是速度. 由能量守恒律可写出$mgy=\frac{1}{2}mv^2$，于是

$$T=\int_0^T dt=\int\frac{ds}{v}=\int_0^a\sqrt{\frac{1+p^2}{2gy}}dx,$$

其中$p=y'$. 因$F=\sqrt{(1+p^2)/2gy}$不显含x，故(5)推出$\frac{1}{2}y(1+p^2)=C=\text{const}$. 用代换$p=\text{ctg}\frac{t}{2}$解出$x=C(t-\sin t)$，$y=C(1-\cos t)$，这是旋轮线，它就是所求的最速降线.

方程组(4)刻划了一些几何上与物理上很重要的对象(如测地线，极小曲面等). 不过，2.7.1作为极值存在的条件一般说来是过强的. 现代极值理论提出了一些新的条件，同时也发展了一些新的方法. 下面仅介绍一个较简单的结果.

设$f\in C^1(\Omega)$，$\Omega\subset X$. 若对任给序列$\{x_n\}\subset\Omega$，当$\{f(x_n)\}$有界，$f'(x_n)\to 0$时$\{x_n\}$含收敛子列，则说f满足Palais-Smale条件或(PS)条件.

2.7.3 定理 设X为实Hilbert空间，$f\in C^2(X,\mathrm{R})$满足(PS)条件，$c=\inf f(X)>-\infty$，则$c\in f(X)$.

证 假定$c\overline{\in}f(X)$. 则$\exists\varepsilon>0$：当$f(x)\leqslant c+\varepsilon$时$f'(x)\neq 0$. 否则存在$x_n\in X$：$f(x_n)\leqslant c+\frac{1}{n}$，$f'(x_n)=0(n=1,2,\cdots)$. 由(PS)条件，不妨设$x_n\to x\in X$，而这推出$f(x)=c$！因此可设有前述性质的$\varepsilon$已经取定.

取定x_0：$f(x_0)\leqslant c+\varepsilon$. 设$x(t)$是方程

$$\frac{dx}{dt}=-f'(x),\quad x(0)=x_0 \tag{6}$$

的解；设δ是$x(t)$的最大定义区间的右端点，则必$\delta=\infty$. 事实上，当$0<t<s<\delta$时，

$$\|x(s)-x(t)\|\leqslant\int_t^s\|x'(\tau)\|d\tau=\int_t^s\|f'(x(\tau))\|d\tau$$
$$\leqslant\left[\int_t^s\|f'(x(\tau))\|^2d\tau\right]^{1/2}(s-t)^{1/2}.$$

因$\frac{d}{dt}f(x(t))=-\|f'(x(t))\|^2\leqslant 0$，故$f(x(t))$在$[0,\delta)$内下降，从而有界，这就推出存在常数$M>0$：

$$\int_t^s\|f'(x(\tau))\|^2d\tau=f(x(t))\Big|_s^t\leqslant M^2,$$

于是
$$\|x(s)-x(t)\|\leqslant M(s-t)^{1/2}. \tag{7}$$

若$\delta<\infty$，取$t_n\to\delta-0$，则(7)推出$\{x(t_n)\}$是Cauchy列. 设$x(t_n)\to\bar{x}$，在$\bar{x}$的某邻域内应用2.6.1，将可使(6)的解$x(t)$延拓到某个$[0,\delta')(\delta'>\delta)$上，得出矛盾.

于是$\varphi(t)=f(x(t))$在$[0,\infty)$上定义且下降. 由$\varphi(t)$的有界性显然推出$\varliminf\limits_{t\to\infty}\|f'(x(t))\|=0$，于是有$t_n\to\infty$，$x_n=x(t_n)$，使得$f'(x_n)\to 0$，而$\{f(x_n)\}$有界. 由(PS)条件，$\{x_n\}$有极限点$\bar{x}$，显然$f(\bar{x})\leqslant c+\varepsilon$，$f'(\bar{x})=0$，这与对$\varepsilon$的假定矛盾. □

参考文献：[20]，[53]。

习　题

1. 设$f:\Omega\subset X\to\mathrm{R}$两次可微。若$x_0$是$f$的极小点，则$f''(x_0)h^2\geqslant 0(h\in X)$；若$f''(x_0)h^2\geqslant 0$，$X\to X'$，$h\longmapsto f''(x_0)h$是拓扑同构，则$f''(x_0)$是正定的。

2. 求使$f(u)=\iint\limits_{\Omega}(u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy$取最小的函数$u$应满足的微分方程，$\Omega\subset\mathrm{R}^2$是有界区域，$u|\partial\Omega$是固定函数。

3. 设X是自反实B-空间，$f:X\to\mathrm{R}$，若(i) 在X中$x_n\xrightarrow{w}x$推出$\varliminf\limits_{n}f(x_n)\geqslant f(x)$；(ii) $A\subset X$有界且弱闭，则f在集A上达到最小值。

第三章 积 分 学

本章依条件递次加强的顺序，讨论一般可测空间、局部紧空间及Euclid空间中的测度与向量值可测函数的积分．

本章中字母E总记一取定的复B-空间．不过，大部分结论也适用于E是实B-空间的情况．任给E-值函数f，约定以$|f|$记函数$x\longmapsto\|f(x)\|$．

§1 复可测函数的积分

首先概述测度与可测函数的基本概念．

3.1.1 **定义** 给定非空集Ω．若非空的$\mathscr{A}\subset\mathscr{P}(\Omega)$对可数并与补运算封闭，则称$\mathscr{A}$为$\Omega$上的$\sigma$-代数，称$(\Omega,\mathscr{A})$为可测空间，称任何$A\in\mathscr{A}$为可测集；当$\{A_i\}\subset\mathscr{A}$，$A_i(i=1,2,\cdots)$互不相交时，称$\{A_i\}$为$A=\bigcup A_i$的一个分解（这一术语主要在本章使用）．若$(\Omega,\mathscr{A})$是一可测空间，一函数$\mu:\mathscr{A}\longrightarrow[0,\infty]$满足：$\mu\varnothing=0$，且当$\{A_i\}$是$A\in\mathscr{A}$的一个分解时$\mu A=\sum\mu A_i$，则称$\mu$为测度，称$(\Omega,\mu)$或$(\Omega,\mathscr{A},\mu)$为测度空间．若$A=\bigcup A_n$，$\mu A_n<\infty(\forall n\in\mathrm{N})$，则说$A$（关于$\mu$）是$\sigma$-有限的；当$\Omega$关于$\mu$ σ-有限时说μ是σ-有限的．若$\mu A=0$，则称A为零测集；当零测集之子集恒可测时称μ为完备测度．若对有限集$A\subset\Omega$，$\mu A=$“A的元素个数”；对无限集$A\subset\Omega$，$\mu A=\infty$，则称μ为Ω上的计数测度．

关于测度空间$(\Omega,\mathscr{A},\mu)$的以下性质是显然的：

1° 若A，$B\in\mathscr{A}$，$A\subset B$，则$\mu A\leqslant\mu B$（单调性）．

2° 若$A_i\in\mathscr{A}(i=1,2,\cdots)$，则$\mu(\bigcup A_i)\leqslant\sum\mu A_i$（次可加性）．

3° 设$\{A_n\}\subset\mathscr{A}$．若$A_1\subset A_2\subset\cdots$，则$\mu(\bigcup A_n)=\lim\limits_n\mu A_n$（下连续性）；若$A_1\supset A_2\supset\cdots$，$\mu A_1<\infty$，则$\mu(\bigcap A_n)=\lim\limits_n\mu A_n$（上连续性）．

任给$\mathscr{S}\subset\mathscr{P}(\Omega)$，$\Omega$上所有含$\mathscr{S}$的$\sigma$-代数之交是含$\mathscr{S}$的最小$\sigma$-代数，称为由$\mathscr{S}$生成的$\sigma$-代数．若$\Omega$是拓扑空间，则$\Omega$中的开集族（或闭集族）生成一$\sigma$-代数$\mathscr{B}$，称每个$B\in\mathscr{B}$为$\Omega$中的Borel集；称$\mathscr{B}$上使紧集测度有限的测度为Borel测度．

3.1.2 定义 设$(\Omega,\mathscr{A})$与$(Y,\mathscr{B})$是两个可测空间．若f：$\Omega\to Y$满足$f^{-1}B\in\mathscr{A}(\forall B\in\mathscr{B})$，则称$f$为可测映射．设$\overline{\mathrm{R}}=[-\infty,+\infty]$以形如$[-\infty,a)$，$(a,b)$，$(b,+\infty]$的集作基开集导入拓扑，$f:\Omega\to\overline{\mathrm{R}}$ [$f:\Omega\to\mathrm{C}$]．若任给Borel集$B\subset\overline{\mathrm{R}}$ [$B\subset\mathrm{C}$]；$f^{-1}B\in\mathscr{A}$，则称f为$(\Omega,\mathscr{A})$上的实[复]可测函数；实与复可测函数概称可测函数．Ω上仅取有限个复数值$\{c_i\}$的可测函数f称为简单函数，记作$f=\sum c_i\chi_{e_i}$，$e_i=\Omega(f=c_i)$．下面使用$\sum c_i\chi_{e_i}$这类记号时，约定e_i互不相交，但不要求c_i互异．

若$\mathscr{B}$由$\mathscr{S}$生成，$\forall S\in\mathscr{S}$：$f^{-1}S\in\mathscr{A}$，则显然$f:(\Omega,\mathscr{A})\to(Y,\mathscr{B})$可测（与1.1.11对照）．不难由此推出：$f:\Omega\to\overline{\mathrm{R}}$可测$\Longleftrightarrow\forall a\in\mathrm{R}$：$\Omega(f<a)$可测；$f:\Omega\to\mathrm{C}$可测$\Longleftrightarrow\mathrm{Re}f$与$\mathrm{Im}f$皆可测．进而易指明：对可测函数作代数运算、取绝对值，对实可测函数列取上[下]确界或上[下]极限，仍然得到可测函数；若$f:\Omega\to\overline{\mathrm{R}}$可测，$f^+(x)=\max\{f(x),0\}$，$f^-=(-f)^+$，则$f^+$与$f^-$可测，$f=f^+-f^-$．

3.1.3 定理 任给$(\Omega,\mathscr{A})$上的可测函数f，存在处处收敛

于 f 的简单函数列 $\{f_n\}$，且 $|f_n|\leqslant|f|$．

证 利用分解 $f=u+iv$，$u=u^+-u^-$，不妨假定 $f\geqslant 0$．$f_n(n=1,2,\cdots)$ 定义如下：

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{k-1}{2^n}, & \dfrac{k-1}{2^n}\leqslant f(x)<\dfrac{k}{2^n},\ k=1,2,\cdots,n2^n;\\ n, & f(x)\geqslant n.\end{cases}$$

(1)

注意 f_n 满足 $0\leqslant f_1\leqslant f_2\leqslant\cdots\to f$，下面将简写作 $0\leqslant f_n\nearrow f$． □

以下给定测度空间 $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$．若 P 是一命题，$\Omega(P)=\{x\in\Omega\mid x \text{ 满足 } P\}\in\mathscr{A}$，则可用 $\mu\Omega(P)$ 来量度"P 在 Ω 上成立的程度"；当 $\mu(\Omega(P))^c=0$ 时，说 P 在 Ω 上几乎处处成立．例如，当 $\mu\Omega(f\neq 0)=0$ 时说 f 在 Ω 上几乎处处为零，写作 $f\overset{a.e.}{=}0$；$f\overset{a.e}{\geqq}0$，$f_n\xrightarrow{a.e}0$ 等仿此．上述实质上很简单的思想开创了测度论在函数研究中的极有价值的应用．

给定 Ω 上几乎处处有限的可测函数 f，f_1，f_2，…，令 $\Omega(n,\varepsilon)=\Omega(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)$．若 $\forall\,\varepsilon>0$：$\mu\Omega(n,\varepsilon)\to 0(n\to\infty)$，则说 $\{f_n\}$ 测度收敛于 f，记作 $f_n\xrightarrow{\mu}f$．若 $\forall\,\delta>0$，$\exists\,A_\delta\in\mathscr{A}$：$\mu A_\delta^c<\delta$，在 A_δ 上 $f_n\rightrightarrows f$，则说 $\{f_n\}$ 几乎一致收敛于 f，记作 $f_n\xrightarrow{a.u.}f$．显然 $f_n\xrightarrow{a.u.}f\Rightarrow f_n\xrightarrow{a.e.}f$ 且 $f_n\xrightarrow{\mu}f$．更深刻的结论是：

3.1.4 定理 依以上记号，$f_n\xrightarrow{\mu}f\Rightarrow$ 存在子列 $\{f_{n_k}\}$：$f_{n_k}\xrightarrow{a.u.}f$；若 $\mu\Omega<\infty$，则 $f_n\xrightarrow{a.u.}f\Longleftrightarrow f_n\xrightarrow{a.e.}f$．

证 若 $f_n\xrightarrow{\mu}f$，则可递次取出 $n_1<n_2<\cdots$：$\mu\Omega(n_k,k^{-1})<2^{-k}$．任给 $\delta>0$，令 $\Omega_\delta^c=\bigcup_{k_0}^\infty\Omega(n_k,k^{-1})$，使得 $\mu\Omega_\delta^c\leqslant\sum_{k_0}^\infty 2^{-k}<\delta$，不难验证在 Ω_δ 上 $f_{n_k}\rightrightarrows f$．若 $\mu\Omega<\infty$，$f_n\xrightarrow{a.e.}f$，则 $\forall\,\varepsilon>0$：

$$\lim_n \mu\left(\bigcup_{k\geq n} \Omega(k,\varepsilon)\right) = \mu\left(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n}\Omega(k,\varepsilon)\right)$$

$$\leqslant \mu\Omega(f_n \nrightarrow f) = 0.$$

任给$\delta>0$，取$n_1<n_2<\cdots$，使得$\mu\left(\bigcup_{i\geq n_k}\Omega(i,k^{-1})\right)<\delta/2^k$，令

$\Omega_\delta^c = \bigcup_{k\geq 1}\bigcup_{i\geq n_k}\Omega(i,k^{-1})$，则$\mu\Omega_\delta^c<\delta$，在$\Omega_\delta$上$f_n \rightrightarrows f$． □

积分的引进自然地经由几个递进的步骤．

3.1.5 定义 1° 若$f=\sum c_i\chi_{e_i}$是Ω上的非负简单函数，

则称$\int f d\mu = \sum c_i \mu e_i$为$f$在$\Omega$上的积分．

2° 若f是Ω上的非负可测函数，则规定

$$\int f d\mu = \sup\left\{\int \varphi d\mu \,\middle|\, \varphi\text{是简单函数，}0\leqslant\varphi\leqslant f\right\} \qquad (2)$$

为f在Ω上的积分．

3° 若f是Ω上的实可测函数，则规定

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \qquad (3)$$

为f在Ω上的积分，只要（3）右端两积分至少一个有限；当$\int f d\mu$有限时称f在Ω上可积．

4° 若f是Ω上的复可测函数，$u=\mathrm{Re}f$与$v=\mathrm{Im}f$可积，则说f在Ω上可积，且规定其积分为

$$\int f d\mu = \int u d\mu + i\int v d\mu. \qquad (4)$$

5° 若$\int f d\mu$存在，$A\in\mathscr{A}$，则规定

$$\int_A f d\mu = \int f\chi_A d\mu. \qquad (5)$$

Ω上的可积函数之全体记作$L^1(\Omega,\mu)$，也简写作$L^1(\Omega)$或L^1．直接看出，$f\in L^1 \Longleftrightarrow |f|\in L^1 \Rightarrow |f| \overset{\text{a.e.}}{<} \infty$且$\Omega(f\neq$

0)σ-有限．当必要时，积分 $\int f d\mu$ 可写作$\int_{\Omega} f(x) d\mu(x)$.

现将积分的一些简单性质综述于下：

3.1.6 定理 设 $f, g \in L^1(\Omega)$，$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$，则

1° $\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu$；

2° $\int f d\mu = \sum \int_{A_i} f d\mu$，$\{A_i\}$是$\Omega$的任一分解；

3° $f \geqslant 0 \Rightarrow \int f d\mu \geqslant 0$；$\int |f| d\mu = 0 \Rightarrow f \overset{a.e.}{=\!=} 0$；

4° $\left| \int f d\mu \right| \leqslant \int |f| d\mu$；

5° （绝对连续性）$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，$\forall A \in \mathscr{A}$：$\mu A < \delta$ $\Rightarrow \int_A |f| d\mu < \varepsilon$．其中2°—4°对任何非负可测函数成立．

以上结论的证明可依3.1.5的模式递次地对各类函数完成以下的收敛定理则要深刻一些．

3.1.7 定理 设 $g, f, f_1, f_2, \cdots$是Ω上的可测函数．

1° （Levi 定理）若$0 \leqslant f_n \nearrow f$，则$\int f d\mu = \lim\limits_n \int f_n d\mu$．

2° （Fatou 定理）若 $f_n \geqslant 0$，则$\int \varliminf\limits_n f_n d\mu \leqslant \varliminf\limits_n \int f_n d\mu$．

3° （Lebesgue 控制收敛定理）若 $|f_n| \leqslant g \in L^1$，$f_n \xrightarrow{a.e.} f$（或$f_n \xrightarrow{\mu} f$），则$f \in L^1$，且$\int |f_n - f| d\mu \to 0$，$\int f_n d\mu \to \int f d\mu$ $(n \to \infty)$．

证 1° 只要证：若φ是简单函数，$0 \leqslant \varphi \leqslant f$，$0 < \beta < 1$，则$\int \beta \varphi d\mu \leqslant \lim\limits_n \int f_n d\mu$．令$A_n = \Omega(f_n \geqslant \beta\varphi)$，则 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$，$\Omega = \bigcup A_n$，于是

$$\int \beta\varphi d\mu = \lim_n \int_{A_n} \beta\varphi d\mu \leqslant \lim_n \int f_n d\mu.$$

2° 直接由1°推出，

$$\int \lim_n f_n d\mu = \int \lim_n \inf_{k\geqslant n} f_k d\mu = \lim_n \int \inf_{k\geqslant n} f_k d\mu$$

$$\leqslant \lim_n \inf_{k\geqslant n} \int f_k d\mu = \underline{\lim_n} \int f\ d\mu.$$

3° 若$f_n \xrightarrow{a.e.} f$，则可将2°用到$2g - |f_n - f|$；利用3.1.4，可将$f_n \xrightarrow{\mu} f$归结为$f_n \xrightarrow{a.e.} f$的情况. □

推论 若$\{u_n\}$是Ω上的非负可测函数列，则

$$\int(\sum u_n)d\mu = \sum \int u_n d\mu.$$

若$\mu\Omega < \infty$，在Ω上$f_n \xrightarrow{\mu} f$，$|f_n| \leqslant K < \infty$，则

$$\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu.$$

若$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$与$(\Delta, \mathscr{B}, \nu)$是两个$\sigma$-有限测度空间，则可依自然的方式构成"积测度空间"$(\Omega\times\Delta, \mathscr{A}\times\mathscr{B}, \mu\times\nu)$，其中$\mathscr{A}\times\mathscr{B}$是$\Omega\times\Delta$上由$\{A\times B \mid A\in\mathscr{A}, B\in\mathscr{B}\}$生成的$\sigma$-代数，积测度$\mu\times\nu$是$\mathscr{A}\times\mathscr{B}$上的唯一$\sigma$-有限测度，使得$(\mu\times\nu)(A\times B) = \mu A\cdot\nu B (A\in\mathscr{A}, B\in\mathscr{B})$. 关于积空间上的"二重积分"有以下基本结果（证明参看[21]）：

3.1.8 Fubini定理 设f是$\Omega\times\Delta$（依上面的记号）上的可测函数，则$f\in L^1 \Longleftrightarrow \int d\mu(x)\int |f(x,y)|\,d\nu(y) < \infty$；当$f\in L^1$时，

$$\int f d(\mu\times\nu) = \int d\mu(x)\int f(x,y)d\nu(y)$$

$$= \int d\nu(y)\int f(x,y)d\mu(x),$$

其中积分$\int f(x,y)d\nu(y)$对几乎所有x存在，积分$\int f(x,y)d\mu(x)$对几乎所有y存在.

参考文献：[21]，[27]，[65]，[82]。

习　题

1. 设μ是Ω上的计数测度，$f:\Omega\to\mathbb{C}$，则$f\in L^1(\Omega,\mu)\iff$除一可数集$\{x_n\}\subset\Omega$外$f(x)=0$，且$\sum|f(x_n)|<\infty$；此时$\int f d\mu=\sum f(x_n)=\sum\limits_{x\in\Omega}f(x)$，由此推出绝对收敛级数的项可以重排。

2. 若$\{A_n\}\subset\mathscr{A}$，$\sum\mu A_n<\infty$，则几乎每个$x\in\Omega$仅属于有限多个$A_n$。

3. 设$0\leqslant f_n\in L^1(\Omega,\mu)$，$f_n\xrightarrow{\mu}f$，$\int f_n d\mu\longrightarrow\int f d\mu$，则$\int_A f_n d\mu\longrightarrow\int_A f d\mu\,(A\in\mathscr{A})$。

§2　向量值函数的积分

本节中设$(\Omega,\mathscr{A},\mu)$是给定的测度空间。

3.2.1 定义　设$f:\Omega\to E$，若$f(\Omega)=\{a_i\}$是可数[有限]集且集$e_i=\Omega(f=a_i)$皆可测，则称f为可数值函数[简单函数]，写作$f=\sum a_i\chi_{e_i}$（今后用此记号时约定e_i互不相交，但a_i不必互异）。若存在可数值函数列$\{f_n\}$：$f_n\xrightarrow{a.e.}f(\iff|f_n-f|\xrightarrow{a.e.}0)$，则称$f$为可测函数。若$\forall\varphi\in E'$，$\varphi\circ f$是复可测函数，则称$f$为弱可测函数。

“可测”与“弱可测”之间有如下关系：

3.2.2 定理（Pettis，1938）　$f:\Omega\to E$可测$\iff f$弱可测且几乎可分值，即有零测集$A\subset\Omega$：$f(A^c)$可分。

证　设$f_n\xrightarrow{a.e.}f$，f_n是可数值函数。$\forall\varphi\in E'$，$\varphi\circ f_n\xrightarrow{a.e.}\varphi\circ f$，可见$f$是弱可测的。令$A=\{x\,|f_n(x)\not\to f(x)\}$，则$\mu A=0$，$f(A^c)$含于$\overline{\bigcup f_n(\Omega)}$，后者显然是可分的。

其次设f弱可测且几乎可分值，不妨设$E=\overline{\{a_i\}}$。令

$B_{ni}=f^{-1}B(a_i,n^{-1})$，$B_{n0}=\varnothing$，$e_{ni}=B_{ni}\setminus\bigcup_{j<i}B_{nj}(n,i=1,2,\cdots)$. 当 n 固定时 e_{ni} 互不相交，$\bigcup_i e_{ni}=\bigcup_i B_{ni}=\Omega$. 令 $f_n=\sum_i a_i\chi_{e_{ni}}$，则 $|f_n-f|<1/n$，可见$f_n\rightrightarrows f$. 于是问题归于指明集B_{ni}可测，这由以下事实推出：由1.8.7，有可数集$\{\varphi_n\}\subset E'$：$|f-a_i|=\sup_n|\varphi_n\circ(f-a_i)|$，因而$|f-a_i|$是实可测函数. □

推论 1　若 $f:\Omega\to E$ 可测，则 $|f|$ 是实可测函数，且有可数值函数列$\{f_n\}$与零测集 A，在A^c上$f_n\rightrightarrows f$.

推论 2　若E可分，则$f:\Omega\to E$可测$\Longleftrightarrow f$弱可测.

推论 3　若 $f,g:\Omega\to E$ 可测，且 $\forall\varphi\in E'$：$\varphi\circ f\overset{a.e.}{=}\varphi\circ g$，则$f\overset{a.e.}{=}g$.

证　不妨设E可分，于是有可数集$\{\varphi_n\}\subset E'$：$\{\varphi_n\}^{\perp}=0$ (1.8.7)，从 $\varphi_n\circ f\overset{a.e.}{=}\varphi_n\circ g(n=1,2,\cdots)$推出$f\overset{a.e.}{=}g$. □

任给可测函数$f:\Omega\to E$，约定$\|f\|_1=\int|f|d\mu$.

3.2.3 **定义**　设$f:\Omega\to E$. 若$f=\sum a_i\chi_{e_i}$是可数值函数，$\|f\|_1<\infty$，则称 f 可积，令$\int fd\mu=\sum a_i\mu e_i$. 若存在可积的可数值函数列$\{f_n\}$：$f_n\xrightarrow{a.e.}f$，$\|f_n-f\|_1\to0$，则称$f$可积，且规定其积分为$\int fd\mu=\lim_n\int f_nd\mu$，$\int_A fd\mu=\int f\chi_A d\mu(A\in\mathscr{A})$. 从$\Omega$到$E$的可积函数之全体记作$L^1(\Omega,E,\mu)$，也简写作 $L^1(\Omega,E)$或$L^1(\mu)$，L^1.

注　对定义中所述的序列$\{f_n\}$，由$\left\|\int f_md\mu-\int f_nd\mu\right\|\leqslant\|f_m-f\|_1+\|f_n-f\|_1$推出$\lim_n\int f_nd\mu$存在；类似地可说明$\int fd\mu$与$\{f_n\}$的选取无关，因而积分定义是合理的.

3.2.4 定理(Bochner, 1933) 可测函数 $f:\Omega\to E$ 可积 $\Longleftrightarrow$ $\|f\|_1<\infty$；粗言之，“可积”等价于“绝对可积”.

证 若 f 可积，$\{f_n\}$ 如3.2.3中所述，则 $\|f\|_1\leqslant\|f-f_n\|_1+\|f_n\|_1<\infty$. 反之，设 $\|f\|_1<\infty$，取可数值函数列 $\{f_n\}$ ：$f_n\xrightarrow{a.e.}f$（依3.2.1），取定常数 $\rho>1$，定义

$$g_n(x)=\begin{cases}f_n(x), & \|f_n(x)\|\leqslant\rho\|f(x)\|;\\ 0, & \text{否则},\end{cases}\tag{1}$$

则 g_n 是可数值函数，$g_n\xrightarrow{a.e.}f$，$|g_n|\leqslant\rho|f|$. 将控制收敛定理用于 $|g_n-f|$，得 $\|g_n-f\|_1\to0$，故 $f\in L^1$. □

若对几乎处处相等的可积函数不加区别，则 $L^1(\Omega,E)$ 依范数 $\|f\|_1$ 是一个 B-空间（参考3.5.1）.

通常积分的许多性质可推广于向量值函数.

3.2.5 定理 1° $J:L^1(\Omega,E)\to E$，$f\longmapsto\int fd\mu$ 是一个有界线性算子，$\|J(f)\|\leqslant\|f\|_1$；若 $f\in L^1(\Omega,E)$，$\{A_i\}$ 是 Ω 的一个分解(3.1.1)，则 $\int fd\mu=\sum\int_{A_i}fd\mu$（完全可加性）.

2° （控制收敛定理） 设 $f_n\xrightarrow{a.e.}f$ 或 $f_n\xrightarrow{\mu}f$（$\Longleftrightarrow$ $|f_n-f|\xrightarrow{\mu}0$），$f_n\in L^1(\Omega,E)$，$|f_n|\leqslant g\in L^1$，则 $f\in L^1$ 且 $\|f_n-f\|_1\to0$.

3° （Fubini 定理） 设 (Ω,μ) 与 (Δ,ν) 是两个 σ-有限测度空间，$f\in L^1(\Omega\times\Delta,\ E,\ \mu\times\nu)$，则

$$\int fd(\mu\times\nu)=\int d\mu(x)\int f(x,y)d\nu(y)$$
$$=\int d\nu(y)\int f(x,y)d\mu(x).$$

证明的基本思想是将以上命题归化为通常积分的相应结论（3.1.6—3.1.8）. 例如，将3.1.7之3°用到 $|f_n-f|$，立得

2°. 而证 $\left\|\int f d\mu\right\| \leqslant \|f\|_1$ 可用如下推演：

$$\left\|\int f d\mu\right\| = \sup_{\varphi\in E', \|\varphi\|=1}\left|\varphi\left(\int f d\mu\right)\right| = \sup_{\|\varphi\|=1}\left|\int \varphi\circ f d\mu\right|$$

$$\leqslant \sup_{\|\varphi\|=1}\int|\varphi\circ f|\,d\mu \leqslant \int|f|\,d\mu,$$

其中用到恒等式（可与§2.1(6)对照）：

$$\varphi\left(\int f d\mu\right) = \int \varphi\circ f d\mu,\quad \varphi\in E',\quad f\in L^1(\Omega, E). \qquad (2)$$

(2)不难由积分定义直接验证.

由控制收敛定理可推出以下常用的结论：

3.2.6 定理 设 U 是某赋范空间 Y 的开子集，$f(x,y): \Omega\times U\to E$，$0\leqslant r\leqslant\infty$，$D_y^k f(x,y)$ 存在且对 x 可测对 y 连续，$|D_y^k f|\leqslant g_k\in L^1(\Omega)(0\leqslant k<r+1)$，则 $\varphi(y)=\int f(x,y)d\mu(x)\in C^r(U, E)$，且

$$D^k\varphi(y) = \int D_y^k f(x,y)d\mu(x),\quad 0\leqslant k<r+1,\quad y\in U. \qquad (3)$$

证 直接由控制收敛定理推出(3)之右端存在且是 y 的连续函数. 等式(3)可归纳地证明，故只需考虑 $k=1$. 取定 $y\in U$，令

$$F(x,h) = [f(x,y+h) - f(x,y) - f_y'(x,y)h]/\|h\|.$$

当 $\|h\|$ 充分小时，$F(x,h)$ 对 x 可测且 $\|F(x,h)\|\leqslant 2g_1(x)$(§2.1(10)). 于是当 $\{h_n\}\subset Y\setminus 0$，$h_n\to 0$ 时，由控制收敛定理推出：

$$\lim_n\left[\Delta\varphi(y,h_n) - \int f_y'(x,y)d\mu(x)\cdot h_n\right]\Big/\|h_n\|$$

$$= \lim_n\int F(x,h_n)d\mu(x) = \int \lim_n F(x,h_n)d\mu(x) = 0,$$

这正表明 $\varphi'(y) = \int f_y'(x,y)d\mu(x)$. □

注　在具体问题中，$D_y^k f(x,y)$ 对 x 的可测性通常是满足的．例如若 $Y=\mathrm{R}^n$，则 f 对 y 的偏导数是可测函数的极限函数，从而是可测的．若 μ 是可分空间 Ω 上的 Borel 测度，$D_y^k f$ 对 x 连续，则可测性从3.2.2推出．其次，3.2.6的条件只要对 y 局部地满足．若 μ 是可分紧拓扑空间 Ω 上的 Borel 测度，$D_y^k f$ 在 $\Omega\times U$ 上连续，则对任给 $y_0\in U$，当 $\|y-y_0\|$ 充分小时，$\|D_y^k f(x,y_0)\|+1$ 可作为3.2.6中的"控制函数" $g_k(x)$．

以下定理使得可利用积分来估计函数值．

3.2.7 定理　设 $f\in L^1(\Omega,E)$，$F\subset E$ 是闭集．若对任何满足 $0<\mu A<\infty$ 的 $A\subset\Omega$，有 $\frac{1}{\mu A}\int_A f d\mu\in F$，则 $f(x)\overset{\text{a.e.}}{\in}F$．

证　不妨设 E 可分，从而是第二可数的(1.1.9)．因 $\Omega(f\neq 0)$ 是 σ-有限的，故不妨设 $\mu\Omega<\infty$．因开集 F^c 可表为可数个开球之并，故只要证：若 $B(a,r)\subset F^c$，$A=f^{-1}B(a,r)$，则 $\mu A=0$．假定 $\mu A>0$，则

$$\left\|\frac{1}{\mu A}\int_A f d\mu-a\right\|\leqslant\frac{1}{\mu A}\int_A\|f(x)-a\|d\mu<r,$$

这与 $\frac{1}{\mu A}\int_A f d\mu\in F$ 矛盾．　□

推论　设 $f\in L^1(\Omega,E)$．若对任何有有限测度的 $A\subset\Omega$：$\int_A f d\mu=0$，则 $f\overset{\text{a.e.}}{=}0$．

以上讨论的积分通常称为 Bochner 积分．还可引入更一般的Pettis积分．设 E 是任何LCS，$f:\Omega\to E$．若 $\forall\varphi\in E'$：$\varphi\circ f\in L^1(\Omega)$，且存在 ξ，使得

$$\varphi(\xi)=\int\varphi\circ f d\mu\quad(\forall\varphi\in E'),\tag{4}$$

则称 ξ 为 f 在 Ω 上的Pettis积分，记作 $(P)\int f d\mu$．当 $(P)\int f d\mu$

存在时，它必是唯一的，而(2)表明Bochner积分是 Pettis 积分的特款．对Pettis积分亦可验证：

$$(P)\int(\alpha f+\beta g)d\mu=\alpha\cdot(P)\int fd\mu+\beta\cdot(P)\int gd\mu; \quad (5)$$

$$\left\|(P)\int fd\mu\right\|\leqslant(P)\int|f|\,d\mu, \quad (6)$$

其中(5)要求右端积分存在，(6)要求左端积分存在且E是B-空间．与Bochner积分不同，Pettis积分缺乏构造性，因而引起判定可积的困难．不过易证明以下结果：若E是自反B-空间，$f:\Omega\to E$，$\forall\varphi\in E'$：$\varphi\circ f\in L^1$，则$(P)\int fd\mu$存在，它就是E'上的泛函$\Phi:\varphi\longmapsto\int\varphi\circ fd\mu$．因可用闭图象定理推出算子$T$：$E'\to L^1(\Omega)$，$\varphi\longmapsto\varphi\circ f$的连续性，这就得出$\Phi\in E''=E$．

参考文献：[20]，[39]，[42]，[52]，[64]，[85]．

习　题

1．$f:\Omega\to E$可测$\Longleftrightarrow$任给开集$V\subset E$，$f^{-1}V$可测，且f几乎可分值，由此说明3.2.7中的$f^{-1}B(a,r)$可测．

2．$f\in L^1(\Omega,E)\Longrightarrow$存在简单函数列$\{\varphi_n\}$：$\varphi_n\xrightarrow{a.e.}f$．

3．设$f\in L^1(\Omega,E)$，$\left\|\int_A fd\mu\right\|\leqslant\mu A\,(A\in\mathscr{A})$，则$|f|\overset{a.e.}{\leqslant}1$．

§3　向量值测度与复测度

本节中设$(\Omega,\mathscr{A})$是一取定的可测空间．

3.3.1 定义　称一函数$\nu:\mathscr{A}\to E$为E-值测度，若对任给$A\in\mathscr{A}$及A的任一分解$\{A_n\}$(3.1.1)，有$\nu(A)=\sum\nu(A_n)$．称C-值[R-值]测度为复[实]测度．为区别起见，3.1.1意义下的测度也称为正测度，通常用$\mu\geqslant0$来表示μ为正测度．

3.3.2 定理　设ν是$\mathscr{A}$上的E-值测度．令

$$|\nu|(A)=\sup\{\sum\|\nu(A_i)\|\,|\,\{A_i\}是A的分解\},\quad A\in\mathscr{A},\tag{1}$$

则$\|\nu(A)\|\leqslant|\nu|(A)$，$|\nu|$是$\mathscr{A}$上有此性质的最小正测度.

证 任给A的两个分解$\{A_i\},\{B_j\}$，有

$$\sum_j\|\nu(B_j)\|\leqslant\sum_{i,j}\|\nu(A_i\cap B_j)\|\leqslant\sum_i|\nu|(A_i),$$

于是$|\nu|(A)\leqslant\sum|\nu|(A_i)$. 若$0\leqslant t_i<|\nu|(A_i)$，则有$A_i$的分解$\{A_{ij}\}$：$t_i<\sum_j\|\nu(A_{ij})\|(i=1,2,\cdots)$. 于是$\sum_i t_i\leqslant\sum_{i,j}\|\nu(A_{ij})\|\leqslant|\nu|(A)$，这推出$\sum|\nu|(A_i)\leqslant|\nu|(A)$，$|\nu|$是正测度，它显然有定理所述性质. □

称$|\nu|$为ν的**变差**，称$\|\nu\|=|\nu|(\Omega)$为ν的**全变差**，当$\|\nu\|<\infty$时说ν有界. 以$M(\Omega,E)$记$\mathscr{A}$上的有界E-值测度之全体，令$M(\Omega)=M(\Omega,\mathrm{C})$. 不难验证$M(\Omega,E)$以全变差作范数是一$B$-空间. 若$\nu$为实测度，则有**Jordan分解**$\nu=\nu^+-\nu^-$，其中$\nu^\pm=\frac{1}{2}(|\nu|\pm\nu)$皆为正测度.

3.3.3 定理 若E满足条件：

$$\beta=\inf_{x_1,\cdots,x_m\in E}\ \sup_{\varepsilon_i=0,1}\|\sum_i\varepsilon_i x_i\|/\sum_i\|x_i\|>0,\tag{2}$$

则$\mathscr{A}$上任一E-值测度ν有界.

证 若$\|\nu\|=\infty$，则有Ω的分解$\{A_i\}$及$m>0$:

$$\sum_{i\leqslant m}\|\nu(A_i)\|>\beta^{-1}(1+\|\nu(\Omega)\|).$$

由于(2)，不妨设有$p\leqslant m$：$\|\sum_{i\leqslant p}\nu(A_i)\|>1+\|\nu(\Omega)\|$. 令$P_1=\bigcup_{i\leqslant p}A_i$，$Q_1=P_1^c$，则$\|\nu(P_1)\|>1$，而$\|\nu(Q_1)\|\geqslant\|\nu(P_1)\|-\|\nu(\Omega)\|>1$. 不妨设$|\nu|(Q_1)=\infty$. 重复以上论证又可得$Q_1$的分解$\{P_2,Q_2\}$：$\|\nu(P_2)\|>1$，$|\nu|(Q_2)=\infty$. 如此继续，得到互不相交的$P_n$：$\|\nu(P_n)\|>1(n=1,2,\cdots)$，这与$\sum\nu(P_n)$收敛矛盾. □

设$x_i=(x_i^1,\cdots,x_i^n)\in R^n(1\leqslant i\leqslant m)$，$r=\sum|x_i|>0$. R^n可分为2^n个"卦限"，不妨设x_1，…，$x_p(p\leqslant m)$属同一卦限，$\sum_{i\leqslant p}|x_i|\geqslant r2^{-n}$，于是

$$\frac{1}{r}\left|\sum_{i\leqslant p}x_i\right|\geqslant\frac{1}{nr}\sum_j\left|\sum_{i\leqslant p}x_i^j\right|=\frac{1}{nr}\sum_j\sum_{i\leqslant p}|x_i^j|$$

$$=\frac{1}{nr}\sum_{i\leqslant p}\sum_j|x_i^j|\geqslant\frac{1}{nr}\sum_{i\leqslant p}|x_i|\geqslant 1/n2^n,$$

条件(2)满足．因此R^n-值（从而C^n-值）测度必有界．由1.8.5又推出，任给E-值测度ν：$\sup_{A\in\mathscr{A}}\|\nu(A)\|<\infty$.

设μ，ν分别为$\mathscr{A}$上的正测度与E-值测度．若$\mu A=0\Rightarrow\nu(A)=0$，则说$\nu$ μ-绝对连续，记作$\nu\ll\mu$.

3.3.4 定理 $\nu\ll\mu\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$\mu A<\delta(A\in\mathscr{A})$时$\|\nu(A)\|<\varepsilon$.

证 易见当$\nu\in M(\Omega)$时定理成立．今设ν是E-值测度，$\nu\ll\mu$，但有$A_n\in\mathscr{A}$：$\mu A_n<2^{-n}$，$\|\nu(A_n)\|>2\varepsilon>0$（$n=1,2,\cdots$）．令$B_n=\bigcup_1^n A_i$，$A=\bigcap B_n$，则$\mu A=0$．取$\varphi\in E'$：$\|\varphi\|=1$，$|\varphi(\nu(A_1))|>2\varepsilon$．取$n_1>1$，使得$\forall C\in\mathscr{A}$：当$C\subset B_{n_1}$时，$|\varphi(\nu(C))|<\varepsilon$．令$C_1=A_1\setminus B_{n_1}$，则$\|\nu(C_1)\|\geqslant|\varphi(\nu(C_1))|>\varepsilon$．以$A_{n_1}$代$A_1$重复以上论证可得$C_2\in\mathscr{A}$：$C_1\cap C_2=\varnothing$，$\|\nu(C_2)\|<\varepsilon$，…，如此得到互不相交的$C_n$：$\|\nu(C_n)\|>\varepsilon(n=1,2,\cdots)$，这与$\sum\nu(C_n)$收敛矛盾． □

取定$\mathscr{A}$上的正测度μ，则$M_\mu(\Omega,E)=\{\nu\in M(\Omega,E)|\nu\ll\mu\}$是$M(\Omega,E)$的闭子空间．任给$f\in L^1(\Omega,E,\mu)$，令

$$\nu_f(A)=\int_A fd\mu,\quad A\in\mathscr{A},\tag{3}$$

则显然$\nu_f\in M_\mu(\Omega,E)$，且$\|\nu_f\|\leqslant\|f\|_1$．任给$\varepsilon>0$，有简单函数$\varphi=\sum a_i\chi_{e_i}$：$\|f-\varphi\|_1<\varepsilon$（由3.2.3直接看出或参考3.5.2），

$$\|\nu_f\| \geqslant \sum \|\nu_f(e_i)\| \geqslant \sum \|\nu_\varphi(e_i)\| - \sum \|(\nu_f - \nu_\varphi)(e_i)\|$$
$$\geqslant \|\varphi\|_1 - \|f-\varphi\|_1 \geqslant \|f\|_1 - 2\varepsilon,$$

这表明$\|\nu_f\| = \|f\|_1$. 因此有等距嵌入：

$$L^1(\Omega, E, \mu) \longrightarrow M_\mu(\Omega, E), \quad f \longmapsto \nu_f, \tag{4}$$

称 f 为$\nu=\nu_f$的 **Radon-Nikodym** 导数，写作 $f = d\nu/d\mu$ 或 $d\nu = f d\mu$. Radon-Nikodym导数确有导数的某些特征.

3.3.5 定理 设 λ, μ 是 $\mathscr{A}$ 上的正测度，$\nu \in M(\Omega, E)$，$d\nu = f d\lambda = h d|\nu|$，$d\lambda = g d\mu$. 则 (i)$d\nu = fg d\mu$，或写作$\dfrac{d\nu}{d\mu} = \dfrac{d\nu}{d\lambda}\dfrac{d\lambda}{d\mu}$（链规则）；(ii) $|h| \overset{a.e.}{=\!=} 1$（依测度 $|\nu|$）.

证 (i) 只需证明当$d\lambda = g d\mu$，$f \in L^1(\Omega, E, \lambda)$时成立

$$\int_A f d\lambda = \int_A fg d\mu, \quad A \in \mathscr{A}. \tag{5}$$

(5)显然对简单函数 f 成立，从而（由3.1.3及Levi定理）亦对非负可测函数 f 成立(注意由3.2.7有$g \geqslant 0$). 若 $f \in L^1(\Omega, E, \lambda)$，取简单函数 φ：$\|f-\varphi\|_1 < \varepsilon$，则

$$\left\| \int_A f d\lambda - \int_A fg d\mu \right\| \leqslant \left\| \int_A f d\lambda - \int_A \varphi d\lambda \right\| + \left\| \int_A (\varphi g - fg) d\mu \right\| < \varepsilon + \int_A |\varphi - f| g d\mu = \varepsilon + \int_A |\varphi - f| d\lambda < 2\varepsilon.$$

(ii) 由3.2.7及$\|\nu(A)\| \leqslant |\nu|(A)$不难推出 $|h| \overset{a.e.}{\leqslant\!=} 1$（关于 $|\nu|$）. 任给$r \in (0,1)$，令$A_r = \Omega(|h| < r)$，则依(4)有

$$|\nu|(A_r) = \int_{A_r} |h| d|\nu| \leqslant r|\nu|(A_r),$$

这推出 $|\nu|(A_r) = 0$，从而 $|h| \overset{a.e.}{=\!=} 1$（关于 $|\nu|$）. □

注 对于$\nu \in M(\Omega)$，等式$d\nu = h d|\nu|$可写成$d\nu = e^{i\theta} d|\nu|$，并称之为 ν 的**极分解**（与$z = e^{i\theta}|z|$ 对照，$z \in \mathbb{C}$）.

3.3.6 Lebesgue-Nikodym 定理 设 μ 是 $\mathscr{A}$ 上的 σ-有限正测度. (i) 若 $\nu\in M(\Omega,\mathbb{C}^n)$, 则有唯一分解 $\nu=\nu_a+\nu_s$(ν 关于 μ 的Lebesgue分解), 使得 $\nu_a\ll\mu$, 且有 Ω 的分解 $\{P,Q\}$: $\nu_a(A)=\nu(A\cap P)$, $\nu_s(A)=\nu(A\cap Q)$, $\mu A=\mu(A\cap P)(A\in\mathscr{A})$;
(ii) 若 E 是Hilbert空间, 则(4)是一等距同构.

注 若 E 是Hilbert空间, λ 是 Ω 上的正测度, 则 $L^2(\Omega, E,\lambda)=\{f:\Omega\to E$ 可测: $|f|^2\in L^1\}$ 依内积

$$(f,g)=\int(f(x),g(x))d\lambda \qquad (6)$$

是一Hilbert空间. 关于 L^p 空间的一般讨论在§5中进行.

证 (i) 不妨设 $n=1$; 利用Jordan分解又不妨设 ν 是有限正测度. 首先考虑 $\mu(\Omega)<\infty$. 令 $\lambda=\nu+\mu$, 任给 $f\in L^2(\Omega,\lambda)$ (参看§5), 令 $L(f)=\int fd\nu$. 由

$$\int|f|\,d\nu\leqslant\int|f|\,d\lambda\leqslant\sqrt{\lambda(\Omega)}\,\|f\|_{L^2(\lambda)}$$

推出 $L\in(L^2(\Omega,\lambda))'$, 于是依1.10.3有 $g\in L^2(\Omega,\lambda)$, 对任给 $f\in L^2(\Omega,\lambda)$ 有

$$\int fd\nu=\int fgd\lambda=\int fgd\nu+\int fgd\mu,$$

即
$$\int(1-g)fd\nu=\int fgd\mu. \qquad (7)$$

因对任给 $A\in\mathscr{A}$ 有 $\int\chi_A gd\lambda=\int\chi_A d\nu=\nu(A)\leqslant\lambda(A)$, 故不妨设 $0\leqslant g\leqslant1$(3.2.7). 令 $P=\Omega(g<1)$, $Q=P^c$, 定义

$$\nu_a(A)=\nu(A\cap P),\quad \nu_s(A)=\nu(A\cap Q),\quad A\in\mathscr{A},$$

则 $\nu=\nu_a+\nu_s$. 由(7), $\mu Q=\int\chi_Q gd\mu=\int(1-g)\chi_Q d\nu=0$, 可见 $\mu A=\mu(A\cap P)(A\in\mathscr{A})$. 任给 $A\in\mathscr{A}$, 由Levi定理,

$$\nu_a(A)=\lim_n\int_{A\cap P}(1-g^n)d\nu=\lim_n\int_A(1-g^n)d\nu$$

$$=\lim_n\int_\Omega(1-g)(1+g+\cdots+g^n)\chi_A d\nu$$

$$=\lim_n\int_A(g+\cdots+g^n)d\mu=\int_A hd\mu,$$

其中$h=\sum_1^\infty g^n$. 因此$d\nu_a=hd\mu$, $\nu_a\ll\mu$.

若有Ω的分解$\{\Omega_i\}$: $\mu\Omega_i<\infty$, 则在每个Ω_i应用已证结论可得出所要求的关于ν的分解. 若$\nu=\nu_a+\nu_s=\nu_a'+\nu_s'$是两个Lebesgue分解, 则$\nu_a-\nu_a'\ll\mu$, 且有$\Omega$的分解$\{P, Q\}$, 使得$\mu Q=0$, $(\nu_s-\nu_s')(A)=(\nu_s-\nu_s')(A\cap Q)$, 由此显然推出$\nu_a-\nu_a'=\nu_s'-\nu_s=0$.

(ii) 只要证(4)是满射. 任给$\nu\in M_\mu(\Omega,E)$, 显然$|\nu|\ll\mu$, 于是已证的(i)推出$d|\nu|=gd\mu$, $g\in L^1(\Omega,\mu)$. 任给简单函数$\varphi=\sum a_i\chi e_i$, $\{a_i\}\subset E$, 令$T(\varphi)=\sum(a_i,\nu(e_i))$, 则

$$|T(\varphi)|\leqslant\sum\|a_i\|\,|\nu|(e_i)$$

$$\leqslant(\sum\|a_i\|^2|\nu|(e_i))^{1/2}(\sum|\nu|(e_i))^{1/2}\leqslant\|\varphi\|_2\sqrt{\|\nu\|},$$

其中$\|\cdot\|_2$记$L^2(\Omega,E,|\nu|)$中的范数. 结合Hahn-Banach定理与1.10.3得出: 存在$h\in L^2(\Omega,E,|\nu|)$, 对简单函数φ有

$$T(\varphi)=\int(\varphi(x),h(x))d|\nu|.$$

取定$A\in\mathscr{A}$, 对任给$a\in E$有

$$(a,\nu(A))=T(a\chi_A)=\int_A(a,h(x))d|\nu|=\left(a,\int_A hd|\nu|\right),$$

故得$\nu(A)=\int_A hd|\nu|$, 即$d\nu=hd|\nu|$. 由3.3.5, 可设$|h|=1$, 于是$hg\in L^1(\Omega,E,\mu)$, $d\nu=hgd\mu$, (4)是满射. □

注 若$\nu\in M_\mu(\Omega,E)$, $d\nu=hd|\nu|$, $d|\nu|=gd\mu$, 则等式$|hg|=g$可形式地写作$d|\nu|/d\mu=|d\nu/d\mu|$.

给定向量值测度ν, $d\nu=hd|\nu|$, $f\in L^1(\Omega,E,|\nu|)$, 可依一种自然的方式定义f关于ν的积分. 首先设$\nu\in M(\Omega)$,

定义

$$\int f d\nu = \int f h d|\nu|; \tag{8}$$

其次设$\nu \in M(\Omega, E)$，E为Hilbert空间，则定义

$$\int f \cdot d\nu = \int (f(x), h(x)) d|\nu|. \tag{9}$$

形式上，定义式(8)与(9)不过是以$hd|\nu|$代换左边的$d\nu$而已．因两式右边是关于正测度的积分，故§1与§2中所述的积分性质有相应的推广．例如，对(9)所定义的积分有不等式：

$$\left|\int f \cdot d\nu\right| \leqslant \int |(f(x), h(x))| d|\nu| \leqslant \int \|f(x)\| d|\nu|. \tag{10}$$

类似地，对积分(8)亦有：

$$\left\|\int f d\nu\right\| \leqslant \int \|f(x)\| d|\nu|. \tag{11}$$

参考文献：[21]，[22]，[27]，[38]，[39]，[52]，[65]．

习　题

1．设μ是1维Lebesgue测度，任给可测集$A \subset \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$，令

$$\nu(A) = \left(\frac{1}{n}\mu(A \cap [n-1, n])\right)_{n \geq 1},$$

则ν是$\mathbb{R}^+$上的l^2-值测度，$\|\nu\| = \infty$．

2．积分(8)可写成$\int f d\nu_1 - \int f d\nu_2 + i\int f d\nu_3 - i\int f d\nu_4$，其中$\nu_j$是正测度，$\nu = \nu_1 - \nu_2 + i(\nu_3 - \nu_4)$．

3．任给$\nu \in M(\Omega)$，$\|\nu\| = \sup\{|\int \varphi d\nu| \mid \varphi: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$是可测函数，$|\varphi| \leqslant 1\}$．

§4　局部紧空间上的测度与积分

本节中设Ω是给定的LCH(1.3.8)，以$\mathscr{B}$记其中的Borel集

之全体．我们感兴趣的是Ω上具有某些“逼近性质”的Borel测度，这些性质使所考虑的测度受制于空间Ω的拓扑结构，从而使相应的积分论能达到更深入的结论．

3.4.1 定义 设μ是Ω上的Borel测度．若$A\in\mathscr{B}$，$\mu A=\inf\{\mu V\mid V\supset A$是开集$\}$ $[\mu A=\sup\{\mu K\mid K\subset A$是紧集$\}]$，则说$\mu$在$A$上是外[内]正则的．若$\mu$在Borel集上是外正则的，在开集上是内正则的，则称μ为正则测度．称$\mathscr{B}$上一E-值测度ν为正则的，若$|\nu|$是正则的．

正则性条件蕴含一些良好的逼近性质．

3.4.2 定理 设μ是Ω上的正则测度，$A\in\mathscr{B}$关于μ σ-有限．则(i) $\forall\,\varepsilon>0$，存在开集$V\supset A$：$\mu(V\setminus A)<\varepsilon$；(ii) μ在A上是内正则的．

证 (i) 设$A=\bigcup A_n$，$\mu A_n<\infty$．取开集$V_n\supset A_n$：$\mu(V_n\setminus A_n)<\varepsilon 2^{-n}(n=1,2,\cdots)$，则$V=\bigcup V_n\supset A$，$\mu(V\setminus A)\leqslant\sum\mu(V_n\setminus A_n)<\varepsilon$．

(ii) 可设$\mu A<\infty$．任给$\varepsilon>0$，取开集$V\supset A$，$W\supset V\setminus A$，$\mu(V\setminus A)<\varepsilon$，$\mu W<\varepsilon$，再取紧集$K\subset V$：$\mu(V\setminus K)<\varepsilon$．则$L=K\setminus W$是紧集，$L\subset A$，$\mu L\geqslant\mu K-\mu W>\mu A-2\varepsilon$，$\mu$在$A$上是内正则的． □

推论 设μ是Ω上的σ-有限正则测度，$A\in\mathscr{B}$，则μ在A上是内正则的；$\forall\,\varepsilon>0$，存在开集D，闭集C，G_δ集G，F_σ集（即G_δ集之补）F，使得$C\subset F\subset A\subset G\subset D$，$\mu(D\setminus C)<\varepsilon$，$\mu(G\setminus F)=0$．

对Borel测度的正则性要求其实是易满足的．

3.4.3 定理 若Ω是第二可数的LCH，则Ω上任一Borel测度μ是σ-有限正则测度．

证 因Ω中的开集是σ-紧的(1.4.11)，故μ σ-有限且在开集上是内正则的．下面证外正则性．

首先设$\mu\Omega<\infty$. 设$\mathscr{A}$由有以下性质的$A\in\mathscr{B}$组成：$\mu A=\inf\{\mu V\mid V\supset A$是开集$\}=\sup\{\mu F\mid F\subset A$是闭集$\}$. 显然$\mathscr{A}$包含所有开集且$A\in\mathscr{A}\Rightarrow A^c\in\mathscr{A}$. 若$A=\bigcup A_n$，$A_n\in\mathscr{A}$，则$\forall\varepsilon>0$，有开集$V_n\supset A_n$，闭集$F_n\subset A_n$：$\mu(V_n\setminus F_n)<\varepsilon 2^{-n}(n=1,2,\cdots)$，于是$\bigcup_1^m F_i=B_m\subset A\subset V=\bigcup_n V_n$，$\mu(V\setminus B_m)<\varepsilon+\mu(\bigcup_n F_n\setminus B_m)$，由此推出$A\in\mathscr{A}$，$\mathscr{A}$是一$\sigma$-代数，从而$\mathscr{A}=\mathscr{B}$.

一般情况下，取Ω的可数开覆盖$\{U_n\}$，使得$\mu U_n<\infty$. 定义$\mu_n A=\mu(A\cap U_n)(A\in\mathscr{B})$. 任给$A\in\mathscr{B}$，$\varepsilon>0$，由已证结论，有开集$V_n\supset A$：$\mu_n(V_n\setminus A)<\varepsilon 2^{-n}(n=1,2,\cdots)$. 于是$A\subset V=\bigcup(V_n\cap U_n)$，$\mu(V\setminus A)\leqslant\sum\mu_n(V_n\setminus A)<\varepsilon$，$\mu$在$A$上是外正则的. □

现在转向Ω上的可测函数与积分. 显然每个$f\in C(\Omega,m)$（关于$\mathscr{B}$）可测(参看1.1.11，3.1.2). 在某种意义下，Ω上的$\mathbf{C}^m$-值可测函数"任意接近"于连续函数.

3.4.4 Lusin定理 设μ是Ω上一正则测度，$f:\Omega\to\mathbf{C}^m$为可测函数，$A=\Omega(f\neq 0)$，$\mu A<\infty$. 则$\forall\varepsilon>0$，$\exists g\in C_c(\Omega,m)$：$\mu\Omega(f\neq g)<\varepsilon$，$\|g\|_u\leqslant\|f\|_u$（记号见§1.3(1)，§1.4(3)）.

证 设已得$h\in C_c(\Omega,m)$：$\mu\Omega(f\neq h)<\varepsilon$，令$\beta=\|f\|_u$，当$\beta=\infty$时，令$g=h$；否则令

$$g(x)=\begin{cases}\beta h(x)/|h(x)|, & |h(x)|>\beta;\\ h(x), & |h(x)|\leqslant\beta,\end{cases}$$

则g合于定理要求. 为证所述h存在，不妨设A是紧集，f是实函数（否则考虑它的各分量）. 易见$\mu\Omega(|f|>n)\to 0(n\to\infty)$，故不妨设$f$有界，可设$0\leqslant f<1$（否则作一代换）. 设$f_n$如§1(1)，令$e_n=\Omega(f_n>f_{n-1})(n\geqslant 1, f_0=0)$，则$f=\sum_1^\infty 2^{-n}\chi_{e_n}$. 取开集$V$，$V_n$，紧集$K_n$，使得$K_n\subset e_n\subset V_n\subset V$，$A\subset V$，$\bar V$紧，$\mu(V_n\setminus K_n)<2^{-n}\varepsilon$；取$h_n\in C(\Omega)$：$K_n<h_n<$

V_n. 则$h=\sum_1^\infty 2^{-n}h_n\in C_c(\Omega)$,

$$\mu\Omega(f\neq h)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu\Omega(h_n\neq\chi_{e_n})<\varepsilon.$$ □

推论 在3.4.4条件下，存在$\{g_n\}\subset C_c(\Omega,m)$: $g_n\xrightarrow{\text{a.e.}}f$.

若μ是Ω上的正则测度，则每个$f\in C_c(\Omega)$关于μ可积：$\int|f|d\mu\leqslant\|f\|_u\mu(\text{supp}f)<\infty$. 于是$\mu$决定一个线性泛函

$$L_\mu: C_c(\Omega)\longrightarrow \mathrm{C},\ f\longmapsto\int fd\mu, \tag{1}$$

当$f\geqslant 0$时$L_\mu(f)\geqslant 0$. 有后一性质的线性泛函称为**正线性泛函**. 一个深刻得多的事实是，以上结论的逆也成立. 这就是以下著名的

3.4.5 Riesz表示定理 任给$C_c(\Omega)$上的正线性泛函L，存在Ω上唯一正则测度μ，使得$L=L_\mu$.

这个定理的证明较长，可参看[65]. 基本思想是，若μ为所求，则对任给开集$V\subset\Omega$，紧集$K\subset V$，$\exists f\in C_c(\Omega)$: $K\prec f\prec V$(1.4.8)，于是$\mu K\leqslant L(f)\leqslant\mu V$，可见

$$\mu V=\sup\{L(f)\mid f\in C_c(\Omega): f\prec V\}. \tag{2}$$

这表明μ由L唯一决定. (2)也提示出构成μ的方法：记(2)之右端为μ^*V，任给$A\subset\Omega$，令

$$\mu^*A=\inf\{\mu^*V\mid V\supset A\text{是开集}\}, \tag{3}$$

则问题归于证明：$\mu^*|\mathscr{B}$就是合于定理要求的μ.

Riesz表示定理表明，每个正线性泛函$C_c(\Omega)\to\mathrm{C}$可解释为一种积分，因而LCH上的积分论与测度论实质上是等价的. 这一结论有极大的意义，它指明了在LCH中建立积分论的两条对立的途径：

(A) 直接构造一正则测度μ，然后循§1及§2所示的途径展开关于μ的积分论.

(B) 首先对"好函数"$f\in C_c(\Omega)$定义积分，得到一正

线性泛函 L，从而确立相应的正则测度 μ，于是积分扩张到任何 $f \in L^1(\Omega, E, \mu)$.

后者避开了测度 μ 的直接构造，实际上这种构造过程已由 Riesz 表示定理一次完成了. 本书中将有数处以这种方式应用 Riesz定理的机会. 现在就考虑一个例子：设 μ, ν 分别为 LCH Ω 与 Ω' 上的正则测度，则可证明，对任给 $f \in C_c(\Omega \times \Omega')$ 成立

$$\int d\mu(x) \int f(x,y) d\nu(y) = \int d\nu(y) \int f(x,y) d\mu(x); \qquad (4)$$

将其公共值记作 $L(f)$，则 L 显然是 $C_c(\Omega \times \Omega')$ 上的正线性泛函，从而决定 $\Omega \times \Omega'$ 上一正则测度 $\mu \otimes \nu$，称 $\mu \otimes \nu$ 为 μ 与 ν 的"正则 Borel 积". 若 Ω 与 Ω' 是第二可数的，则积测度 $\mu \times \nu$（参看3.1.8）是正则的，由3.1.8，对任给 $f \in C_c(\Omega \times \Omega')$ 有 $L(f) = \int f d(\mu \times \nu)$，于是Riesz表示定理推出 $\mu \times \nu = \mu \otimes \nu$.

在一般情况下，关于 $\mu \otimes \nu$ 有如下"Fubini定理"：

3.4.6 定理 设 A, B 分别为 (Ω, μ) 与 (Ω', ν) 中的 σ-有限Borel集，$f \in L^1(\Omega \times \Omega', \mu \otimes \nu)$，$f|(A \times B)^c = 0$，则

$$\int f d(\mu \otimes \nu) = \int d\mu(x) \int f(x,y) d\nu(y)$$
$$= \int d\nu(y) \int f(x,y) d\mu(x).$$

这个定理的证明可参看[21].

鉴于实际上只使用正则测度，我们约定：今后说到LCH Ω 上的正测度时，总是指正则 Borel 测度；而记号 $M(\Omega, E)$ 表示 Ω 上的有界 E-值正则测度之全体，$M(\Omega, n) = M(\Omega, \mathbb{C}^n)$.
在新的解释下，$M(\Omega, E)$ 仍然是 B-空间，上节(4)仍为等距同构，只要 μ 是 σ-有限正则测度，E 是 Hilbert 空间. 当 Ω 第二可数时，正则性就可不予考虑.

参考文献：[21]，[22]，[26]，[36]，[38]，[52]，[65].

习 题

1. 若 μ 是 Ω 上的正则测度，则有最大开集 V：$\mu V=0$；非空开集有正测度 $\Longleftrightarrow$ 当 $f\in C_c(\Omega)$，$f\geqslant 0$，$\int f d\mu=0$ 时 $f=0$.

2. 设 L 如3.4.5，则对紧集 $K\subset\Omega$：$\mu K=\inf\{L(f)\mid K\prec f\}$.

§5 空 间 L^p

与基于微分学的"好函数"的空间($\mathscr{E}^r$, $\mathscr{D}^r$等)相对应，积分学导致考虑由"坏函数"构成的空间 L^p，后者在分析中有同样重要(或许更大)的应用价值.

以下设 $1\leqslant p\leqslant\infty$，$p'$ 总记 p 的相伴数，$p^{-1}+p'^{-1}=1$. 取定测度空间$(\Omega,\mathscr{A},\mu)$，当 Ω 是 LCH 时，总假定 μ 是正则测度. 对任给可测函数 $f:\Omega\to E$，令

$$\|f\|_p=\begin{cases}\left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}, & 1\leqslant p<\infty;\\ \inf\limits_{\mu A=0}\|f|A^c\|_u, & p=\infty,\end{cases}\tag{1}$$

$L^p(\Omega,E,\mu)=\{f:\Omega\to E$ 可测 $\mid \|f\|_p<\infty\}$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$. 必要时写 $\|f\|_p$ 为 $\|f\|_{L^p}$；不致误解时，$L^p(\Omega,E,\mu)$ 简写作 $L^p(\Omega,E)$ 或 $L^p(\mu)$, L^p；$L^p(\Omega)=L^p(\Omega,\mathrm{C})$. 若 μ 是计数测度(3.1.1)，则令 $l^p(\Omega,E)=L^p(\Omega,E,\mu)$，而 $l^p=l^p(\mathrm{N},\mathrm{C})$. 经典的 Hölder 不等式

$$\int |f|\,|g|\,d\mu\leqslant\|f\|_p\|g\|_{p'}\tag{2}$$

推出三角不等式 $\|f+\varphi\|_p\leqslant\|f\|_p+\|\varphi\|_p$ $(f,\varphi\in L^p,\ 1\leqslant p\leqslant\infty)$.

3.5.1 定理 $L^p(\Omega,E)(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 依范数(1)是 B-空间(约定其中几乎处处相等的函数不加区别)；其中的收敛序列包含几乎处处收敛子列.

证 只考虑 $p<\infty$($p=\infty$ 时是明显的). 任取 Cauchy 列

$\{f_n\}\subset L^p$，因$\Omega(f_n\neq 0)\sigma$-有限，不妨设$\Omega=\bigcup A_j$，$\mu A_j<\infty$. 递次取出$n_1<n_2<\cdots$，使得$\|g_{k+1}-g_k\|_p<2^{-k}$，其中 $g_k=f_{n_k}$.

于是利用(2)可推出：

$$\int_{A_j}\sum_k|g_{k+1}-g_k|d\mu\leqslant\sum_k 2^{-k}(\mu A_j)^{1/p'}<\infty,$$

可见$\{g_k\}$几乎处处收敛于某函数f. 由Fatou定理，

$$\|f-f_n\|_p^p\leqslant\varliminf_k\|g_k-f_n\|_p^p,\quad n=1,2,\cdots,$$

由此看出$f\in L^p$且$\|f-f_n\|_p\to 0(n\to\infty)$. □

L^p的完备性表明它含有“足够多”的元素，这对于其应用是极重要的. 不过L^p也不过于宽泛，它包含某些由“好函数”组成的稠密子空间.

3.5.2 定理 设$1\leqslant p<\infty$，则 $L^p(\Omega,E)$中的简单函数构成稠密子集；若Ω是LCH，则$C_c(\Omega,E)$在$L^p(\Omega,E)$中稠密；若Ω是第二可数的LCH，E可分，则$L^p(\Omega,E)$可分.

证 任给$f\in L^p$，取可数值函数列$\{g_n\}$：$g_n\xrightarrow{a.e.}f$，$|g_n|\leqslant 2|f|$（参看§2(1)）. 将控制收敛定理用到$|g_n-f|^p$得出$\|g_n-f\|_p\to 0$. 其次给定可数值函数$f=\sum a_i\chi_{e_i}\in L^p$，令$f_n=\sum_1^n a_i\chi_{e_i}$，易见在$L^p$中$f_n\to f$.

若Ω是LCH，则显然$C_c(\Omega,E)\subset L^p$. 取定$a\in E$，$A\in\mathscr{A}$，$\mu A<\infty$. 任给$\varepsilon>0$，取紧集K与开集V：$K\subset A\subset V$，$\mu(V\setminus K)<\varepsilon^p$；取$\varphi\in C_c(\Omega)$：$K\prec\varphi\prec V$(1.4.8)，则$\|a\varphi-a\chi_A\|_p\leqslant\|a\|\varepsilon$. 由此看出$C_c(\Omega,E)$在$L^p(\Omega,E)$中稠密.

再设E有可数稠子集B而Ω有可数拓扑基$\mathscr{U}$，可设每个$U\in\mathscr{U}$相对紧(1.4.11). 设a，A，ε，K，V仍如证明第二段. 取K的有限覆盖$\{U_i\}$与$\{V_i\}$：U_i，$V_i\in\mathscr{U}$，$\overline{V_i}\Subset U_i\subset V$；取定对应于$\{U_i,V_i\}$的$\varphi\in C_c(\Omega)$，使得$\bigcup\overline{V_i}\prec\varphi\prec\bigcup U_i$；再取$b\in B$，$\|a-b\|<\varepsilon$，则

$$\|b\varphi - a\chi_A\|_p \leqslant \varepsilon\|\varphi\|_p + \|a\|\|\varphi - \chi_A\|_p \leqslant c\varepsilon,$$

c 与$b\varphi$无关．因$b\varphi$构成一可数集，故$L^p(\Omega, E)$可分． □

当Ω为LCH时常要用到与L^p密切相关的空间

$$L^p_{loc}(\Omega, E) = \{f: \Omega \to E \mid \text{任给紧集} K \subset \Omega, f|K \in L^p\}, \tag{3}$$

$$L^p_c(\Omega, E) = \{f \in L^p(\Omega, E) \mid \text{supp} f \text{ 紧}\}. \tag{4}$$

记号$L^p_{loc}(\Omega)$与$L^p_c(\Omega)$的意义自明．任给紧集$K \subset \Omega$，令$\|f\|_{K,p} = \|f|K\|_p$，则$L^p_{loc}(\Omega, E)$依半范族$\{\|f\|_{K,p}\}$是一LCS (1.2.8)，当Ω σ-紧时它是F-空间．$L^p_c(\Omega, E)$中总采用自然的归纳极限拓扑(参考§1.9)．不难验证以下包含关系：

$$C_c \subset L^q_c \subset L^p_c, \quad C_c \subset L^q_{loc} \subset L^p_{loc}, \quad 1 \leqslant p < q \leqslant \infty,$$

且所有包含映射连续 ($C_c(\Omega, E)$中采用上确界范数)．

3.5.3 定理 设Ω是σ-紧的LCH，$f \in L^1_{loc}(\Omega, E)$．若$\forall \varphi \in C_c(\Omega)$：$\int \varphi f d\mu = 0$，则$f \overset{a.e.}{=\!=} 0$．

证 不妨设$f \in L^1$．只需证当$\mu A < \infty (A \subset \Omega)$时，$\int_A f d\mu = 0$ (3.2.7 之推论)．取$\{\varphi_n\} \subset C_c(\Omega)$：$\|\varphi_n - \chi_A\|_1 \to 0 (n \to \infty)$；可设$0 \leqslant \varphi_n \leqslant 1$，$\varphi_n \xrightarrow{a.e.} \chi_A$．于是由控制收敛定理有：

$$\int_A f d\mu = \lim_n \int f\varphi_n d\mu = 0. \qquad \square$$

以下设E是Hilbert空间．任给$g \in L^{p'}(\Omega, E)$，定义

$$T_g(f) = \int (f(x), g(x)) d\mu, \quad f \in L^p(\Omega, E), \tag{5}$$

则$|T_g(f)| \leqslant \|f\|_p \|g\|_{p'}$，因此$T_g \in (L^p(\Omega, E))'$，且$\|T_g\| \leqslant \|g\|_{p'}$．

3.5.4 定理 设$1 \leqslant p < \infty$，μ是σ-有限的，E为Hilbert空间，则$L^{p'}(\Omega, E) \to (L^p(\Omega, E))'$，$g \longmapsto T_g$ 是等距的共轭同构．

证 只需证：若$T\in(L^p)'$，则$\exists g\in L^{p'}$：$T=T_g$，$\|g\|_{p'}\leqslant\|T\|$。

首先设$\mu\Omega<\infty$。对给定的$A\in\mathscr{A}$，$a\longmapsto T(a\chi_A)(a\in E)$是$E$上的有界线性泛函，于是有$\nu(A)\in E$(1.10.3)：

$$T(a\chi_A)=(a,\nu(A))\quad(\forall a\in E).\tag{6}$$

(6) 确定一E-值测度ν，$\nu\ll\mu$。设$\{A_i\}$是Ω的一个分解。任给$a_i\in E$，$\|a_i\|=1$ $(i=1,2,\cdots)$，有

$$\sum_{i\leqslant n}|(a_i,\nu(A_i))|=\sum_{i\leqslant n}(\varepsilon_i a_i,\nu(A_i))\quad(|\varepsilon_i|=1)$$

$$=T\Big(\sum_{i\leqslant n}\varepsilon_i a_i\chi_{A_i}\Big)\leqslant\|T\|\,\Big\|\sum_{i\leqslant n}\varepsilon_i a_i\chi_{A_i}\Big\|_p\leqslant\|T\|(\mu\Omega)^{1/p}.$$

因此 $\displaystyle\sum_{i\leqslant n}\|\nu(A_i)\|=\sup_{\|a_i\|=1}\sum_{i\leqslant n}|(a_i,\nu(A_i))|\leqslant\|T\|(\mu\Omega)^{1/p}$，

故得$|\nu|<\infty$。依3.3.6，存在$g\in L^1(\Omega,E)$：$d\nu=gd\mu$。利用(6)可验证对简单函数或有界可测函数$f:\Omega\to E$有

$$T(f)=\int(f(x),g(x))d\mu.\tag{7}$$

设$p>1$，取简单函数g_n：$g_n\xrightarrow{a.e.}g$，$|g_n|\leqslant\rho|g|$，$\rho>1$是任给常数(参考3.5.1，3.5.2及§2(1))。令$h=g/|g|$，则

$$\|g\|_{p'}\leqslant\varliminf_n\|g_n\|_{p'}\leqslant\varliminf_n\rho\|g_n\|_{p'}^{1-p'}\int|g_n|^{p'-1}(h,g)d\mu$$

$$\leqslant\varliminf_n\rho\|g_n\|_{p'}^{1-p'}\|T\|\,\|h|g_n|^{p'-1}\|_p=\rho\|T\|,$$

令$\rho\to1$得$\|g\|_{p'}\leqslant\|T\|$。$p=1$时必有$\|g\|_\infty\leqslant\|T\|$，否则$\exists l>\|T\|$，$A=\Omega(|g|>l)$，$\mu A>0$，这推出

$$l\leqslant(\mu A)^{-1}\int_A|g|\,d\mu=(\mu A)^{-1}T(\chi_A g/|g|)\leqslant\|T\|.$$

于是证得$g\in L^{p'}$ $(1\leqslant p<\infty)$。因简单函数在L^p中稠密，故(7)对任何$f\in L^p(\Omega,E)$成立。

其次设$A_1\subset A_2\subset\cdots$，$\Omega=\bigcup A_n$，$\mu A_n<\infty$，$L^p(A_n,E)$

自然地嵌入$L^p(\Omega,E)$．设$g_n\in L^{p'}(A_n,E)$，$\|g_n\|_{p'}\leqslant\|T\|$，$T(f)=\int(f(x),g_n(x))d\mu(f\in L^p(A_n,E))$，可设$g_n|A_k=g_k(k<n)$．令$g(x)=\lim\limits_n g_n(x)$，则Levi定理推出$\|g\|_{p'}\leqslant\|T\|$，控制收敛定理推出$T(f)=\lim\limits_n T(f\chi_{A_n})=\int(f(x),g(x))d\mu(f\in L^p(\Omega,E))$．

□

设Ω是LCH，$C_0(\Omega,E)$（参看1.4.10）依范数$\|f\|_u$是一个B-空间，$C_0(\Omega)=C_0(\Omega,\mathbb{C})$是$B$-代数．任给$\nu\in M(\Omega)$，令

$$L_\nu(f)=\int fd\nu,\quad f\in C_0(\Omega),\tag{8}$$

则$|L_\nu(f)|\leqslant\|f\|_u\|\nu\|$（§3(11)），因此$L_\nu\in(C_0(\Omega))'$，且$\|L_\nu\|\leqslant\|\nu\|$．

3.5.5 定理　对应$M(\Omega)\to(C_0(\Omega))'$，$\nu\longmapsto L_\nu$是一等距同构．

证　只需证：若$T\in(C_0(\Omega))'$，则$\exists\,\nu\in M(\Omega)$：$T=L_\nu$，$\|\nu\|\leqslant\|T\|$．令

$$L(f)=\sup\{|T(\varphi)|\mid\varphi\in C_0(\Omega),\ |\varphi|\leqslant f\},\tag{9}$$
$$0\leqslant f\in C_0(\Omega).$$

利用$f=u^+-u^-+i(v^+-v^-)$将L自然地扩张到$C_0(\Omega)$上．设$0\leqslant f_i\in C_0(\Omega)$．若$\varphi_i\in C_0(\Omega)$，$|\varphi_i|\leqslant f_i$，$|T(\varphi_i)|=e_iT(\varphi_i)$，$|e_i|=1(i=1,2)$，则

$$|T(\varphi_1)|+|T(\varphi_2)|=T(e_1\varphi_1+e_2\varphi_2)\leqslant L(f_1+f_2),$$

因此$L(f_1)+L(f_2)\leqslant L(f_1+f_2)$．其次，若$\varphi\in C_0(\Omega)$，$|\varphi|\leqslant f_1+f_2$，则

$$|T(\varphi)|\leqslant\sum_{i=1}^2\left|T\left(\frac{\varphi f_i}{f_1+f_2}\right)\right|\leqslant L(f_1)+L(f_2),$$

故得$L(f_1+f_2)=L(f_1)+L(f_2)$. 对任给$f,g\in C_0(\Omega,\mathbf{R})$, 从

$$L(f^+)+L(g^+)+L((f+g)^+)$$
$$=L(f^-)+L(g^-)+L((f+g)^-)$$

推出$L(f+g)=L(f)+L(g)$. 于是已可看出L是$C_0(\Omega)$上的正线性泛函，它依3.4.5决定一正测度λ. 任给$f\in C_0(\Omega)$，设$|L(f)|=\varepsilon L(f)$，$|\varepsilon|=1$，则$|L(f)|\leqslant L((\mathrm{Re}(\varepsilon f))^+)\leqslant \|T\|\|f\|_\infty$，因此$\|L\|\leqslant\|T\|$；结合上节(2)得出$\lambda(\Omega)\leqslant\|L\|\leqslant\|T\|$. 由此易见对任给$f\in C_0(\Omega)$有$L(f)=\int f d\lambda$，于是$|T(f)|\leqslant L(|f|)=\int|f|\,d\lambda$. 由3.5.4，存在$g\in L^\infty(\Omega,\lambda)\subset L^1(\Omega,\lambda)$：$\|g\|_\infty\leqslant 1$，

$$T(f)=\int fg d\lambda=\int f dv,\quad f\in C_0(\Omega),\tag{10}$$

其中$dv=gd\lambda$. 于是$v\in M(\Omega)$，$\|v\|=\int|g|\,d\lambda\leqslant\lambda(\Omega)\leqslant\|T\|$，而(10)表明$T=L_v$. □

3.5.6 定理 设E是Hilbert空间，$L^2(\Omega,E)$依§3(6)所示内积而成为Hilbert空间. 若$\{\varphi_i\}_{i\in I}$是$L^2(\Omega)$的Hilbert基，$\hat{f}_i=\int f\varphi_i d\mu$，则每个$f\in L^2(\Omega,E)$有“Fourier展开式”：

$$f=\sum_{i\in I}\hat{f}_i\varphi_i,\tag{11}$$

且
$$\|f\|_2^2=\sum_{i\in I}\|\hat{f}_i\|^2\ \text{(Parseval等式)},\tag{12}$$

其中和式的意义如同§1.10(3)(5)，(11)依$L^2(\Omega,E)$中的范数收敛. 于是有等距同构$L^2(\Omega,E)\to l^2(I,E)$，$f\longmapsto(\hat{f}_i)$.

证 任给有限集$J\subset I$，如同1.10.5一样有

$$\|f_J\|_2^2\leqslant\|f\|_2^2=\|f-f_J\|_2^2+\|f_J\|_2^2,\tag{13}$$

其中$f_J=\sum_{j\in J}\hat{f}_j\varphi_j$，$\|f_J\|_2^2=\sum_{j\in J}\|\hat{f}_j\|^2$. 从(13)推出$\sum_{i\in I}\|\hat{f}\|^2\leqslant\|f\|_2^2$，$\{f_J\}$是$L^2(\Omega,E)$中的Cauchy网. 设在$L^2(\Omega,E)$中

$f_J \to F$．任给 $g \in E'$，依 $L^2(\Omega)$ 中的收敛有 $g \circ f = \sum c_i \varphi_i$，$c_i = (g \circ f, \varphi_i) = g(\hat{f}_i)$．由此推出 $g \circ f \overset{a.e.}{=\!=} g \circ F$，从而 $f \overset{a.e.}{=\!=} F$（3.2.2之推论3），(11)得证．(12)从(13)推出．最后，任给 $(a_i) \in l^2(I, E)$，从 $\sum \|a_i\|^2 < \infty$ 推出 $f_J = \sum_{j \in J} a_j \varphi_j$ 构成 $L^2(\Omega, E)$ 中的一 Cauchy 网．设 $f_J \to f$，则直接计算可验证 $\hat{f}_i = a_i$，这表明 $L^2(\Omega, E) \to l^2(I, E)$，$f \longmapsto (\hat{f}_i)$ 是等距同构． □

最后，建立一个较特殊的结果，它将是§8.2，§8.3中所需要的．

3.5.7 定理 设 (Ω, μ) 与 (Ω', ν) 是两个测度空间，$\varphi \in L^1(\Omega, L^p(\Omega'))$ $(1 \leqslant p < \infty)$，$\varphi(y)(x) \geqslant 0$ $(y \in \Omega, x \in \Omega')$，则关于 ν 有

$$\left(\int \varphi d\mu\right)(x) \overset{a.e.}{=\!=} \int \varphi(y)(x) d\mu(y). \qquad (14)$$

证 不妨设 $\mu\Omega < \infty$（因显然可设 μ σ-有限，取分解 $\Omega = \bigcup \Omega_n$，$\mu\Omega_n < \infty$，则可利用等式（参看3.5.1）

$$\left(\sum_n \int_{\Omega_n} \varphi d\mu\right)(x) \overset{a.e.}{=\!=} \sum_n \left(\left(\int_{\Omega_n} \varphi d\mu\right)(x)\right).$$

不难直接验证(14)对可数值函数 φ 成立．任给 $\varepsilon > 0$，取可数值函数 $g: \Omega \to L^p(\Omega')$，使得对几乎所有 $y \in \Omega$ 有 $\|\varphi(y) - g(y)\|_p < \varepsilon$（3.2.2之推论1）．于是

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(\int \varphi d\mu\right)(x) - \int \varphi(y)(x) d\mu(y) \right\|_p \\
&\leqslant \left\| \int (\varphi - g) d\mu \right\|_p + \left\| \int [\varphi(y) - g(y)](x) d\mu(y) \right\|_p \\
&\leqslant \varepsilon \mu\Omega + I,
\end{aligned}$$

而
$$\begin{aligned}
I^p &= \int \left| \int [\varphi(y) - g(y)](x) d\mu(y) \right|^p d\nu(x) \\
&\leqslant (\mu\Omega)^{p/p'} \iint |[\varphi(y) - g(y)](x)|^p d\nu(x) d\mu(y)
\end{aligned}$$

$$=(\mu\Omega)^{p/p'}\int\left\|\varphi(y)-g(y)\right\|_p^p d\mu\leqslant\varepsilon^p(\mu\Omega)^{1+(p/p')},$$

可见$\left\|\left(\int\varphi d\mu\right)(x)-\int\varphi(y)(x)d\mu(y)\right\|_p=0$，由此得出(14)．□

参考文献：[21]，[27]，[38]，[52]，[65]，[78]，[85]．

习 题

1．（L^p-控制收敛定理）．设$\{f_n\}\subset L^p(\Omega, E)$，$f_n\xrightarrow{a.e.}f$，$|f_n|\leqslant g\in L^p$，则在$L^p$中$f_n\to f$ $(1\leqslant p<\infty)$．

2．设$1<p<\infty$，则$L^p_{loc}(\Omega)$与$L^{p'}_c(\Omega)$互为对偶．

3．设(Ω,μ)，(Ω',ν)是σ-有限测度空间，任给$\varphi\in L^p(\Omega\times\Omega',\mu\times\nu)$ $(1\leqslant p<\infty)$，令$T\varphi(y)(x)=\varphi(x,y)$，则$L^p(\Omega\times\Omega',\mu\times\nu)\to L^p(\Omega',L^p(\Omega))$，$\varphi\longmapsto T\varphi$是一等距同构．

4．设$\mu\Omega<\infty$，$Y\subset L^\infty(\Omega)$，$Y$是$L^p(\Omega)$ $(1\leqslant p<\infty)$的闭子空间，则$\dim Y<\infty$．

§6 $\mathbf{R}^n$ 上的测度与积分

§4中所述的在LCH上导入积分的方法(A)(B)都可用来导入$\mathbf{R}^n$上的Lebesgue积分．若用方法(A)，则应首先构成Lebesgue测度μ，要点是：规定任一方体$C=\prod_1^n[a_i,b_i)\subset\mathbf{R}^n$的测度为$\mu C=\prod(b_i-a_i)$；然后规定开集$V$的测度为$\mu V=\sum\mu C_k$，$V$是方体$C_k$的不交并；任给紧集$K\subset\mathbf{R}^n$，取有界开集$V\supset K$，规定$\mu K=\mu V-\mu(V\backslash K)$；通过一个标准的逼近程序界定出"Lebesgue可测集"及其测度．若用方法(B)，则应首先确立以下事实：每个$f\in C_c(\mathbf{R}^n)$有确定的n重Riemann积分$\int_{\mathbf{R}^n}f(x)dx$，从而得到正线性泛函$f\longmapsto\int_{\mathbf{R}^n}f(x)dx$，它所决定的正测度就是Lebesgue测度．两种导入法都不免有些繁琐的细节．不过最终结论是自然明了的，将其概括为以下定理以便引用．

3.6.1 定理 R^n上存在唯一完备正测度μ（或写作μ_n），它定义于某个σ-代数$\mathscr{L}$上，满足：

1° $A\in\mathscr{L}\Longleftrightarrow$存在$R^n$中的$F_\sigma$集$F$与$G_\delta$集$G$，使得$F\subset A\subset G$，$\mu(G\backslash F)=0$；$\mathscr{L}$包括所有Borel集；

2° 任给方体$C=\prod_1^n[a_i,b_i)$：$\mu C=\prod(b_i-a_i)$；

3° μ是平移不变的：$\mu(x+A)=\mu A$，$x\in R^n$，$A\in\mathscr{L}$.

上述的μ称为（n维）Lebesgue测度，而每个$A\in\mathscr{L}$称为（n维）Lebesgue可测集．在未加声明时，R^n中总采用Lebesgue测度．下面以μ或dx,dy等记n维Lebesgue测度，令$V(r)=\mu B(x,r)$，$B(x,r)=\{y\in R^n|\ |x-y|<r\}$．$R^n$上的积分论不同于一般LCH上的积分论的重要一点是，对于前者可建立Newton-Leibniz公式的某种推广，从而使Radon-Nikodym导数获得较直观的解释．

3.6.2 定义 设$f\in L^1_{loc}(R^n,E)$．称

$$A_rf(x)=\frac{1}{V(r)}\int_{B(x,r)}f(y)dy \tag{1}$$

为f在$B(x,r)$内的均值；称

$$(Mf)(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{V(r)}\int_{B(x,r)}|f(y)|dy\quad(x\in R^n) \tag{2}$$

为f的Hardy-Littewood极大函数．当

$$\lim_{r\to0}\frac{1}{V(r)}\int_{B(x,r)}|f(y)-f(x)|dy=0 \tag{3}$$

时，称x为f的Lebesgue点或简称L-点，其全体构成f的Lebesgue集，记作L_f．

若令$\theta_r=\chi_{B(0,r)}/V(r)$，则(1)可写成

$$A_rf(x)=\int f(y)\theta_r(x-y)dy,\quad x\in R^n. \tag{4}$$

(4)是一个"卷积"（参看§8.2），A_rf的许多性质可从§8.2、

§8.3的结果推出，本书将不再深论．L_f显然包括f的所有连续点．若$x\in L_f$，则(3)推出

$$\lim_{r\to 0} A_r f(x)=f(x). \tag{5}$$

粗言之，若$x\in L_f$，则$f(x)$是"积分$\int f(y)dy$在点x的导数"．因此可以说(5)正好与经典的Newton-Leibniz公式相当．本节的基本结果是：(5)几乎对所有$x\in \mathrm{R}^n$成立．这一结果基于极大函数的一个不等式，而证明后者又需要一条覆盖引理，该引理的作用颇类似于经典的Vitali覆盖定理．

3.6.3 覆盖引理 设可测集$A\subset \mathrm{R}^n$被R^n中一开球族$\mathscr{B}$覆盖．则对任给$c<\mu A$，可取出有限个互不相交的$B_i\in\mathscr{B}$，使得$c<3^n\sum\mu B_i$．

证 取紧集$K\subset A$：$\mu K>c$．取$\mathscr{B}$的有限子族$\mathscr{B}_1$覆盖K．在$\mathscr{B}_1$中取有最大半径的球B_1；若$\mathscr{B}_1$中有不交于B_1的球，则在这种球中取有最大半径的球B_2，…，这一过程必在有限步终止，设所得球为B_1，…，B_k．若$B\in\mathscr{B}_1\setminus\{B_1,\cdots,B_k\}$，则有最小的$i$ $(1\leqslant i\leqslant k)$：$B\cap B_i\neq\varnothing$，于是$B\subset B_i^*$，$B_i^*$记与$B_i$同心但半径扩大到3倍的球．因此

$$c<\mu K\leqslant\sum\mu B_i^*=3^n\sum\mu B_i. \quad \square$$

3.6.4 极大定理 设$f\in L^1(\mathrm{R}^n,E)$，则对任给$\beta>0$有：

$$\mu\{x\,|\,Mf(x)>\beta\}\leqslant\beta^{-1}3^n\|f\|_1. \tag{6}$$

注 Hardy与Littewood就$n=1$的情况证明了(6)(1930)；一般的情况是由N.Wiener证明的(1939).

证 令$M_\beta=\{x\,|\,Mf(x)>\beta\}$，只要证$\forall c<\mu M_\beta$：$c<\beta^{-1}3^n\|f\|_1$．$\forall x\in M_\beta$，$\exists r_x>0$：$(V(r_x))^{-1}\int_{B(x,r_x)}\|f(y)\|dy>\beta$．由3.6.3，存在有限个互不相交的球$B(x_i,r_{x_i})$：$c<3^n\sum V(r_{x_i})$．于是

$$c<3^n\sum_i \beta^{-1}\int_{B(x_i,\ r_{x_i})}\|f(y)\|dy\leqslant\beta^{-1}3^n\|f\|_1.$$ □

推论　若$f\in L^1$，则$Mf(x)$几乎处处有限.

3.6.5 **定理**　若$f\in L^1_{loc}(\mathrm{R}^n, E)$，则(3)与(5)都对几乎所有$x\in\mathrm{R}^n$成立.

证　不妨设$f\in L^1$. 任给$\varepsilon>0$，取$g\in C_c(\mathrm{R}^n, E)$：$\|f-g\|_1<\varepsilon$(3.5.2). 任给$\beta>0$，令

$$P_\beta=\{x\mid \overline{\lim_{r\to 0}}\|A_rf(x)-f(x)\|>\beta\};$$
$$Q_\beta=\{x\mid \|f(x)-g(x)\|>\beta\};$$
$$M_\beta=\{x\mid M(f-g)(x)>\beta\}.$$

显然$\mu Q_\beta<\beta^{-1}\varepsilon$；3.6.4推出$\mu M_\beta<\beta^{-1}3^n\varepsilon$. 由不等式

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{r\to 0}}\|A_rf(x)-f(x)\|\\ &\leqslant\overline{\lim_{r\to 0}}[\|A_rf(x)-A_rg(x)\|+\|A_rg(x)-g(x)\|\\ &+\|g(x)-f(x)\|]\leqslant M(f-g)(x)+\|g(x)-f(x)\|\end{aligned}$$

推出$P_{2\beta}\subset M_\beta\cup Q_\beta$，于是$\mu P_{2\beta}\leqslant(3^n+1)\beta^{-1}\varepsilon$. 由此得出$\forall\beta>0$：$\mu P_\beta=0$，这正表明(5)几乎处处成立.

其次，不妨设$f(\mathrm{R}^n)\subset\overline{\{a_i\}}$，$\{a_i\}\subset E$(参看3.2.2). 由已证结论，对几乎所有的$x\in\mathrm{R}^n$成立：

$$\|f(x)-a_i\|=\lim_{r\to 0}\frac{1}{V(r)}\int_{B(x,r)}\|f(y)-a_i\|dy,\ i=1,2,\cdots.$$

因此对几乎所有的$x\in\mathrm{R}^n$有：

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{r\to 0}}\frac{1}{V(r)}\int_{B(x,r)}\|f(y)-f(x)\|dy\\ &\leqslant\inf_i\left[\overline{\lim_{r\to 0}}\frac{1}{V(r)}\int_{B(x,r)}\|f(y)-a_i\|dy+\|f(x)-a_i\|\right]\\ &=\inf_i 2\|f(x)-a_i\|=0.\end{aligned}$$ □

若集族$\{B_r\}_{r>0}$满足：(i) $B_r\subset B(x,r)$； (ii) $\inf\limits_{r>0}\mu B_r/V(r)>0$，则说$\{B_r\}$缩于$x$．当$\{B_r\}$缩于$x\in L_f$时，显然

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\mu B_r}\int_{B_r}\|f(y)-f(x)\|dy=0. \tag{7}$$

于是从3.6.5推出：

推论 1 若$f\in L^1_{loc}(\mathrm{R}^n,E)$，则对几乎所有的$x\in\mathrm{R}^n$及任何缩于$x$的$\{B_r\}$有

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\mu B_r}\int_{B_r}f(y)dy=f(x). \tag{8}$$

将(8)用到$B_r=[x,x+r)$或$(x-r,x]$得到：

推论 2 若$f\in L^1_{loc}(\mathrm{R},E)$，则对几乎所有$x\in\mathrm{R}$有：

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt=f'(x). \tag{9}$$

现在利用3.6.5来给出Radon-Nikodym导数的解释．

3.6.6 定理 设$\nu\in M(\mathrm{R}^n)$，$\nu=\nu_a+\nu_s$是ν关于μ的Lebesgue分解(3.3.6)，集族$\{B_r\}$缩于$0\in\mathrm{R}^n$，则对几乎所有$x\in\mathrm{R}^n$：

$$\frac{d\nu_a}{d\mu}(x)=\lim_{r\to 0}\frac{\nu(x+B_r)}{\mu B_r}. \tag{10}$$

证 从(8)直接推出对几乎所有$x\in\mathrm{R}^n$有：

$$\frac{d\nu_a}{d\mu}(x)=\lim_{r\to 0}\frac{\nu_a(x+B_r)}{\mu B_r},$$

因此只需证对几乎所有$x\in\mathrm{R}^n$有

$$\lim_{r\to 0}\frac{\nu_s(x+B_r)}{\mu B_r}=0. \tag{11}$$

可设ν_s为正测度（否则代以$|\nu_s|$），且$B_r\doteq B(0,r)$．令

$$W_k=\left\{x\in B(0,k)\,\Big|\,\overline{\lim_{r\to 0}}\frac{\nu_s(x+B_r)}{V(r)}>\frac{1}{k}\right\},$$

只需证$\mu W_k=0$ ($k=1,2,\cdots$). 由3.3.6，存在$A\subset\mathrm{R}^n$: $v_s(A)=\mu A^c=0$. 任给$\varepsilon>0$，取开集$U\supset A$，$v_s(U)<\varepsilon$. 任给$x\in A\cap W_k$，取$r_x>0$，$B(x,r_x)\subset U$，$V(r_x)<kv_s(B(x,r_x))$. 因$\mu W_k-\varepsilon=\mu(A\cap W_k)-\varepsilon<\mu(A\cap W_k)$，由3.6.3，存在有限个互不相交的球$B_i=B(x_i,r_{x_i})$：

$$\mu W_k-\varepsilon<3^n\sum_i\mu B_i<k3^n v_s(\bigcup_i B_i)<k3^n\varepsilon,$$

这表明$\mu W_k=0$. □

参考文献：[21]，[65]，[73]，[74]，[75].

习　题

1. 任给$f\in L^p(\mathrm{R}^n,E)$ $(1\leqslant p<\infty)$：$\lim\limits_{r\to 0}\|A_rf-f\|_p=0$.

2. 任给$f\in C_c(\mathrm{R}^n,E)$：$A_rf\rightrightarrows f\ (r\to 0)$.

3. 设f是R^n上的复可测函数，则对任何$\varepsilon>0$，存在$g\in C(\mathrm{R}^n)$：$\mu\{x|f(x)\neq g(x)\}<\varepsilon$.

§7　囿变函数与Stieltjes积分

本节中设$I=[a,b]$，$-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$，$f:I\to E$，$g:I\to\mathrm{C}$. 当$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$时，说$P=\{x_i\}$是$I$的一个分划，且约定$\Delta f(x_i)=f(x_i)-f(x_{i-1})$，$V(f,P)=\sum_1^n\|\Delta f(x_i)\|$.

3.7.1 定义　称$\sup\limits_P V(f,P)$为f在I上的全变差，记作$V(f)$或$V_a^b(f)$，当$V(f)<\infty$时说f是囿变的. 若f右连续，$f(a)=0$且$V(f)<\infty$，则说f是正规囿变函数. 从I到E的[正规]囿变函数之全体记作BV或BV(I,E)[NBV或NBV(I,E)]. 若$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，对任一列互不相交的区间$(\alpha_i,\beta_i)\subset I$，$\sum(\beta_i-\alpha_i)<\delta\Rightarrow\sum\|f(\beta_i)-f(\alpha_i)\|<\varepsilon$，则说$f$在$I$上绝对连续. 若$\forall\varphi\in E'$，$\varphi\circ f$是囿变[绝对连续]的，则说$f$是弱囿变[弱绝对连续]的.

易见有限区间上的绝对连续函数是囿变的.

3.7.2 定理 设 $f\in \mathrm{BV}$, $\pi(x)=V_a^x(f)$. 则(i) $\|f(y)-f(x)\|\leqslant\pi(y)-\pi(x)(x<y)$; (ii) $\forall x\in I$: $f(x\pm0)=\lim\limits_{\delta\to\pm0}f(x+\delta)$存在(端点处只考虑$f(a+0),f(b-0)$); f至多有可数个间断点; (iii) $f(x)$ 与 $\pi(x)$ 有同样的连续点; $f\in\mathrm{NBV}\Rightarrow\pi\in\mathrm{NBV}$; (iv) 存在唯一的 $c\in E$, $h\in\mathrm{NBV}$, 对 f 的右连续点 x 有$f(x)=c+h(x)$且$V(h)\leqslant V(f)$.

证 不难直接验证$\pi(y)-\pi(x)=V_x^y(f)(x<y)$, 这就推出(i), 而由增函数$\pi$的性质得出(ii). 对于(iii)不妨只证$f(a+0)=f(a)\Rightarrow\pi(a+0)=\pi(a)$. 任给$\varepsilon>0$, 取 I 的分划$P=\{x_i\}$: $V(f,P)>\pi(b)-\varepsilon$, $\|\Delta f(x_1)\|<\varepsilon$, 于是

$$\pi(x_1)=\pi(b)-V_{x_1}^b(f)$$

$$<V(f,P)+\varepsilon-\sum\nolimits_2^n\|\Delta f(x_i)\|<2\varepsilon.$$

令$c=f(a+0)$, $h(x)=f(x+0)-c$, 约定$f(b+\delta)=f(b)$ $(\delta>0)$, 则对任给分划$\{x_i\}$有

$$\sum\|\Delta h(x_i)\|=\lim_{\delta\to+0}\sum\|f(x_i+\delta)-f(x_{i-1}+\delta)\|\leqslant V(f),$$

h 合于(iv)的要求. c 与 h 的唯一性是明显的. □

3.7.3 定理 $\sup\|\sum[f(\beta_i)-f(\alpha_i)]\|<\infty\Longleftrightarrow f$弱囿变, sup是对所有互不相交的区间$(\alpha_i,\beta_i)\subset I$的有限组取的.

证 设$M=\sup\|\sum[f(\beta_i)-f(\alpha_i)]\|<\infty$. 取定$\varphi\in E'$及 I 的分划$P=\{x_i\}$, 令$\lambda_i=\varphi(\Delta f(x_i))$, 则

$$\sum|\mathrm{Re}\lambda_i|\leqslant\Big|\sum_{\mathrm{Re}\lambda_i>0}\lambda_i\Big|+\Big|\sum_{\mathrm{Re}\lambda_i<0}\lambda_i\Big|\leqslant2M\|\varphi\|.$$

同理 $\sum|\mathrm{Im}\lambda_i|\leqslant2M\|\varphi\|$, 因此 $V(\varphi\circ f,P)\leqslant4M\|\varphi\|$, $\varphi\circ f\in\mathrm{BV}$.

逆命题直接由1.8.5推出. □

推论 f 弱囿变$\Rightarrow\exists\beta>0$, $\forall\varphi\in E'$: $V(\varphi\circ f)\leqslant\beta\|\varphi\|$.

3.7.4 定理 若$f\in L^1(I,E)$，则$F(x)=\int_a^x f(t)dt$（dt记Lebesgue测度）绝对连续且$F'\overset{\text{a.e.}}{=}f$. 若$I$有限，$\Phi: I\to E$绝对连续，$E$自反，则$\Phi(x)=\Phi(a)+\int_a^x \Phi'(t)dt\ (x\in I)$.

证 定理前一半直接从3.3.4及§6(9)推出. 对于后一半，不妨设$I=[0,1]$. 令$e_{ni}=\left[\frac{i-1}{m},\ \frac{i}{m}\right]$，$m=2^n$，

$$f_n=\sum_{i=1}^{m} m\left[\Phi\left(\frac{i}{m}\right)-\Phi\left(\frac{i-1}{m}\right)\right]\chi_{e_{ni}},\quad n=1,2,\cdots.$$

如Gelfand([29])证明的，$\Phi'(x)$几乎处处存在，于是$f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}\Phi'$（参考§2.1习题1）. 由Fatou定理，

$$\int_0^1\|\Phi'(x)\|dx\leqslant\varliminf_{n}\int_0^1\|f_n(x)\|dx\leqslant V(\Phi),$$

可见$\Phi'\in L^1$. 将通常的Nowton-Leibniz公式（例如参看[65]）用到每个$l\circ\Phi\ (l\in E')$，即得所要证. □

以下设I有限. 以$P=\{x_i,\xi_i\}$记I的分划

$$a=x_0\leqslant\xi_1\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant\xi_n\leqslant x_n=b, \tag{1}$$

令$|P|=\max(x_i-x_{i-1})$. 设$\mathscr{P}$是形如(1)的分划之全体，则$\mathscr{P}$依拟序"$P\leqslant P'\Longleftrightarrow |P|\geqslant|P'|$"是一有向集(1.1.2).

3.7.5 定义 设$P=\{x_i,\xi_i\}\in\mathscr{P}$，$\Delta f(x_i)=f(x_i)-f(x_{i-1})$，$\Delta g(x_i)$仿此，

$$S_P(f,g)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta g(x_i),\quad S_P(g,f)=\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta f(x_i). \tag{2}$$

称
$$\int_a^b fdg=\lim_P S_P(f,g),\quad \int_a^b gdf=\lim_P S_P(g,f)^{*} \tag{3}$$

为"函数偶"(f,g)与(g,f)的Riemann-Stieltjes积分或简称RS积分，只要(3)中的极限存在（参看1.1.5）. 当$g(x)=x$时，

称$\int_a^b f dg = \int_a^b f dx$为Riemann积分（参照§2.2(7)）.

若$a=\xi_0=x_0\leqslant\xi_1\leqslant\cdots\leqslant\xi_n\leqslant x_n=\xi_{n+1}=b$，则有恒等式：

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta g(x_i)+\sum_{i=1}^{n+1} g(x_{i-1})\Delta f(\xi_i)=fg\big|_a^b, \qquad (4)$$

其中$\Delta f(\xi_i)=f(\xi_i)-f(\xi_{i-1})$. (4)推出**分部积分公式**：

$$\int_a^b f dg = fg\big|_a^b - \int_a^b g df, \qquad (5)$$

只要其中两积分之一存在（另一个亦必存在）.

3.7.6 定理 若(i) f 连续，$g\in BV$，或(ii) f 弱囿变，g 连续，则(3)中两积分存在.

证 只需证$\{S_P(f,g)\}$或$\{S_P(g,f)\}$是Cauchy网(1.2.9).

设条件(i)满足. 任给$\varepsilon>0$，取$\delta>0$，使当$|\Delta x|<\delta$时$|\Delta f(x)|<\varepsilon$. 设$P=\{x_i,\xi_i\}$，$P'=\{y_j,\eta_j\}$，$|P|<\delta$，$|P'|<\delta$. 令$P''=\{z_k,\zeta_k\}$，$\{z_k\}=\{x_i\}\cup\{y_j\}$，$\zeta_k=z_k$，$\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$，$\Delta_k''$仿此. 则

$$\begin{aligned}&\|S_P(f,g)-S_{P''}(f,g)\|\\&=\Big\|\sum_i\sum_{\Delta_k''\subset\Delta_i}[f(\xi_i)-f(z_k)]\Delta g(z_k)\Big\|\\&\leqslant\sum_i\sum_{\Delta_k''\subset\Delta_i}\|f(\xi_i)-f(z_k)\|\,|\Delta g(z_k)|\leqslant\varepsilon V(g).\end{aligned}$$

同理$\|S_{P'}(f,g)-S_{P''}(f,g)\|\leqslant\varepsilon V(g)$，因此

$$\|S_P(f,g)-S_{P'}(f,g)\|\leqslant 2\varepsilon V(g). \qquad (6)$$

若条件(ii)满足，在(6)中以$(g,\varphi\circ f)$ $(\varphi\in E')$代(f,g)得：

$$|\varphi(S_P(g,f)-S_{P'}(g,f))|\leqslant 2\varepsilon V(\varphi\circ f)\leqslant 2\beta\varepsilon\|\varphi\|, \qquad (7)$$

β与φ无关（3.7.3之推论）. 从(7)推出

$$\|S_P(g,f)-S_{P'}(g,f)\|\leqslant 2\beta\varepsilon. \qquad \square$$

推论 若 f 连续或弱囿变，则Riemann积分$\int_a^b f dx$存在.

RS积分的基本性质可综述如下：

3.7.7 定理 (i) $\int_a^b f dg=\int_a^c f dg+\int_c^b f dg$，$a<c<b$，假定左边存在；(ii) f 连续，$g\in \mathrm{BV}\Rightarrow\left\|\int_a^b f dg\right\|\leqslant\|f\|_u V(g)$；(iii) f 连续或囿变，g 绝对连续$\Rightarrow\int_a^b f dg=\int_a^b f g' dx$．交换 f，g 的地位后上述结论保持正确，但对于(iii)应补充假定 E 是自反的．

3.7.7可从复值函数RS积分的相应性质及等式

$$\varphi\left(\int_a^b f dg\right)=\int_a^b(\varphi\circ f)dg \quad (\forall\varphi\in E') \tag{8}$$

推出．直接证明也不难．例如设 $f\in\mathrm{BV}$，g 绝对连续，则$\int_a^b f dg$ 与$\int_a^b f g' dx$皆存在，对任给分划$P=\{x_i\}$有

$$\left\|\sum_i f(x_i)\Delta g(x_i)-\int_a^b f g' dx\right\|$$

$$\leqslant\sum_i\int_{\Delta_i}\|f(x_i)-f(x)\|\,|g'(x)|\,dx\leqslant V(f)\max_i\int_{\Delta_i}|g'|\,dx,$$

其中$\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$．由此推出$\int_a^b f dg=\int_a^b f g' dx$．

显然$\|g\|=V(g)$是NBV上的范数．

3.7.8 定理 任给$\nu\in M(\mathrm{R})$，令$g_\nu(x)=\nu((-\infty,x])$，$g_\nu(\infty)=\nu(\mathrm{R})$，令 $G=\{g\in\mathrm{NBV}(\overline{\mathrm{R}},\mathrm{C})\mid g(\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)\}$．则 $M(\mathrm{R})\to G$，$\nu\longmapsto g_\nu$ 是一等距同构；$\nu\ll\mu\Longleftrightarrow g_\nu$绝对连续，$\mu$ 记 1 维Lebesgue测度．

证 设$\nu\in M(\mathrm{R})$．任给$\overline{\mathrm{R}}$的分划$\{x_i\}$，

$$\sum_i|\Delta g_\nu(x_i)|=\sum_i|\nu((x_{i-1},x_i])|\leqslant\|\nu\|,$$

这推出$V(g_\nu)\leqslant\|\nu\|$．若$x_n\to x+0$，$-\infty\leqslant x<\infty$，则

$$\lim_n g_\nu(x_n)=\nu\left(\bigcap_n(-\infty,x_n]\right)=g_\nu(x).$$

又$\lim\limits_{x\to\infty}g_\nu(x)=\nu(\mathrm{R}^n)$，可见 $g_\nu\in G$．若$\nu\ll\mu$，则直接从3.3.4推

出 g_ν 绝对连续．其次，给定$g\in G$，定义

$$L_g(\varphi)=\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}\varphi dg,\ \ \varphi\in C_0(\mathrm{R}), \tag{9}$$

则容易验证 $L_g\in(C_0(R))'$，$\|L_g\|\leqslant V(g)$．由 3.5.5，有 $\nu\in M(\mathrm{R})$：$L_g(\varphi)=\int\varphi d\nu(\varphi\in C_0(R))$，$\|\nu\|=\|L_g\|$．取定 $x\in\mathrm{R}$，作$\varphi_n\in C_0(\mathrm{R})$，使得$\mathrm{supp}\varphi_n\subset\left[-n-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}\right]$，$\varphi_n|[-n,\ x]=1$，$\varphi_n$在区间$\left(-n-\frac{1}{n},-n\right)$与$\left(x,x+\frac{1}{n}\right)$内是线性的．因依逐点收敛有 $\varphi_n\to\psi=\chi_{(-\infty,x]}(n\to\infty)$，故由控制收敛定理得出：

$$\left|\nu((-\infty,x])-\int\varphi_n d\nu\right|\leqslant\int|\psi-\varphi_n|\,d|\nu|\to0.$$

其次，利用 g 右连续及$g(-\infty)=0$得：

$$\int\varphi_n d\nu=\int_{-n-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}\varphi_n dg=-\int_{-n-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}g d\varphi_n$$

$$=-n\int_{-n-\frac{1}{n}}^{-n}g dt+n\int_{x}^{x+\frac{1}{n}}g dt\to g(x)\ \ (n\to\infty),$$

故有$\nu((-\infty,x])=g(x)$．类似可证$g_\nu(\infty)=g(\infty)$，故$g=g_\nu$．$\nu\longmapsto g_\nu$ 是等距同构．若g_ν绝对连续，令$dw=g_\nu' d\mu$，则$w\ll\mu$，当$x<y$时，

$$\nu((x,y])=g_\nu(y)-g_\nu(x)=\int_x^y g_\nu' d\mu=w((x,y]),$$

由此推出$w=\nu\ll\mu$． □

注 若 $\nu\in M(\mathrm{R})$，$g=g_\nu$，则从 Lebesgue 分解$\nu=\nu_a+\nu_s$（3.3.6）得出 g 的相应分解：$g=g_a+g_s$，其中 g_a 绝对连续，g_s 称为 g 的**奇异部分**，它满足 $g_s'\overset{\text{a.e.}}{=\!=}0$．

任给$\nu\in M(\mathrm{R})$，$g=g_\nu$，$f\in L^1(\mathrm{R},E,|\nu|)$，定义

$$\int f dg = \int f dv. \tag{10}$$

称(10)为 f 关于 g 的**Lebesgue-Stieltjes**积分或简称LS积分．今指明RS积分是LS积分的特款．为确定起见，设$f\in C(I, E)$，$g\in \mathrm{BV}(I, \mathrm{C})$，$I$ 有限．依3.7.2，考虑积分$\int_a^b f dg$时不妨设$g\in$ NBV．补充定义$f(x)=f(a)$，$g(x)=0$，$f(y)=f(b)$，$g(y)=g(b)(x<a, y>b)$，于是可设$g=g_v\in \mathrm{NBV}(\overline{\mathrm{R}}, \mathrm{C})$，$v\in M(\mathrm{R})$，$f\in L^1(\mathrm{R}, E, |v|)$．今指明

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f dv = \int_{\mathrm{R}} f dg. \tag{11}$$

因当 $x<y\leqslant a$ 或 $b\leqslant x<y$ 时 $v((x, y])=g(y)-g(x)=0$，故$\int f dv=\int_a^b f dv$，因此对(11)只需证前一个等号．任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta>0$，使当 $|\Delta x|<\delta$ 时，$\|\Delta f(x)\|<\varepsilon$．设$I$的分划$\{x_i\}$满足 $|x_i-x_{i-1}|<\delta$，令$\Delta_i=(x_{i-1}, x_i]\ (i>1)$，$\Delta_1=[a, x_1]$，则

$$\left\|\sum_i f(x_i)\Delta g(x_i)-\int_a^b f dv\right\|=\left\|\sum_i\int_{\Delta_i}[f(x_i)-f(x)]\,dv\right\|$$
$$\leqslant\sum_i\int_{\Delta_i}\|f(x_i)-f(x)\|d|v|\leqslant\varepsilon\|v\|,$$

由此推出(11)．

参考文献：[21]，[27]，[29]，[39]，[65]．

习　题

1．$f:[0,1]\longrightarrow L^\infty[0,1]$，$\xi\longmapsto\chi_{[0,\xi]}$是弱囿变而非囿变的．

2．若$f:[0,\infty)\to E$在每个有限区间$[0,b]$上绝对连续且$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)+f'(x)]=0$，则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$．

3．设f，$f_n\in C(I,E)$，$\sup_n\|f_n\|_\infty<\infty$，$f_n\xrightarrow{a.e.}f$(或$f_n\xrightarrow{\mu}f$)，$g$绝对连续．则

$$\int_a^b f_n dg\longrightarrow\int_a^b f dg.$$

第四章　解析函数

解析函数论是最和谐的数学理论之一，它的方法与结论已渗透到许多数学分支，且到处导致深刻的结果．各种领域的问题促成了解析函数概念到向量值函数的推广：矩阵分析与算子演算，微分方程的解析理论，Banach 代数理论，等等．本章给出这一推广的梗概及若干应用．

约定　本章中字母E表示复 B-空间；$D(a,r)=\{z\in C\mid |z-a|<r\}$，$\bar{D}(a,r)=\overline{D(a,r)}$ $(a\in C,\ r>0)$；任给某集S上的向量值函数f，令

$$\|f\|_S=\sup_S\|f(s)\|.$$

§1　单复变解析函数

本节中Ω与G分别记C 中的开集与开区域．

4.1.1 定义　称任一可微函数$f:\Omega\to E$为Ω内的(E-值)解析函数或全纯函数；从Ω到E的解析函数之全体记作$H(\Omega,E)$，令$H(\Omega)=H(\Omega,C)$，称C 上的解析函数为整函数．

向量值函数成为解析的条件形式上要弱些：

4.1.2 定理　给定函数$f:\Omega\to E$，则$f\in H(\Omega,E)\Longleftrightarrow\forall\varphi\in E'$：$\varphi\circ f\in H(\Omega)$．

证　显然$f\in H(\Omega,E)\Rightarrow\forall\varphi\in E'$：$\varphi\circ f\in H(\Omega)$．今证其逆．设$\forall\varphi\in E'$：$\varphi\circ f\in H(\Omega)$，$z_0\in\Omega$，要证

$$\lim_{z_1\to z_0,z_2\to z_0}\left[\frac{f(z_1)-f(z_0)}{z_1-z_0}-\frac{f(z_2)-f(z_0)}{z_2-z_0}\right]=0\tag{1}$$

(（1)将推出 $f'(z_0)$存在)．要(1)成立，只需

$$J(f,z_1,z_2)=\frac{1}{z_1-z_2}\left[\frac{f(z_1)-f(z_0)}{z_1-z_0}-\frac{f(z_2)-f(z_0)}{z_2-z_0}\right] \tag{2}$$

当 $|z_k-z_0|$ $(k=1,2)$ 充分小且z_0,z_1,z_2互异时有界．而这又等价于弱有界，因此只需对任给$g\in H(\Omega)$证 $J(g,z_1,z_2)$（其意义据(2)自明）有界．取 $D(z_0,3r)\subset\Omega$，令 $L=\{z|\ |z-z_0|=2r\}$．当 $0<|z_k-z_0|<r(k=1,2)$ 且 $z_1\neq z_2$时，由 Cauchy 公式有

$$g(z_k)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g(z)}{z-z_k}dz,\qquad k=0,1,2.$$

于是

$$|J(g,z_1,z_2)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{|g(z)|}{|(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)|}\ |dz|$$

$$\leqslant r^{-2}\|g\|_L.$$

□

设 $L:z=z(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 是 Ω 内一条连续可度曲线，这意味着 $z(t):[\alpha,\beta]\to\Omega$ 是连续囿变函数，其全变差就是L的长度 l．任给 $f\in C(\Omega,E)$，称 Stieltjes 积分

$$\int_L f(z)dz=\int_\alpha^\beta f(z(t))dz(t) \tag{3}$$

为f沿L的积分．由§3.7(8) 及 3.7.7 直接得出：

$$\varphi\left(\int_L f(z)dz\right)=\int_L\varphi(f(z))dz,\ \ \varphi\in E'; \tag{4}$$

$$\left\|\int_L f(z)dz\right\|\leqslant l\|f\|_L. \tag{5}$$

当L由有限条互不相交的连续可度曲线 L_j 组成时，自然规定

$$\int_L f(z)dz=\sum_j\int_{L_j}f(z)dz.$$

为行文简便，约定以下术语：称 L 是 Ω 中的围道，若它由 Ω 内的有限条互不相交的连续可度闭曲线组成，其中每条不自相交，L 构成 Ω 的一开子集 D 的边界，当沿 L 正向行进时，保持 D 在左边.

经典的 Cauchy 定理与 Cauchy 公式可推广于下：

4.1.3 定理 设 $f\in C(\Omega,E)$. 则 $f\in H(\Omega,E)\Longleftrightarrow$ 任给 Ω 内的围道 L：

$$\int_L f(z)dz=0;$$

当 $f\in H(\Omega,E)$ 时成立 Cauchy 公式：

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_L\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta,\quad z\in\Omega,\quad n\geqslant 0. \tag{6}$$

其中 L 是 Ω 内环绕 z 的任一围道.

证 定理的前一半由 4.1.2 及经典的 Cauchy 定理推出. 今设 $f\in H(\Omega,E)$，$f^{(n)}(z)(n\geqslant 1)$ 存在，则 $\forall\varphi\in E'$：$\varphi\circ f^{(n)}=(\varphi\circ f)^{(n)}\in H(\Omega)$. 由4.1.2，$f^{(n)}\in H(\Omega,E)$，从而 $f^{(n+1)}$ 存在，这就归纳地证明了 f 任意次可微. (6)由 $\varphi\circ f^{(n)}=(\varphi\circ f)^{(n)}$ $(\forall\varphi\in E')$ 及经典的 Cauchy 公式得出. □

4.1.4 定理 若 $f:\Omega=\{z\,|\,r<|z-a|<R\}\to E$ 解析，则 f 在 Ω 内可展开为 Laurent 级数：

$$f(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_n(z-a)^n,\quad z\in\Omega, \tag{7}$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta,\quad n\in\mathbf{Z}, \tag{8}$$

其中 $L_\rho=\{\zeta\,|\,|\zeta-a|=\rho\}$，$r<\rho<R$；若 f 在 $D(a,R)$ 内解析，则 f 在 $D(a,R)$ 内可展开为 Taylor 级数：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(z-a)^n,\quad z\in D(a,R). \tag{9}$$

任给 $\{c_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset E$，当 $R=\left(\overline{\lim_n}\sqrt[n]{\|c_n\|}\right)^{-1}>0$ 时，幂级数

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{10}$$

表示 $D(a,R)$ 内一解析函数，(10)即其 Taylor 级数.

证 令 $M(\rho)=\|f\|_{L\rho}$. 从(5)、(8)推出 Cauchy 不等式:

$$\|c_n\|\leqslant M(\rho)\rho^{-n},\ n\in\mathbf{Z},r<\rho<R. \tag{11}$$

取定 $z\in\Omega$，设 $r<\rho<|z-a|<\rho'<R$，则(11)推出:

$$\|c_n(z-a)^n\|\leqslant\begin{cases}M(\rho')(|z-a|/\rho')^n, & n\geqslant0;\\ M(\rho)(|z-a|/\rho)^n, & n<0,\end{cases}$$

可见(7)右端收敛，于是(7)从经典的 Laurent 展开式推出. 若 f 在 $D(a,R)$ 内解析，则在(11)中令 $\rho\to0$ 得 $c_n=0$，$-n=1,2,\cdots$,(7)变成 Taylor 展开式(9). 级数(10)的收敛性及 g 的解析性可由2.2.7推出. □

4.1.4表明，从 Ω 到 E 的解析函数就是§2.2中所述的 C^∞ 函数.

如同在经典理论中一样，Caúchy 公式(6)、Laurent展开式(7)及 Taylor 展开式(9)在向量值解析函数理论中起基本的作用. 这些公式表明，解析函数在其定义区域内各点的值受很强的内在联系制约，这就决定了解析函数的良好特性：关于一个解析函数的不多的信息往往蕴含极强的结论.

4.1.5 唯一性定理 设 $f\in H(G,E)$，若有 G 的无限紧子集 A：$f|A=0$，则 $f\equiv0$.

证 由经典的唯一性定理，$\forall\varphi\in E'$：$\varphi\circ f|A=0\Rightarrow\varphi\circ f\equiv0$，因此 $f\equiv0$. □

4.1.6 最大模原理 设 $f\in H(G,E)$，$a\in G$. (i)若 $\|f(a)\|=\|f\|_G$，则 $\|f(z)\|\equiv\|f(a)\|$；(ii)若 E 是 Hilbert 空间，$\|f(a)\|$ 是局部极大，则 $f(z)\equiv f(a)$.

证 (i)令 $A=\{z\in G|\,\|f(z)\|=\|f(a)\|\}$，则 A 是 G 的非空闭子集．今证 A 亦是开集，为此只需指明 $a\in A^\circ$．令 $L_r=\{z|\,|z-a|=r\}$，则 $r>0$ 充分小时，

$$\|f(a)\|=\frac{1}{2\pi}\left\|\int_{L_r}\frac{f(z)}{z-a}dz\right\|$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|f(a+re^{i\theta})\|d\theta\leqslant\|f(a)\|,$$

可见 $\forall z\in L_r$：$\|f(z)\|=\|f(a)\|$，故 $a\in A^\circ$．G 的连通性推出 $A=G$．

(ii) 由4.1.5，只需指明 z 邻近 a 时 $f(z)=f(a)$．设 L_r 同上，$f(z)=\sum_0^\infty c_k(z-a)^k$，则当 r 充分小时，

$$\|c_0\|^2=\|f(a)\|^2\geqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|f(a+re^{i\theta})\|^2d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{m,n\geqslant0}(c_m,c_n)r^{m+n}e^{i(m-n)\theta}d\theta$$

$$=\|c_0\|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\|c_n\|^2r^{2n},$$

这推出 $c_n=0(n=1,2,\cdots)$，因此 $f(z)=c_0=f(a)$． □

推论 1 若 $f\in H(G,E)\cap C(\bar G,E)$，$G$ 是有界区域，则 $\|f\|_G=\|f\|_{\partial G}$．若 $f:D(a,R)\to E$ 解析，$M(r)=\max\limits_{|z-a|=r}\|f(z)\|$，则 $M(r)$ 是 $[0,R)$ 上的增函数；当 E 为 Hilbert 空间且 f 非常值函数时，$M(r)$ 是严格增函数．

推论 2 (Schwarz引理) 设 $f:D(0,R)\to E$ 解析，$f(0)=0$，$M=\sup\limits_{|z|<R}\|f(z)\|$，则

$$\|f(z)\|\leqslant\frac{M}{R}|z|\ (|z|<R).$$

将推论1用到 $\varphi(z)=f(z)/z$，得 $\|\varphi(z)\|\leqslant M/r(|z|\leqslant r<R)$；令 $r\to R$ 即得推论2．由推论2又推出：

推论 3（Liouville 定理）有界整函数必取常值.

推论1中的等式$\|f\|_G=\|f\|_{\partial G}$可以推广于某些无界域上的解析函数，以下是一个典型例子.

4.1.7 定理（Doetsch）设 $G=\{x+iy|\ a<x<b,\ y\in\mathbb{R}\}$，$f\in H(G,E)\cap C(\bar{G},E)$，$\|f\|_G<\infty$，$M(x)=\sup\limits_{y\in\mathbb{R}}\|f(x+iy)\|$. 则

$$M(x)^{b-a}\leqslant M(a)^{b-x}M(b)^{x-a},\quad a\leqslant x\leqslant b. \tag{12}$$

特别，(12)推出 $\|f\|_G=\|f\|_{\partial G}$.

证 不妨设$a=0$，$b=1$（否则以$f(a+z(b-a))$代$f(z)$），$M(0)M(1)>0$（否则以小正数代替$M(0)$或$M(1)$证明(12)）；进而可设 $M(0)=M(1)=1$（否则以 $\varphi(z)=M(0)^{z-1}M(1)^{-z}f(z)$代$f(z)$）. 于是问题归于证$\|f(z)\|\leqslant 1(z\in G)$. 若 $\lim\limits_{G\ni z\to\infty}f(z)=0$，则将4.1.6之推论1用到一个充分"高"的矩形$[0,1]\times[-b,b]$上立得所要结论. 一般情况下，作函数 $f_\varepsilon(z)=f(z)(1+\varepsilon z)^{-1}(\varepsilon>0)$，显然 $\|f_\varepsilon(k+iy)\|\leqslant\|f(k+iy)\|\leqslant 1(k=0,1,y\in\mathbb{R})$，$\lim\limits_{G\ni z\to\infty}f_\varepsilon(z)=0$. 于是 $\forall z\in G$，$\|f(z)\|=\|(1+\varepsilon z)f_\varepsilon(z)\|\leqslant|1+\varepsilon z|\leqslant 1+\varepsilon|z|$，令$\varepsilon\to 0$，得$\|f(z)\|\leqslant 1(z\in G)$. □

注 (12)表明 $\ln M(x)$（从而$M(x)$）是凸函数.

关于解析函数零点与孤立奇点的基本用语可自然移用于向量值解析函数：设 $f(z)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}c_n(z-a)^n$ $(0<|z-a|<R)$，若$c_n\neq 0$，$n>0[n<0]$，$\forall k<n$：$c_k=0$，则称 a 为f的$|n|$阶零点[极点]；若$\forall k<0$：$c_k=0$，则称a为f的正则点；若a非正则点与极点，则称它为本性奇点. 若$z=0$是$f(z^{-1})$的正则点[零点，极点]，则称∞为$f(z)$的正则点[零点，极点].

参考文献：[22]，[39]，[42]，[64]，[65].

习　题

1. 若 $f\in H(\Omega,\ E)$，则 f 满足 Cauchy-Riemann方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)f=0$$

及 Laplace 方程

$$\Delta f=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f=0.$$

2. 设 $E=\overline{\{b_n\}}$，$a_n=b_n/\|b_n\|$，$f(z)=\sum_0^\infty a_n z^n$，$\{z_n\}\subset D(0,1)$ 是一紧无限集，则任给子列 $\{z_{n_k}\}$：$\{f(z_{n_k})\}$ 是E的基本集.

3. 设 f 在 $0<|z-a|<R$ 内解析，则a是f的正则点$\Longleftrightarrow$

$$\overline{\lim_{z\to a}}\|f(z)\|<\infty.$$

4. 设 $f(z)=\sum_0^n a_k z^k$，$\{a_k\}\subset E$，$a_n\neq 0$，则 f 至多 n 个零点.

§2　多复变解析函数

本节中Ω记$\mathbf{C}^n$中的开集. 写出$z\in\mathbf{C}^n$，总意味着$z=(z_1,\cdots,z_n)$，$z_j\in\mathbf{C}$. 任给 $a\in\mathbf{C}^n$，$r=(r_1,\cdots,r_n)$，$r_j>0$，称

$$P(a,r)=\{z\in\mathbf{C}^n|\ |z_j-a_j|<r_j,1\leqslant j\leqslant n\}\tag{1}$$

为以 a 为心的多圆柱，令$\bar{P}(a,r)=\overline{P(a,r)}$，$P(a,r)$的作用与单复变理论中的 $D(a,r)$相近. 参照§2.4(3)，记号 z^α，∂_z^α 及z^k ($\alpha\in\mathbf{N}^n$，$k\in\mathbf{Z}^n$) 的意义是自明的. 此外，为书写方便，约定 $e=(1,1,\cdots,1)\in\mathbf{Z}^n$.

4.2.1 定义　称任何可微函数 $f:\Omega\to E$ 为Ω内的(E-值)解析（或全纯）函数，其全体记作 $H(\Omega,E)$，令 $H(\Omega)=H(\Omega,\mathbf{C})$. 称每个 $f\in H(\mathbf{C}^n,E)$为整函数.

上节建立的 Cauchy 公式(6)、Taylor 展开式(9)及 Laurent 展开式(7)对多复变解析函数都有适当的推广.

4.2.2 定理　设 $f\in H(\Omega,E)$，$\bar{P}(a,r)\subset\Omega$，$\alpha\in\mathbf{N}^n$，则

$$\partial^\alpha f(z)=\frac{\alpha!}{(2\pi i)^n}\int_{L_1}\cdots\int_{L_n}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\alpha+e}}d\zeta, \tag{2}$$

其中 $z\in P(a,r)$, $L_j=\{\zeta_j\in\mathrm{C}|\ |\zeta_j-a_j|=r_j\}$, $d\zeta=d\zeta_1\cdots d\zeta_n$.

证 首先对 n 用归纳法建立:

$$\partial^0 f(z)=f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{f(\zeta_1,z_2,\cdots,z_n)}{\zeta_1-z_1}d\zeta_1$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{d\zeta_1}{\zeta_1-z_1}\cdot\frac{1}{(2\pi i)^{n-1}}$$

$$\int_{L_2}\cdots\int_{L_n}\frac{f(\zeta)}{(\zeta_2-z_2)\cdots(\zeta_n-z_n)}d\zeta_2\cdots d\zeta_n$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{L_1}\cdots\int_{L_n}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^e}d\zeta.$$

于是(2)可用对 $|\alpha|$ 的归纳法证明. □

推论 对(2)中的f, 令$M(r)=\sup\limits_{L_1\times\cdots\times L_n}\|f(z)\|$, 则

$$\|\partial^\alpha f(a)\|\leqslant\frac{\alpha!\,M(r)}{r^\alpha},\ \alpha\in\mathrm{N}^n. \tag{3}$$

4.2.3 定理 若 $f: P(a,r)\subset\mathrm{C}^n\to E$ 解析, 则 f 在$P(a,r)$内可展开为 Taylor 级数:

$$f(z)=\sum_{\alpha\in\mathrm{N}^n}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(a)(z-a)^\alpha. \tag{4}$$

反之, 若 $f(z)$ 可表为在$P(a,r)$ 内收敛的幂级数:

$$f(z)=\sum_{\alpha\in\mathrm{N}^n}c_\alpha(z-a)^\alpha,\ c_\alpha\in E, \tag{5}$$

则f 在$P(a,r)$ 内解析, 且(5)为其 Taylor 展开式.

证 取定 $z\in P(a,r)$, 设$|z_j-a_j|<\rho_j<r_j$, 令$L_j=\{\zeta_j\in\mathrm{C}|\ |\zeta_j-a_j|=\rho_j\}$, 则(4)由如下演算得出:

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{L_1}\cdots\int_{L_n}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^e}d\zeta$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{L_1}\cdots\int_{L_n}\prod_{j=1}^{n}\sum_{\alpha_j=0}^{\infty}\frac{(z_j-a_j)^{\alpha_j}}{(\zeta_j-a_j)^{\alpha_j+1}}f(\zeta)d\zeta$$

$$=\sum_{\alpha\in\mathrm{N}^n}\left[\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{L_1}\cdots\int_{L_n}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{\alpha+e}}d\zeta\right](z-a)^\alpha$$

$$=\sum_{\alpha\in\mathrm{N}^n}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(a)(z-a)^\alpha.$$

今考虑(5)．取$s,t\in P(0,r)$：$0<s_j<t_j<r_j(1\leqslant j\leqslant n)$．因$\sum c_\alpha t^\alpha$收敛，故$M=\sup_\alpha\|s_\alpha t^\alpha\|<\infty$．当$z\in P(a,s)$时，

$$\|c_\alpha(z-a)^\alpha\|\leqslant Ms^\alpha/t^\alpha,\quad \alpha\in\mathrm{N}^n. \tag{6}$$

因
$$M\left(1-\frac{x_1}{t_1}\right)^{-1}\cdots\left(1-\frac{x_n}{t_n}\right)^{-1}=\sum_{\alpha\in\mathrm{N}^n}\frac{Mx^\alpha}{t^\alpha} \tag{7}$$
$$(0\leqslant x_j\leqslant s_j)$$

可逐项微分任意次且微分后的级数绝对并一致收敛，利用(6)，比较(5)与(7)后看出，(5)逐项微分任意次后在$P(a,s)$内一致收敛．于是2.2.7推出f在$P(a,r)$内解析，且$\partial^\alpha f(a)=\alpha!c_\alpha$．

□

注　从4.2.3的证明看出，Taylor级数(4)本身及逐项微分任意次后在$P(a,r)$内紧一致收敛．

推广Laurent级数需用到圆环的一个高维拓广：称一区域$G\subset\mathrm{C}^n$为Reinhardt域，若$z\in G$，$\lambda\in\mathrm{C}^n$，$|\lambda_j|=1$恒推出$(\lambda_1z_1,\cdots,\lambda_nz_n)\in G$．球环$\{z\in\mathrm{C}^n|\ \rho<|z|<\rho'\}$及$P(0,r)\setminus\bar{P}(0,r')(0<\rho<\rho',\ 0<r_j'<r_j)$是Reinhardt域的典型例子．

4.2.4 定理　设$G\subset\mathrm{C}^n$是一Reinhardt域，$f\in H(G,E)$．则f在G内可唯一地展开成紧一致收敛的Laurent级数

$$f(z)=\sum_{k\in Z^n}c_k z^k.$$

证 设所述展开式存在．取$a\in G$，$a_j\neq 0$，则

$$a^{-k}(2\pi)^{-n}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi}f(a_1e^{i\theta_1},\cdots,a_ne^{i\theta_n})e^{-ik\cdot\theta}d\theta$$

$$=\sum_{l\in Z^n}(2\pi)^{-n}c_l\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi}e^{il\cdot\theta-ik\cdot\theta}d\theta=c_k, \qquad (8)$$

其中 $k\in Z^n$，$k\cdot\theta=\sum k_j\theta_j$．可见 c_k 由 f 唯一决定．

下面证展开式的存在性．任给 $\zeta\in G$，取充分小的 $\varepsilon>0$，使 $O(\zeta,\varepsilon)=\{z\in C^n\,|\,||z_j|-|\zeta_j||<\varepsilon,\ 1\leqslant j\leqslant n\}\subset G$．利用单复变解析函数的 Laurent 展开式进行迭代，可得 $f(z)$在$O(\zeta,\varepsilon)$内的一个 Laurent 展式：

$$f(z)=\sum_{k\in Z^n}c_k(\zeta)z^k,\quad z\in O(\zeta,\ \varepsilon),$$

它在$O(\zeta,\varepsilon)$内紧一致收敛．若$\zeta'\in O(\zeta,\varepsilon)$，$\sum c_k(\zeta')z^k$是$f$在$O(\zeta',\varepsilon)$内的 Laurent 展开，则已证的唯一性结论说明 $c_k(\zeta)=c_k(\zeta')$．可见 $c_k(\zeta)$ 局部取常值，从而 $c_k(\zeta)=c_k$ 与 ζ 无关．所得级数 $\sum c_kz^k$ 在 G 内紧一致收敛． □

Hartogs 证明了以下基本结果（例如参看[56]）：

4.2.5 定理 若 $f(z_1,\cdots,z_n):\Omega\to C$ 分别对各变元是解析的，则 $f\in H(\Omega)$．

4.1.2 与 4.2.5 有如下推广：

4.2.6 定理 任给$f:\Omega\to E$，以下条件互相等价：(i) $f\in H(\Omega,E)$；(ii) $f(z_1,\cdots,z_n)$ 分别对各变元解析；(iii) $\forall\varphi\in E'$，$\varphi\circ f\in H(\Omega)$．

证 显然(i)⇒(ii)；由 4.2.5 说明(ii)⇒(iii)．

现在假定(iii)．取定$z\in\Omega$，设 $P(z,r)\subset\Omega$．由 4.1.2，

$\partial_j f(z)$存在，$\partial_j=\partial/\partial z_j(1\leqslant j\leqslant n)$. 今证

$$\Delta f(z,h)-\sum_j\partial_j f(z)h_j=o(h),\ \ h\in P(0,r).$$

为此只要证：当$|h|$充分小时，

$$J(f,h)=|h|^{-2}[\Delta f(z,h)-\sum_j\partial_j f(z)h_j] \tag{9}$$

有界．如同4.1.2一样这只要对任给$g\in H(\Omega)$证$J(g,h)$有界．令$g(z+h)=\sum c_\alpha h^\alpha$，$h\in P(0,r)$，则(3)推出$|c_\alpha|\leqslant M/r^\alpha$，$M=\sup_{\zeta\in\overline{P}(z,r)}|g(\zeta)|$．令 $\rho=(\sum r_j^{-2})^{1/2}$，则当 $|h|<1/2\rho$ 时，

$$\begin{aligned}|J(g,h)|&=|h|^{-2}\Big|\sum_{|\alpha|\geqslant 2}c_\alpha h^\alpha\Big|\leqslant M|h|^{-2}\sum_{|\alpha|\geqslant 2}\frac{|h^\alpha|}{r^\alpha}\\&\leqslant M|h|^{-2}\sum_{m=2}^{\infty}\Big(\sum_j\frac{|h_j|}{r_j}\Big)^m\\&\leqslant M|h|^{-2}\sum_{m=2}^{\infty}(\rho|h|)^m=\frac{M\rho^2}{1-\rho|h|}<2M\rho^2.\end{aligned}$$ □

此外，4.1.5 与 4.1.6 对于多复变解析函数亦有相应的推广，但这些结果包含在更一般的4.3.4—4.3.6中，此处不去单独证明．综上所述，“多复变理论”似乎只是“单复变理论”的平凡推广．实际上，稍为深入就会发现二者有着深刻的差别．试看一典型例子．设4.2.4中的G有性质：$\forall j\in\{1,2,\cdots,n\}$，$\exists z\in G$：$z_j=0$（例如当$n>1$时球环$\rho<|z|<\rho'$就有此性质），则从(8)看出，当$k\in\mathbf{Z}^n$有某个$k_j<0$时必定$c_k=0$，从而$\sum c_k z^k$实际上是一幂级数．这就得到：

4.2.7 定理 若Reinhardt域$G\subset\mathbf{C}^n$有性质：$\forall j\in\{1,2,\cdots,n\}$，$\exists z\in G$，$z_j=0$，则每个$f\in H(G,E)$可延拓为$\tilde{G}=\{(\lambda_1 z_1,\cdots,\lambda_n z_n)|0\leqslant\lambda_j\leqslant 1,\ z\in G\}$上的解析函数；特别，$n>1$时$\rho<|z|<\rho'$内的解析函数可解析地延拓到球$|z|<\rho'$内．

由此又推出以下与单复变理论大相径庭的事实：

推论 设 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$，$n>1$，$f\in H(\Omega,E)$，则 f 没有孤立奇点；若 $f\in H(\Omega)$，则 f 没有孤立零点.

关于多复变解析函数的特殊的延拓性质，Hartogs 还证明了以下结果(这里已推广于向量值函数)：

4.2.8 定理 设 $P=P(0,r)\subset\mathbf{C}^n$，$n>1$，$V$ 是 ∂P 的一邻域，使得 $V\cap P$ 连通(这样的 V 显然存在)，$f\in H(V,E)$. 则 f 可延拓为 $P\cup V$ 上的解析函数.

证 取充分小的 $\varepsilon>0$，令 $s_j=r_j-\varepsilon$，使得 $G=P(0,r)\setminus\bar{P}(0,s)\subset V$. 显然 G 满足4.2.7之条件，因此 $f|G$ 可延拓为 $\tilde{G}=P$ 上的解析函数 g. g 在 $V\cap P$ 的非空开子集 G 内等于 f，而 $V\cap P$ 连通，因此 g 必在 $V\cap P$ 上等于 f (参看 4.3.4). 定义

$$F(z)=\begin{cases}f(z), & z\in V;\\ g(z), & z\in P,\end{cases}$$

则 $F(z)$ 是 f 在 $P\cup V$ 上的解析延拓. □

参考文献：[22]，[39]，[54]，[56].

习　题

1. $f:\Omega\subset\mathbf{C}^n\to E$ 解析 $\Longleftrightarrow f(x_1+iy_1,\cdots,x_n+iy_n)$ 作为 $(x_1,y_1,\cdots,x_n,y_n)$ 的函数可微且满足 $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}+i\dfrac{\partial f}{\partial y_j}=0\,(1\leqslant j\leqslant n)$；$f:\Omega\subset\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^m$，$(x_1+iy_1,\cdots,x_n+iy_n)\longmapsto(u_1+iv_1,\cdots,u_m+iv_m)$ 解析 $\Longleftrightarrow u_k$，$v_k\,(1\leqslant k\leqslant m)$ 是 $(x_1,y_1,\cdots,x_n,y_n)$ 的可微函数且

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_j}=\frac{\partial v_k}{\partial y_j},\quad\frac{\partial u_k}{\partial y_j}=-\frac{\partial v_k}{\partial x_j}.$$

2. C^∞ 函数 $f:\Omega\subset\mathbf{R}^n\to E$ 可扩张为 $\Omega+i\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 上的解析函数 $\Longleftrightarrow$ 任给紧集 $K\subset\Omega$，$\exists A>0$，$\forall\alpha\in\mathbf{N}^n$，$x\in K$：$\|\partial^\alpha f(x)\|\leqslant\alpha!A^{|\alpha|}$.

§3 从向量到向量的解析函数

本节设 E,F 是给定的复 B-空间，Ω 记 F 中的开集．“E，F 是复 B-空间”这一条件使得一个可微函数 $f:\Omega\subset F\to E$ 有称良好的性质，在若干方面颇类似于复变解析函数，因此我们也这种函数为(从向量到向量的)解析函数，且亦使用 $H(\Omega,E)$ 这类记号．这里的情况颇类似于从“可微的实变实函数”过渡到“可微的复变复函数”，定义的形式几乎没什么改变，而所定义的对象却差别极大．

推广§1的结果到一般解析函数的基本方法是引进“复参数”．给定 $f\in H(\Omega,E)$，$x\in\Omega$，$h\in F$，则 $\varphi(\lambda)=f(x+\lambda h)$ 是某个圆 $D(0,R)$ 内的 E-值解析函数，于是(依§1(9))有 Taylor 展开式：

$$f(x+\lambda h)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\delta^n f(x,h)\lambda^n,\quad |\lambda|<R,\tag{1}$$

其中
$$\delta^n f(x,h)=\frac{d^n}{d\lambda^n}f(x+\lambda h)\big|_{\lambda=0}\tag{2}$$

称为 f 在点 x 关于 h 的 **n 阶变分**．$\delta^n f(x,h)$ 关于 h 显然是 n 次齐次的：$\delta^n f(x,th)=t^n\delta^n f(x,h)$．当 $\|h\|$ 充分小时，可取 $R>1$，于是由(1)得出

$$f(x+h)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\delta^n f(x,h).\tag{3}$$

本节的主要结果是指明(3)是一个“真正的”Taylor展开式，这是通过阐明 $\delta^n f(x,h)$ 的性质作到的．

首先引进抽象的齐次多项式概念．任给对称的 n 重线性算子 $a:F\times\cdots\times F\to E$，令 $\hat{a}(x)=ax^n=a(x,\cdots,x)(x\in F)$，则 $\hat{a}$ 是 n 次齐次的：$\hat{a}(tx)=t^n\hat{a}(x)(t\in\mathbf{C},\ x\in F)$，称 $\hat{a}$ 为以 a 为

极形的 n 次齐次多项式，规定其"范数"为：

$$\|\hat{a}\|=\sup\{\|\hat{a}(x)\| \mid \|x\|\leqslant 1\} \tag{4}$$

4.3.1 引理 任给对称的 n 重线性算子 $a: F^n\to E$，$\|\hat{a}\|<\infty$ $\Longleftrightarrow$ $\|a\|=\sup\{\|ax_1\cdots x_n\| \mid \|x_j\|\leqslant 1, 1\leqslant j\leqslant n\}<\infty$，且

$$\|\hat{a}\|\leqslant\|a\|\leqslant(n^n/n!)\|\hat{a}\|. \tag{5}$$

a 由 $\hat{a}$ 唯一决定.

证 由 $\|\hat{a}(x)\|\leqslant\|a\|\,\|x\|^n$ 直接推出 $\|\hat{a}\|\leqslant\|a\|$. 其次，设 $\|x_j\|=1$，$x_j\in F\,(1\leqslant j\leqslant n)$，则从

$$\|n!\,2^n a x_1\cdots x_n\|=\Big\|\sum_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n=\pm 1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n\hat{a}(\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_nx_n)\Big\|$$

$$\leqslant 2^n\|\hat{a}\|n^n$$

推出 $\|a\|\leqslant(n^n/n!)\|\hat{a}\|$. $a\longmapsto\hat{a}$ 显然是一线性映射，$\hat{a}=0\Rightarrow\|\hat{a}\|=0\Rightarrow\|a\|=0\Rightarrow a=0$，可见 $\hat{a}$ 唯一决定 a. □

4.3.2 引理 若 $f:\Omega\subset F\to E$ 是 G-可微的(见2.1.1)，则 $\forall x\in\Omega$：$\delta f(x,h)$(§2.1(2))关于 h 是线性的.

证 取定 $x\in\Omega$，只需证 $\delta f(x,h)$ 对 h 是可加的. 任给 $h_1,h_2\in F$，从 4.2.6 推出，当 $|\lambda|$ 充分小时，$f(x+\lambda_1h_1+\lambda_2h_2)$是$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$ 的解析函数. 于是

$$f(x+\lambda_1h_1+\lambda_2h_2)-f(x)$$
$$=\lambda_1\delta f(x,h_1)+\lambda_2\delta f(x,h_2)+o(\lambda).$$

令 $\lambda_1=\lambda_2$，立得 $\delta f(x,h_1+h_2)=\delta f(x,h_1)+\delta f(x,h_2)$. □

现在已可证明本节的基本结果.

4.3.3 定理 若 $f\in H(\Omega,E)$，则 $f\in C^\infty$，即 $\forall x\in\Omega$，$\exists r_x>0$，当 $\|h\|<r_x$ 时有 Taylor 展开式：

$$f(x+h)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n. \tag{6}$$

证 给定 $x\in\Omega$，取 $\rho>0$，使得 $\bar{B}(x,\rho)\subset\Omega$，且

$M=\sup_{\|h\|\leqslant\rho}\|f(x+h)\|<\infty$. 任给 $h\in\bar{B}(0,\rho)$, 由(2)及§1(11)有

$$\|\delta^n f(x,h)\|=\left\|\frac{d^n}{d\lambda^n}f(x+\lambda h)\mid_{\lambda=0}\right\|$$

$$\leqslant n!\max_{|\lambda|=1}\|f(x+\lambda h)\|\leqslant n!M;$$

于是对任何$h\in F$有：

$$\|\delta^n f(x,h)\|=\left\|\left(\frac{\|h\|}{\rho}\right)^n\delta^n f\left(x,\frac{\rho h}{\|h\|}\right)\right\|$$

$$\leqslant n!M\rho^{-n}\|h\|^n. \tag{7}$$

令 $\delta_x^h f=\delta f(x,h)$; 归纳地定义

$$\delta^n f(x;h_1,\cdots,h_n)=\delta_x^{h_n}[\delta^{n-1}f(x;h_1,\cdots,h_{n-1})], \tag{8}$$

则可归纳地指明

$$\delta^n f(x;h_1,\cdots,h_n)$$

$$=\frac{\partial^n}{\partial\lambda_1\cdots\partial\lambda_n}f(x+\lambda_1h_1+\cdots+\lambda_nh_n)\mid_{\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0}. \tag{9}$$

由(8)及4.3.2, $\delta^n f(x;h_1,\cdots,h_n)$ 关于每个 $h_j(1\leqslant j\leqslant n)$是线性的; 由(9), $\delta^n f(x;h_1,\cdots,h_n)$ 关于 $(h_1,\cdots,h_n)$ 是对称的. 将 $\delta^n f(x;h_1,\cdots,h_n)$ 记作 $\varphi_n(x)h_1\cdots h_n$, 对固定的 x, $\varphi_n(x)$是一个对称的 n 重线性算子, 且不难看出 $\varphi_n(x)h^n=\delta^n f(x,h)$. 于是从(7)及 4.3.1 推出：

$$\|\varphi_n(x)\|\leqslant(n^n/n!)\cdot n!M\rho^{-n}=M(n/\rho)^n, \tag{10}$$

从而 $\varphi_n(x)\in L_s^n(F,E)(n\geqslant1)$, 记号见§1.6(5)).

由(3), 存在 $r_x>0$, 当 $\|h\|<r_x$ 时,

$$f(x+h)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\varphi_n(x)h^n, \tag{11}$$

其中已置 $f(x)=\varphi_0(x)h^0$. 定义

$$\psi_n(x):F\times\cdots\times F\to L(F,E),$$

$$(h_1, \cdots, h_n) \longmapsto (k \longmapsto \varphi_{n+1}(x) h_1 \cdots h_n k),$$

则 $\psi_n(x) \in L_s^n(F, L(F, E))$，且 $\|\psi_n(x)\| \leqslant \|\varphi_{n+1}(x)\| (n \geqslant 1)$. 其次约定 $\psi_0(x) = f'(x) = \varphi_1(x)$. (11) 右端对 h 逐项微分后得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \psi_n(x) h^n, \tag{12}$$

其中 $\psi_0(x) h^0 = f'(x)$. 今考察(12)的收敛性. 因由(10)有

$$\left\| \frac{1}{n!} \psi_n(x) h^n \right\| \leqslant \frac{M}{n!} \left(\frac{n+1}{\rho} \right)^{n+1} \|h\|^n,$$

而幂级数 $\sum_0^\infty (M/n!) [(n+1)/\rho]^{n+1} z^n$ 的收敛半径可直接算出为 ρ/e，故当 $\|h\| < \rho/3$ 时，(12) 绝对并(对 h)一致收敛. 令 $r'_x = \min\{r_x, \rho/3\}$，则当 $\|h\| < r'_x$ 时依 2.2.7之推论有：

$$f'(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \psi_n(x) h^n. \tag{13}$$

因 $\psi_1(x) \in L(F, L(F, E))$，而(13)推出

$$\|f'(x+h) - f'(x) - \psi_1(x) h\| = \left\| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \psi_n(x) h^n \right\|$$

$$\leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \frac{M}{n!} \left(\frac{n+1}{\rho} \right)^{n+1} \|h\|^n = o(\|h\|),$$

故得 $f''(x) = \psi_1(x)$. 这表明 f' 也是 Ω 内的解析函数，从而归纳地推出 $f \in C^\infty(\Omega, E)$. 因

$$\delta^n f(x, h) = \frac{d^n}{d\lambda^n} f(x + \lambda h) |_{\lambda=0} = f^{(n)}(x) h^n,$$

故从(3)得出 Taylor 展开式(6). □

现在来推广 4.1.5 与 4.1.6.

4.3.4 唯一性定理 设 $f \in H(G, E)$，$G \subset F$ 是一区域. 若 f 在某个球 $B(a, \rho) \subset G$ 内恒为零，则 $f = 0$.

证 令 $A = (G(f=0))^\circ$，则 A 是非空开集. 今证 A 亦是 G 的闭子集，即 $G \cap \bar{A} \subset A$. 任取 $b \in G \cap \bar{A}$，取球 $B(b, r) \subset G$，

$x\in B(b,r)\cap A$. 任给 $y\in B(b,r)$, 令 $\varphi(\lambda)=f(\lambda y+(1-\lambda)x)$, 则 $\varphi(\lambda)$ 是某个包含实区间$[0,1]$的平面区域内的E-值解析函数，它在$\lambda=0$的邻近恒为零. 于是4.1.5推出$f(y)=\varphi(1)=\varphi(0)=0$, 因此 $f|B(b,r)=0$, 从而 $b\in A$. 因 G 连通，故 $A=G$. □

4.3.5 最大模原理 设 $f\in H(G,E)$, $G\subset F$ 是一区域, $a\in G$. 若 $\|f(a)\|=\|f\|_G$[$\|f(a)\|$ 是局部极大, E 是一Hilbert 空间], 则 $\|f(x)\|=\|f(a)\|$ [$f(x)=f(a)$].

证 设 $\|f(a)\|=\|f\|_G$, 令$A=\{x\in G|\ \|f(x)\|=\|f(a)\|\}$. 如同证 4.1.6 一样，只需证 $a\in A^\circ$. 取 $B(a,r)\subset G$, 任给 $x\in B(a,r)$, 令 $\varphi(\lambda)=f(\lambda x+(1-\lambda)a)$, 则 $\varphi(\lambda)$是某个圆 $D(0,R)(R>1)$ 内的解析函数，它以$\|\varphi(0)\|$为"最大模". 于是4.1.6推出 $\|f(x)\|=\|\varphi(1)\|=\|\varphi(0)\|=\|f(a)\|$, 可见 $x\in A$, $a\in A^\circ$. 定理另一半结论的证明是类似的. □

4.3.6 Schwarz 引理 设 $f: B(0,R)\subset F\to E$ 是一解析函数, $f(0)=0$, $\|f(x)\|\leqslant M$, 则 $\|f(x)\|\leqslant(M/R)\|x\|(\|x\|<R)$.

证 取定 $x\in B(0,R)\setminus 0$, 令 $\varphi(\lambda)=f(\lambda x)$, 则 $\varphi(\lambda)$ 是圆$D(0,R/\|x\|)$内的解析函数, $\varphi(0)=0$. 于是由 4.1.6之推论 2 有 $\|f(x)\|=\|\varphi(1)\|\leqslant M(R/\|x\|)^{-1}=(M/R)\|x\|$. □

推论 (Liouville 定理) 若 $f: F\to E$ 解析且有界，则必定 $f(x)=\text{const}$.

参考文献: [2], [19], [39], [54], [56].

习 题

1. 若H是复 Hilbert 空间, 则 $f: H\to\mathbb{C}$, $x\longmapsto\|x\|$ 必不可微 (假定$\dim H>0$).
2. 设 $f\in H(\Omega,E)$, $\Omega\subset F$. f 在Ω的一无限聚子集上为零推不出 $f=0$.
3. 若 $f:\Omega\subset F\to E$处处G-可微且局部有界, 则 $f\in H(\Omega,E)$.

§ 4 收敛定理与正规族

设Ω是 $\mathbf{C}^n$ 或某个复B-空间F的非空开子集．对$H(\Omega, E)$中的序列考虑局部一致收敛（1.3.2）是可取的，这种收敛蕴含很强的结论．

4.4.1 定理 设序列$\{f_j\}\subset H(\Omega,E)$局部一致收敛于$f$．则$f$解析，且$\{f_j^{(k)}\}(k\geqslant 1)$在$\Omega$内局部一致收敛于$f^{(k)}$；若$\Omega\subset\mathbf{C}^n$，则$\{\partial^\alpha f_j\}(\alpha\in\mathbf{N}^n)$在$\Omega$内紧一致收敛于$\partial^\alpha f$．

证 只需证$\{f'_j\}$局部一致收敛(2.2.7)．任给球$B(a,3r)\subset\Omega$，$g\in H(\Omega,E)$，$x\in B(a,r)$，依§3(7)(取$n=1$)有：

$$\|g'(x)h\|=\|\delta g(x,h)\|\leqslant r^{-1}\|h\|\|g\|_{B(a,2r)},$$

因此

$$\|g'\|_{B(a,r)}\leqslant r^{-1}\|g\|_{B(a,2r)}. \tag{1}$$

特别，取$g=f_j-f_k(j,k\in\mathbf{N})$得出所要结论． □

推论 若$\Omega\subset\mathbf{C}^n$，则$H(\Omega,E)$依半范族$\{\|f\|_K \mid K\subset\Omega\text{紧}\}$是一$F$-空间（对空间$H(\Omega,E)$下面总作此理解），它是$\mathscr{E}(\Omega, E)$（认定$\Omega\subset\mathbf{R}^{2n}$）的闭子空间；微分算子$\partial^\alpha: H(\Omega,E)\to H(\Omega,E)$是连续线性算子．

4.4.2 定理 设$\Omega\subset\mathbf{C}^n$，$E$是Hilbert空间．则$H^2(\Omega,E)=H(\Omega,E)\cap L^2(\Omega,E)$作为$L^2(\Omega,E)$（参看§3.5）的子空间是一Hilbert空间，其中的序列收敛蕴含紧一致收敛．

证 取Cauchy列$\{f_j\}\subset H^2(\Omega,E)$，$P(a,2r)\subset\Omega$，今证

$$\|f_j(a)-f_k(a)\|\leqslant\|f_j-f_k\|_2/\pi^{n/2}r_1\cdots r_n. \tag{2}$$

这可代之以证$\|g\|_2^2\geqslant\pi^n(r_1\cdots r_n\|g(a)\|)^2$，$g\in H^2(\Omega,E)$．令$g(z)=\sum c_\alpha(z-a)^\alpha$，$z=x+iy\in P(a,2r)$，$dx$，$dy$是Lebesgue测度，则

$$\|g\|_2^2\geqslant\iint\limits_{P(a,r)}(g(z),g(z))dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\int_0^{r_1}\cdots\int_0^{r_n}\Big(\sum_\alpha c_\alpha\rho^\alpha e^{i\alpha\cdot\theta},$$

$$\sum_\beta c_\beta\rho^\beta e^{i\beta\cdot\theta}\Big)\rho_1\cdots\rho_n d\rho d\theta$$

$$=\sum_{\alpha,\beta}(c_\alpha,c_\beta)\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\int_0^{r_1}\cdots\int_0^{r_n}\rho^{\alpha+\beta}\rho_1$$

$$\cdots\rho_n e^{i(\alpha-\beta)\cdot\theta}d\rho d\theta$$

$$=(2\pi)^n\sum_\alpha\|c_\alpha\|^2 r_1^{2\alpha_1+2}\cdots r_n^{2\alpha_n+2}/(2\alpha_1+2)\cdots(2\alpha_n+2)$$

$$\geqslant\pi^n(r_1\cdots r_n\|g(a)\|)^2.$$

(2)推出$\{f_j\}$在Ω内紧一致收敛于某个$f\in H(\Omega,E)$．而由3.5.1，有$\{f_j\}$的子列$\{g_j\}$，$g_j\xrightarrow{a.e.}g\in L^2(\Omega,E)$，因此$g\overset{a.e.}{=\!=}f\in L^2(\Omega,E)$，定理结论由此得出． □

任给$A\subset H(\Omega,E)$，$K\subset\Omega$，约定$A(K)=\{f(x)\,|\,f\in A,\ x\in K\}$．若$\forall x\in\Omega$，存在$x$的邻域$V$，$A(V)\subset E$有界，则说$A$**局部一致有界**．设$\Omega\subset\mathbf{C}^n$，$A\subset H(\Omega,E)$相对紧，则称$A$为**正规族**，这意味着$A$中任何序列包含紧一致收敛子列（1.3.4）．显然正规族局部一致有界．寻求一解析函数族成为正规族的条件是解析函数论的基本课题之一，这方面已有大量经典结果，其中某些可推广于向量值解析函数．

4.4.3 引理 设$A\subset H(\Omega,E)$局部一致有界，$\Omega\subset\mathbf{C}^n$，则$A$在任何紧集$K\subset\Omega$上等度连续（参看1.3.5）．

证 利用(1)推出$\{f'\,|\,f\in A\}$亦在Ω内局部一致有界．设$L=K+\bar{B}(0,r)\subset\Omega$，$M=\sup_{f\in A}\|f'\|_L$．任给$\varepsilon>0$，令$\delta=\min\{r,\varepsilon/M\}$，则当$z,\zeta\in K$，$|z-\zeta|<\delta$时，对任给$f\in A$有

$$\|f(z)-f(\zeta)\|\leqslant M|z-\zeta|<\varepsilon.$$ □

4.4.4 定理 设$\Omega\subset\mathbf{C}^n$，$A\subset H(\Omega,E)$局部一致有界．则以下条件互相等价：(i) A是正规族；(ii) 任给紧集$K\subset\Omega$，$A(K)\subset E$相对紧；(iii) $\forall z\in\Omega$，$A(z)\subset E$相对紧．

证 设A是正规族，$K\subset\Omega$是紧集．由

$$\beta: H(\Omega,E)\times\Omega\to E,\ (f,z)\longmapsto f(z)$$

连续推出$A(K)=\beta(A\times K)$相对紧．显然(ii)⇒(iii)．今假定(iii)，任给序列$\{f_j\}\subset A$，紧集$K\subset\Omega$，结合4.4.3与1.3.5可得出$\{f_j\}$的子列在K上一致收敛．再用一次“对角线法”得出$\{f_j\}$的紧一致收敛子列． □

若$E=\mathbf{C}^m$，则4.4.4之条件(iii)自动满足，故有

推论 设$\Omega\subset\mathbf{C}^n$，则$A\subset H(\Omega,\mathbf{C}^m)$是正规族$\Longleftrightarrow A$局部一致有界；$H(\Omega,\mathbf{C}^m)$是 Montel 空间（参照 2.4.4）．

解析函数列的收敛性可由形式上弱得多的条件推出．

4.4.5 定理（Vitali） 设Ω连通，序列$\{f_j\}\subset H(\Omega,E)$局部一致有界且在集$A\subset\Omega$上每点收敛．则当以下条件之一满足时$\{f_j\}$在$\Omega$内紧一致收敛：(i)$A=\{z_k\}\subset\Omega\subset\mathbf{C}$，$z_k\to z_0\in\Omega$；(ii)$\Omega\subset\mathbf{C}^n$，$E=\mathbf{C}^m$，$A^\circ\neq\varnothing$．

证 首先假定(i)，不妨设$0\neq z_k\to 0$，$B=\bar{D}(0,1)\subset\Omega$，$\|f_j\|_B\leqslant 1$（否则预先作一简单代换）．令$f_j(z)=\sum_{m=0}^{\infty}c_{jm}z^m$ ($|z|\leqslant 1$)，则由 Cauchy 不等式推出$\|c_{jm}\|\leqslant 1(j\geqslant 1, m\geqslant 0)$．当$|z|<1/2$，$j\geqslant 1$时，$\|f_j(z)-c_{j0}\|\leqslant\sum_1^\infty|z|^m\leqslant 2|z|$．于是$|z_k|<1/2$时，

$$\begin{aligned}\|c_{j0}-c_{l0}\|&\leqslant\|c_{j0}-f_j(z_k)\|+\|f_j(z_k)-f_l(z_k)\|\\&\quad+\|f_l(z_k)-c_{l0}\|\leqslant 4|z_k|+\|f_j(z_k)-f_l(z_k)\|,\end{aligned}$$

由此推出$c_{j0}\to c_0\in E$．以$z^{-1}[f_j(z)-c_{j0}]$代替$f_j(z)(j=1,2,\cdots)$重复以上推理得$c_{j1}\to c_1\in E$．一般地，$c_{jm}\to c_m\in E$，$\|c_m\|\leqslant 1(m\geqslant 0)$．令$f(z)=\sum c_m z^m(|z|<1)$，则当$|z|\leqslant r<1$时，

$$\|f_j(z)-f(z)\|\leqslant\sum_{l\leqslant m}\|c_{jl}-c_l\|+2\sum_{l>m}r^l,$$

可见$\{f_j\}$在$|z|\leqslant r$内一致收敛于f．令$V=\{z\in\Omega\mid\{f_j\}$在$z$的某邻域内一致收敛$\}$，则以上所证表明$V$是$\Omega$的非空开闭于

集，因此$V=\Omega$.

其次假定(ii). 若定理结论不成立，则有紧集$K\subset\Omega$，序列$\{z_k\}\subset K$，$\{f_j\}$的子列$\{g_k\}$与$\{h_k\}$，$\varepsilon>0$：

$$|g_k(z_k)-h_k(z_k)|\geqslant\varepsilon,\quad k=1,2,\cdots.$$

不妨设$z_k\to z_0\in K$，在$H(\Omega,\mathbf{C}^m)$中$g_k\to g$，$h_k\to h$(4.4.4之推论)，于是$|g(z_0)-h(z_0)|\geqslant\varepsilon$. 另一方面，显然$g|A=h|A$，于是4.3.4推出$g=h$，得出矛盾. □

推论 1 设$\Omega\subset\mathbf{C}$是一区域，$A\subset H(\Omega,E)$局部一致有界. 若存在序列$\{z_k\}\subset\Omega$：$z_k\to z_0\in\Omega$，每个$A(z_k)$在E中相对紧，则A是正规族.

推论 2 设$\Omega\subset F$是一区域，序列$\{f_j\}\subset H(\Omega,E)$局部一致有界且在$A\subset\Omega$上每点收敛，$A^\circ\neq\varnothing$. 则存在$f\in H(\Omega,E)$，$\forall x\in\Omega$，$h\in F$，$k\geqslant0$：$f_j^{(k)}(x)h^k\to f^{(k)}(x)h^k\ (j\to\infty)$.

证 令$V=\{x\in\Omega\mid\{f_j\}$在$x$的某邻域内收敛$\}$. 若$a\in\Omega\cap\overline{V}$，$b\in V$邻近$a$，则对$\varphi_j(\lambda)=f_j(\lambda a+(1-\lambda)b)$应用4.4.5推出$a\in V$，故$V=\Omega$. 任给$x\in\Omega$，$h\in F$，对$\psi_j(\lambda)=f_j(x+\lambda h)$应用4.4.5，4.4.1及上节习题3得出所要证. □

参考文献：[39]，[42]，[54]，[56]，[65].

习 题

1. 若$A\subset H(\Omega,E)$ $(\Omega\subset\mathbf{C}^n)$是正规族，则$\{f'\mid f\in A\}$亦是.

2. 定义$f_n:D(0,1)\to l^2$，$z\longmapsto(z\delta_{nk})_{k=1}^{\infty}$，则$\{f_n\}$是一致有界且等度连续的解析函数族，但非正规族.

3. 设$\Omega=\{z=re^{i\theta}\mid 0<R<r<\infty,\ \alpha<\theta<\beta\}$，$f\in H(\Omega,E)$有界，对某个$\bar\theta$，$\lim\limits_{r\to\infty}f(re^{i\bar\theta})=a$. 则对任给$\varepsilon>0$，当$r\to\infty$时$f(re^{i\theta})$在$\alpha+\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\beta-\varepsilon$内一致收敛于$a$ (考虑$f_n(z)=f(nz)$).

§5 Banach 代数

以下将向量值解析函数理论应用于B-代数的研究. 自本节起至本章结束, A总记一个有单位元e的复B-代数, $\|e\|=1$, G记其可逆元之全体, 当$A=L(E)$时G写作$\mathrm{GL}(E)$, 令$\mathrm{GL}(n,\mathrm{C})=\mathrm{GL}(\mathrm{C}^n)$, $\mathrm{GL}(n)=\mathrm{GL}(\mathrm{R}^n)$.

4.5.1 定理 $\forall x\in G$; $B(x,\|x^{-1}\|^{-1})\subset G$, $B(e,1)\subset G$, 从而G是A中的开集; $i:G\to G$, $x\longmapsto x^{-1}$ 是一C^∞微分同胚.

证 取定$x\in G$, 当$h\in A$, $\|h\|<\|x^{-1}\|^{-1}$时, 级数$y=\sum_0^\infty x^{-1}(-hx^{-1})^n$ (约定$\forall a\in A$; $a^0=e$)绝对收敛. 直接计算表明$(x+h)y=y(x+h)=e$, 因此$x+h\in G$, 且

$$i(x+h)=(x+h)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{-1}(-hx^{-1})^n. \qquad (1)$$

因
$$\|\Delta i(x,h)+x^{-1}hx^{-1}\|\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\|x^{-1}\|^{n+1}\|h\|^n=o(\|h\|),$$

故
$$i'(x)h=-x^{-1}hx^{-1}=-i(x)hi(x). \qquad (2)$$

因$i'(x)$解析且以自身为逆, 故为C^∞微分同胚(4.3.3). □

注 不利用4.3.3, 直接由(2)可归纳地得出

$$i^{(n)}(x)h^n=(-1)^n n!x^{-1}(hx^{-1})^n,\ x\in G, \qquad (3)$$

从而$i\in C^\infty$. 这一证法可用于实B-代数. 注意公式(3)可与通常的微分公式$d^n(1/x)=(-1)^n n!dx^n/x^{n+1}$类比.

4.5.2 定理 设$\{a_n\}\subset A$, $R^{-1}=\overline{\lim_n}\sqrt[n]{\|a_n\|}<\infty$, 则$f(x)=\sum_0^\infty a_nx^n$是球$B(0,R)$内的解析函数, $\sum_0^\infty a_nx^n$即$f(x)$的Taylor级数, 它在任何球$B(0,r)(0<r<R)$内绝对并一致收敛, 但在任何球$B(0,\rho)(R<\rho)$内不能处处收敛.

证 关于收敛性的结论从与级数$\sum a_n(\lambda e)^n$比较看出, 后者在$|\lambda|\leqslant r\ (r<R)$内绝对收敛, $|\lambda|>R$时发散. 显然每项

$a_n x^n$ 是 x 的解析函数，于是 4.4.1 推出 $f(x)$ 在 $B(0,R)$ 内解析．任给 $x\in A$，

$$f^{(k)}(0)x^k=\frac{d^k}{d\lambda^k}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\lambda^n\right)\bigg|_{\lambda=0}=k!a_k x^k.$$

引入以下术语与记号：任给 $x\in A$，称 $\sigma(x)=\{\lambda\in\mathrm{C}\mid\lambda e-x\overline{\in}G\}$ 为 x 的谱，$\rho(x)=\mathrm{C}\setminus\sigma(x)$．由 4.5.1，$R(\lambda,x)=(\lambda e-x)^{-1}$ 是开集 $W=\{(\lambda,x)\mid\lambda e-x\in G\}$ 内的解析函数；若固定 $x\in A\,[\lambda\in\mathrm{C}]$，则 $R(\lambda,x)$ 是开集 $\rho(x)$ [开集 $S(\lambda)=\{x\mid(\lambda,x)\in W\}$] 内的解析函数．取定 $\lambda_0\in\rho(x)$，$x_0\in S(\lambda)$，将(1)分别用到 $R(\lambda,x)=\{[R(\lambda_0,x)]^{-1}+(\lambda-\lambda_0)e\}^{-1}$，$R(\lambda,x)=\lambda^{-1}(e-\lambda^{-1}x)^{-1}$ 及 $R(\lambda,x)=\{[R(\lambda,x_0)]^{-1}+(x_0-x)\}^{-1}$，得到以下展开式：

$$R(\lambda,x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}[R(\lambda_0,x)]^{n+1}(\lambda_0-\lambda)^n, & |\lambda-\lambda_0|^{-1}>\overline{\lim_n}\|[R(\lambda_0,x)]^n\|^{1/n};\\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}, & |\lambda|>\overline{\lim_n}\|x^n\|^{1/n};\\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}R(\lambda,x_0)[(x-x_0)R(\lambda,x_0)]^n, & \|x-x_0\|<\|R(\lambda,x_0)\|^{-1}.\end{cases}\quad(4)$$

4.5.3 定理 任给 $x\in A$，$\sigma(x)$ 是非空紧集；令 $r(x)=\sup\{|\lambda|\mid\lambda\in\sigma(x)\}$，则 $r(x)=\lim_n\sqrt[n]{\|x^n\|}$（称此数为 x 的谱半径）．

证 一个初等的论证可断定 $\lim_n\sqrt[n]{\|x^n\|}=\inf_n\sqrt[n]{\|x^n\|}=R$．(4)表明 $\sigma(x)\subset\overline{D}(0,R)$．$\sigma(x)\neq\varnothing$，否则 $R(\lambda,x)$ 是 λ 的整函数，Liouville 定理将推出 $R(\lambda,x)\equiv R(\infty,x)=0$；因此 $\sigma(x)$ 是非空紧集且 $r(x)\leqslant R$．因 $\sum_0^\infty x^n\lambda^{-n-1}$ 的收敛域之边界 $|\lambda|=R$ 必

通过$\sigma(x)$，故$R=r(x)$. □

推论 (Gelfand-Mazur) 若A是一个体（即$G=A\setminus 0$），则A等距同构于C.

事实上，任给$x\in A$，取$\lambda\in\sigma(x)$，则必$\lambda e-x=0$，因此$\mathbf{C}\to A$，$\lambda\longmapsto\lambda e$是一等距同构.

以下假定A是交换B-代数，以M记A的极大理想(1.5.8)之全体. $\chi(A)$记A上的非零复同态（亦称特征）之全体. 1.5.9之(iii)现在可加强于下：

4.5.4 定理 设$m\subset A$是一理想，则$m\in M\Longleftrightarrow A/m\cong\mathbf{C}\Longleftrightarrow\exists f\in\chi(A)$: $m=\mathrm{Ker}f$; $\chi(A)\to M$, $f\longmapsto\mathrm{Ker}f$是一双射.

证 若$m\in M$，则因$\bar{m}$亦为理想且$\bar{m}\subset A\setminus G$，必$m=\bar{m}$. 由1.5.5，$A/m$是$B$-代数，且不难验证其单位元有范数1；由1.5.9，A/m是域；由4.5.3之推论，$A/m\cong\mathbf{C}$. 其次假定φ: $A/m\cong\mathbf{C}$，p: $A\to A/m$是投影，则$f=\varphi\circ p\in\chi(A)$，$m=\mathrm{Ker}f$. 最后，若$f\in\chi(A)$，$m=\mathrm{Ker}f$，则1.5.6推出$A/m\cong\mathbf{C}$；由1.5.9，$m\in M$. 1.5.9也推出$A=m\oplus\mathbf{C}e$，于是$\forall x\in m$，$\lambda\in\mathbf{C}$：$f(x+\lambda e)=\lambda f(e)=\lambda$，可见$f$由$m$唯一决定，$\chi(A)\to M$，$f\longmapsto\mathrm{Ker}f$是一双射. □

基于4.5.4，今后将等同M与$\chi(A)$，并称之为A的谱（依Dieudonné)或结构空间，在一定程度上可将它与B-空间的对偶空间类比.

4.5.5 定义 任给$x\in A$，称$\hat{x}$: $\chi(A)\to\mathbf{C}$，$m\longmapsto m(x)$为x的Gelfand变式. $\hat{A}=\{\hat{x}|x\in A\}$依自然的运算成为一个代数，而$A\to\hat{A}$，$x\longmapsto\hat{x}$是一同态，称它为$A$的Gelfand表示，称它的核为$A$的根，记作$\mathrm{rad}(A)$；若$\mathrm{rad}(A)=0(\Longleftrightarrow A\cong\hat{A})$，则称$A$为半单代数.

结合谱概念得出以下深刻结论：

4.5.6 定理 (Gelfand) $\forall x\in A$: $\hat{x}(\mathcal{X}(A))=\sigma(x)$, 从而$\|\hat{x}\|_\infty=r(x)\leqslant\|x\|$; $\mathrm{rad}(A)=\bigcap\{m\mid m\in M\}$.

证 若$\lambda=m(x)$, $m\in M$, 则$m(\lambda e-x)=0$, 从而$\lambda e-x\in m$, 此必$\lambda\in\sigma(x)$. 反之, $\lambda\in\sigma(x)$推出$(\lambda e-x)A$是一真理想, 于是Zorn引理推出$\exists\, m\in M$: $(\lambda e-x)A\subset m$, 从而$\lambda e-x\in m$, $\lambda=m(x)$, $\hat{x}(\mathcal{X}(A))=\sigma(x)$得证. 其次, $x\in\mathrm{rad}(A)\Longleftrightarrow\hat{x}=0\Longleftrightarrow\forall\, m\in M$: $x\in m$. □

任给$m\in\mathcal{X}(A)$, $x\in A$, 由$|m(x)|\leqslant\|\hat{x}\|_\infty=r(x)\leqslant\|x\|$推出$\|m\|\leqslant1$($m$看作$A$上的线性泛函). 另一方面, 从$1=m(e)\leqslant\|m\|$推出$\|m\|=1$. 这就导致重要结论:

推论 $\mathcal{X}(A)$含于A的对偶A'的单位球面上.

以上结论有重大意义. 首先, 它表明A上任何复同态皆连续. 其次, 因A'中的单位闭球是弱紧的(1.8.4), 而$\mathcal{X}(A)$在A'中显然是弱闭的, 故$\mathcal{X}(A)$依A'中的弱拓扑(即按点收敛拓扑)是一紧T_2空间. 直接看出$\hat{A}\subset C(\mathcal{X}(A))$, 于是$A$的Gelfand表示是从$A$到$B$-代数$C(\mathcal{X}(A))$的连续同态, 连续性基于$\|\hat{x}\|_\infty\leqslant\|x\|(x\in A)$. 这样, 就在一定程度上将交换$B$-代数的研究归结为"标准的"$B$-代数$C(\Omega)$的研究.

4.5.7 定理 设Ω是一紧T_2空间, 则B-代数$C(\Omega)$以Ω为其结构空间, Gelfand表示即恒等映射.

证 任给$x\in\Omega$, 定义$\varepsilon_x(f)=f(x)(f\in C(\Omega))$, 则$\varepsilon_x\in M=\mathcal{X}(C(\Omega))$. 映射$\Omega\to M$, $x\longmapsto\varepsilon_x$显然是一连续单射. 任给$m\in M$, 必有$x\in\Omega$, $m=\varepsilon_x$. 否则, $\forall\, x\in\Omega$, $\exists f_x\in C(\Omega)$: $m(f_x)\neq f_x(x)$, 不妨设$m(f_x)=0$(否则以$f_x-m(f_x)$代f_x), 于是有x的邻域V_x, $\forall\, y\in V_x$: $f_x(y)\neq0$. 因此有Ω的有限开覆盖$\{V_i\}$及$\{f_i\}\subset C(\Omega)$, $m(f_i)=0\overline{\in}f_i(V_i)$. 令$f=\sum|f_i|^2$, 则$f>0$, 这与$m(f)=\sum m(f_i)m(\bar{f}_i)=0$矛盾. 这样, $\Omega\to M$, $x\longmapsto\varepsilon_x$为连续双射, 从而是同胚(1.3.3), 等同$x$与$\varepsilon_x$, 则等

式 $e_x(f)=f(x)$ 意味着 $\hat{f}=f$. □

若 A 是一个无单位元的交换 B-代数，则 A 可嵌入一有单位元 e 的 B-代数 $\tilde{A}=A\oplus\mathbf{C}e$ 中，其中 e 是任一不属于 A 的元，$\tilde{A}$ 中定义范数 $\|a+\lambda e\|=\|a\|+|\lambda|$ 及乘法 $(a+\lambda e)(b+\mu e)=(ab+\mu a+\lambda b)+\lambda\mu e(a,b\in A,\lambda,\mu\in\mathbf{C})$. 显然 A 是 $\tilde{A}$ 的闭子代数，每个 $m\in\mathcal{X}(A)$ 可自然地扩张为一个 $\tilde{m}\in\mathcal{X}(\tilde{A})$：$\tilde{m}(a+\lambda e)=m(a)+\lambda(a\in A,\lambda\in\mathbf{C})$. 反之，任给 $\tilde{m}\in\mathcal{X}(\tilde{A})$，令 $m=\tilde{m}|A$，则 $m\in\mathcal{X}(A)$，除非 $m=0$，在后一种情况下记 $\tilde{m}$ 为 m_∞. 于是可以认为 $\mathcal{X}(\tilde{A})=\mathcal{X}(A)\cup\{m_\infty\}$，从而由前面的结果不难得到：

4.5.8 定理 $\mathcal{X}(A)$ 作为 $\mathcal{X}(\tilde{A})$ 的子空间是一个 LCH (1.3.8)；$\forall x\in A$，$\hat{x}\in C_0(\mathcal{X}(A))$；$A\to C_0(\mathcal{X}(A))$，$x\longmapsto\hat{x}$ 是一个连续的代数同态.

显然，$\mathcal{X}(\tilde{A})$ 为 $\mathcal{X}(A)$ 的一点紧化(1.4.9).

参考文献：[22], [38], [39], [64], [85].

习 题

1. 设 E, F 是 B-空间，$G=\{a\in L(E,F)\mid a:E\cong F\}$，则 G 是 $L(E,F)$ 中的开集，$G\to L(F,E)$，$a\longmapsto a^{-1}$ 是 C^∞ 映射.

2. $\sigma(x)=\{0\}\Longleftrightarrow\forall\lambda\in\mathbf{C}$，$\lim\limits_n(\lambda x)^n=0$.

3. $A=H(D(0,1))\cap C(\bar{D}(0,1))$ 以 $\bar{D}(0,1)$ 为其结构空间.

4. 任给 $x,y\in A$，$\sigma(xy)\cup 0=\sigma(yx)\cup 0$，$xy-yx\neq e$.

§6 解析延拓

给定有单位元 e 的复 B-代数 A，认定 $\mathbf{C}$ 已嵌入(通过 $\lambda\longmapsto\lambda e$) A 中. 表示通常解析函数的那些解析工具(如 Taylor 级数与 Cauchy 积分)，可用来在代数 A 中自然地拓广解析函

数概念.

以下以Ω记C的开子集. 任给$f\in H(\Omega)$, 当$D(\lambda_0,\rho)\subset\Omega$时, 幂级数$f(\lambda)=\sum_0^\infty \frac{1}{n!}f^{(n)}(\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)^n$自然地过渡到球$B(\lambda_0 e,\rho)\subset A$内的解析函数(4.5.2)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(\lambda_0)(x-\lambda_0 e)^n, \qquad (1)$$

它满足$f(\lambda e)=f(\lambda)e(\lambda\in D(\lambda_0,\rho))$. 若$B(\lambda_k e,\rho_k)(k=1,2)$相交, 则有$D(\lambda_0,\rho_0)\subset D(\lambda_1,\rho_1)\cap D(\lambda_2,\rho_2)$, $\rho_0>0$. 不难证明, 函数$\sum_0^\infty\frac{1}{n!}f^{(n)}(\lambda_k)(x-\lambda_k e)^n(k=1,2)$在球$B(\lambda_0 e,\rho_0)$内一致, 从而必在$B(\lambda_1 e,\rho_1)\cap B(\lambda_2 e,\rho_2)$内一致(4.3.4). 这样, 借助于形如(1)的表达式可将$f(\lambda)$一意地延拓为开集

$$D_\Omega=\bigcup\{B(\lambda_0 e,\rho)\,|\,D(\lambda_0,\rho)\subset\Omega\} \qquad (2)$$

内的解析函数$f(x)$, 称它为$f(\lambda)$的主延拓.

Cauchy 积分是推广解析函数的一个更有效的工具. 设$f\in H(\Omega)$, $x\in A$, $\sigma(x)\subset\Omega$. 在Ω内取一条包围$\sigma(x)$的围道L(回忆§1中的约定!), 则积分

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_L f(\lambda)(\lambda e-x)^{-1}d\lambda \qquad (3)$$

存在且不依赖于L的选择. (3)定义出集

$$A_\Omega=\{x\in A\,|\,\sigma(x)\subset\Omega\} \qquad (4)$$

上的函数$f(x)$, $f(x)$显然亦满足$f(\lambda e)=f(\lambda)e(\lambda\in\Omega)$. 如此作成的延拓$f(x)$具有一系列良好的性质.

4.6.1 定理 A_Ω是A的开子集; 任给$f\in H(\Omega)$, 由(3)定义的$f(x)$是A_Ω内的解析函数; $D_\Omega\subset A_\Omega$, 且当$x\in D_\Omega$时(1)与(3)一致; 对应$f(\lambda)\longmapsto f(x)(f(\lambda)\in H(\Omega))$是一代数同构, 且保持函数列的局部一致收敛性.

证 任给 $a\in A_\Omega$，取有界开集 Ω_1：$\sigma(a)\Subset\Omega_1\Subset\Omega$. 设 $\|R(\lambda,a)\|$ 在 Ω_1^c 上以 ρ^{-1} 为上界，则当 $\|h\|<\rho$，$\lambda\in\Omega_1^c$ 时，$\lambda e-a-h=(\lambda e-a)\,[e-R(\lambda,a)h]\in G(4.5.1)$，可见 $\sigma(a+h)\subset\Omega_1$，$a+h\in A_\Omega$. 这表明 A_Ω 是开集. 在 Ω 内取包围 $\bar{\Omega}_1$ 的围道 L. 设 $f(\lambda)\in H(\Omega)$，$x\in B(a,\rho)$，则

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_L f(\lambda)R(\lambda,x)d\lambda.$$

于是 3.2.6 推出 $f(x)$ 在 $B(a,\rho)$ 内解析，从而 $f(x)$ 在 A_Ω 内解析.

设 $\bar{D}(\lambda_0,\rho)\subset\Omega$，$L=\{\lambda\mid|\lambda-\lambda_0|=\rho\}$. 任给 $x\in B(\lambda_0e,\rho)$，由 $r(x-\lambda_0e)\leqslant\|x-\lambda_0e\|<\rho$ 推出 $\sigma(x)=\lambda_0+\sigma(x-\lambda_0e)\subset D(\lambda_0,\rho)$，且

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L f(\lambda)R(\lambda,x)d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_L f(\lambda)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-\lambda_0e)^n}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}}d\lambda$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}}d\lambda\right](x-\lambda_0e)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(\lambda_0)(x-\lambda_0e)^n.$$

可见 $D_\Omega\subset A_\Omega$，且在 D_Ω 内(1)与(3)一致.

要说明 $f(\lambda)\longmapsto f(x)$ 是一代数同构，只需指明：当 $f,g\in H(\Omega)$ 时，$f(\lambda)g(\lambda)\longmapsto f(x)g(x)$. 任给 $x\in A_\Omega$，设

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_L f(\lambda)R(\lambda,x)d\lambda;$$

$$g(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(\tau)R(\tau,x)d\tau,$$

不妨设 Γ 含于 L 所围之区域. 于是

$$f(x)g(x)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_L f(\lambda)d\lambda\int_\Gamma g(\tau)R(\lambda,x)R(\tau,x)d\tau$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_L f(\lambda)d\lambda\int_\Gamma g(\tau)\frac{R(\lambda,x)-R(\tau,x)}{\tau-\lambda}d\tau$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_L f(\lambda)R(\lambda,x)d\lambda\int_\Gamma\frac{g(\tau)}{\tau-\lambda}d\tau$$

$$+\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma g(\tau)R(\tau,x)d\tau\int_L\frac{f(\lambda)}{\lambda-\tau}d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\tau)g(\tau)R(\tau,x)d\tau=(f\cdot g)(x).$$

设 $\{f_n(\lambda)\}\subset H(\Omega)$局部一致收敛于0，$B(a,\rho)$与$L$如证明之第一段，$l$ 是 L 之长．则当 $x\in B(a,\rho)$ 时，

$$\|f_n(x)\|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_L|f_n(\lambda)|\,\|R(\lambda,x)\|\,|d\lambda|$$

$$\leqslant\frac{l}{2\pi}\|f_n\|_L\cdot\sup_{L\times B(a,\rho)}\|R(\lambda,x)\|,$$

只要 ρ 充分小，$\{f_n(x)\}$ 就在 $B(a,\rho)$内一致收敛于0． □

4.6.2 谱映射定理(Gelfand 1941) 设 $f(\lambda)\in H(\Omega)$，$x\in A_\Omega$，则 $\sigma(f(x))=f(\sigma(x))$．

证 若 $\mu\in\mathbb{C}\backslash f(\sigma(x))$，则有$\sigma(x)$的开邻域$U$，$\mu\overline{\in}f(U)$．于是 $g(\lambda)=\mu-f(\lambda)$ 与 $1/g(\lambda)$都属于$H(U)$，从而$\mu e-f(x)\in G$，$\mu\overline{\in}\sigma(f(x))$．其次设$a\in\mathbb{C},f(a)\overline{\in}\sigma(f(x))$．因$\varphi(\lambda)=[f(\lambda)-f(a)]/(\lambda-a)$属于$H(\Omega)$，故 $\varphi(x)(ae-x)=(ae-x)\varphi(x)=f(a)e-f(x)\in G$，由此推出 $ae-x\in G$，从而$a\overline{\in}\sigma(x)$． □

4.6.3 定理(Dunford, 1943) 设 $f(\lambda)\in H(\Omega)$，$g(\lambda)\in H(\Omega')$，$f(\Omega)\subset\Omega'$．则对任给 $x\in A_\Omega$：$f(x)\in A_{\Omega'}$，且 $g(f(x))=(g\circ f)(x)$．

证 若 $x\in A_\Omega$，则 $\sigma(f(x))=f(\sigma(x))\subset\Omega'$，故 $f(x)\in A_{\Omega'}$. 取有界开集 U，$\sigma(x)\subset U\Subset\Omega$；在 U 内取包围 $\sigma(x)$ 的围道 L，在 Ω' 内取包围 $f(U)$ 的围道 Γ，则

$$
\begin{aligned}
g(f(x)) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(\tau)R(\tau,f(x))d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(\tau)d\tau\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{R(\lambda,x)}{\tau-f(\lambda)}d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_L R(\lambda,x)d\lambda\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{g(\tau)}{\tau-f(\lambda)}d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_L g(f(\lambda))R(\lambda,x)d\lambda=(g\circ f)(x). \qquad \square
\end{aligned}
$$

综上所述，解析延拓 $f(\lambda)\longmapsto f(x)$ "保持"代数运算与复合. 这样，写出一个通常的解析函数恒等式，例如 $\cos 2\lambda=e^\lambda e^{-\lambda}-2\sin^2\lambda\,(\lambda\in\mathrm{C})$，就必定有相应的恒等式 $\cos 2x=\exp x\cdot\exp(-x)-2\sin^2 x\,(x\in A)$，自然，$\exp x=\sum_0^\infty x^n/n!$；若 $\ln x$ 可定义(例如，若0，∞属 $\rho(x)$ 的同一分支，则可取包含 $\sigma(x)$ 的开集Ω，在Ω内可考虑 $\ln\lambda$ 的一单值支)，则必有 $\exp(\ln x)=x$，等等.

任给 $f(\lambda)\in H(\Omega)$，$n\geq 1$，将 $f^{(n)}(\lambda)$ 在 A_Ω 内的延拓记作 $\tilde{f}^{(n)}(x)$. 当然，一般不能说 $\tilde{f}^{(n)}(x)$ 是 $f(x)$ 的 n 阶导数. 不过在某些情况下 $\tilde{f}^{(n)}(x)$ 有类似于 $f^{(n)}(x)$ 的作用.

4.6.4 定理 若 A 是交换 B-代数，$f(\lambda)\in H(\Omega)$，$x\in A_\Omega$，则当 $\|h\|$ 充分小时有展开式：

$$
f(x+h)=\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}\tilde{f}^{(n)}(x)h^n. \tag{5}
$$

证 取包围 $\sigma(x)$ 的围道 $L\subset\Omega$，当 $\|h\|$ 充分小时，

$$f(x+h)=\frac{1}{2\pi i}\int_L f(\lambda)R(\lambda,x+h)d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L \sum_{n=0}^{\infty} f(\lambda)[R(\lambda,x)]^{n+1}h^n d\lambda$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L f(\lambda)[R(\lambda,x)]^{n+1}d\lambda\right\}h^n$$

$$(\text{分部积分})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L f^{(n)}(\lambda)R(\lambda,x)d\lambda\right]h^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\tilde{f}^{(n)}(x)h^n.$$ □

4.6.5 开映射定理 设 A 是交换 B-代数，$f(\lambda)\in H(\Omega)$，$x\in A_\Omega$，$f'(\lambda)$ 在 $\sigma(x)$ 上无零点．则 $f(x)$ 将 x 的某一开邻域 U 微分同胚地映到 A 的一开子集上．

证 取开集 Ω'：$\sigma(x)\subset\Omega'\subset\Omega$，$f'(\lambda)$ 在 Ω' 内无零点．由此易见 $\tilde{f}'(x)\in G$，从而 $f'(x):h\longmapsto\tilde{f}'(x)h$ 是一同构，于是所要结论从反函数定理 (2.5.2) 推出． □

最后考虑对谱分解问题的一个应用．

4.6.6 定理 设 $a\in A$，$\sigma(a)=\bigcup_1^n\sigma_k$，$n\geqslant 2$，$\sigma_k$ 是 $\sigma(a)$ 的互不相交的开闭子集．则存在 $\{j_k\}\subset A$，使得：(i) $j_kj_l=\delta_{kl}j_k$；(ii) $a=\sum a_k$，$a_k=aj_k=j_ka$；(iii) $\sigma(a_k)=\sigma_k\cup\{0\}$，$k=1,2,\cdots,n$．

证 取 σ_k 的互不相交的开邻域 Ω_k，使 $L_k=\partial\Omega_k$ 是互不相交的围道．令 $\Omega=\bigcup\Omega_k$，$f_k=\chi_{\Omega_k}$，则 $f_k\in H(\Omega)$，$j_k=f_k(a)$ 有意义．从 $f_kf_l=\delta_{kl}f_k$，$\lambda f_k(\lambda)=f_k(\lambda)\lambda$，$\lambda=\sum\lambda f_k(\lambda)$ 推出 (i)(ii)．由 4.6.2，$\sigma(a_k)=\{\lambda f_k(\lambda)\mid\lambda\in\sigma(a)\}=\sigma_k\cup\{0\}$． □

若将 4.6.6 用到 B-代数 $L(E)$ 及 $T\in L(E)$，则当 $\sigma(T)=\bigcup\sigma_k$，$\sigma_k$ 合于 4.6.6 的条件时，得出以下结论：

1° 存在 $\{P_k\}\subset L(E)$：$P_kP_l=\delta_{kl}P_k$，$P_k^2=P_k$（P_k是投影算子）；$T_k=P_kT=TP_k$；$\sigma(T_k)=\sigma_k\cup\{0\}$．

2° $\sum P_k=I$；$\sum T_k=T$．

3° 令 $E_k=T_k(E)$，则 E_k 是 T 的"不变子空间"：

$$T(E_k)=TT_k(E)=TP_kT(E)\subset TP_k(E)=E_k.$$

4° $T(E)=\bigoplus E_k$：$T(E)=\sum T_k(E)=\sum E_k$；若$\sum T_kx_k=0$，$x_k\in E$，则 $T_kx_k=\sum\limits_l P_kP_lTx_l=P_k(\sum\limits_l T_lx_l)=0$，$\sum E_k$ 是直和．

参考文献：[22]，[38]，[39]，[64]，[85]．

习　题

1．若 $f(\lambda)=\lambda$，则 $f(x)=x$；若 $f(\lambda)\in H(\Omega)$是一单射，则$f(x)$：$A_\Omega\to A_{f(\Omega)}$ 是一微分同胚。

2．设 $f(\lambda)\in H(\Omega)$，$x\in A_\Omega$．则$f(x)\in G\Longleftrightarrow 0\notin f(\sigma(x))$；$f(x)=0\Rightarrow\sigma(x)\subset\{\lambda\,|\,f(\lambda)=0\}$；$x^2=x\Rightarrow\sigma(x)\subset\{0,1\}$．

3．设 $f(\lambda)\in H(\Omega)$，$T\in L(E)$，$\sigma(T)\subset\Omega$，$Tx=\lambda x$，则 $f(T)x=f(\lambda)x$．

§7 (*) 代　数

4.7.1 定义 若复B-代数 A 上定义了一对合：$A\to A$，$x\longmapsto x^*$，使得 $x^{**}=x$，$(\alpha x+\beta y)^*=\bar\alpha x^*+\bar\beta y^*$，$(xy)^*=y^*x^*$($x$，$y\in A$，$\alpha,\beta\in\mathbb{C}$)，则称 A 为(*)代数；若 A 还满足$\|x\|^2=\|xx^*\|$ ($x\in A$)，则称 A 为(B^*) 代数．(*) 子代数、(*) 代数同态［同构］这类术语的意义是自明的．若 $xx^*=x^*x$［$x=x^*$或 $xx^*=x^*x=e$］，则称 x 为正规元［自伴元或酉元］．

以下设A是给定的有单位元 e 的(B^*)代数．易见$e^*=e$；从$\|x\|^2=\|xx^*\|$直接推出 $\|x\|=\|x^*\|$．若 $x\in G$，则必 $x^*\in G$且$(x^*)^{-1}=(x^{-1})^*$．任给 $x\in A$，从 $(\lambda e-x)^*=\bar\lambda e-x^*$ 推出 $\sigma(x^*)=\overline{\sigma(x)}$，$r(x^*)=r(x)$．$x$ 可唯一地分解成$a+ib$，其中

$a=(x+x^*)/2$ 与 $b=(x-x^*)/2i$ 是自伴元. 可见对合类似于复共轭，这一类比对于理解(*)代数是基本的.

4.7.2 定理 若 $x=x^*\in A$，则 $\sigma(x)\subset \mathrm{R}$.

证 设 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathrm{R}$，$\alpha+i\beta\in\sigma(x)$，则 $\alpha+i(\beta+\gamma)\in\sigma(x+i\gamma e)$，于是 $\alpha^2+(\beta+\gamma)^2\leqslant\|x+i\gamma e\|^2=\|x^2+\gamma^2 e\|\leqslant\|x\|^2+\gamma^2$，令 $\gamma\to\pm\infty$ 得 $\beta=0$. □

4.7.3 Stone-Weierstrass 定理 设 Ω 是一紧 T_2 空间[LCH]，$C(\Omega)$ $[C_0(\Omega)]$ 以取复共轭作为对合而成为 (B^*) 代数，A 是 $C(\Omega)$ $[C_0(\Omega)]$ 的 (*) 子代数. 若 A 分离 Ω 的点，即 $\forall x, y\in\Omega, x\neq y\Rightarrow\exists f\in A: f(x)\neq f(y)$，$1\in A$ $[\forall x\in\Omega, \exists f\in A: f(x)\neq 0]$，则 A 在 $C(\Omega)$ $[C_0(\Omega)]$ 中稠密.

证 若 Ω 为LCH，通过考虑其一点紧化可归结为 Ω 紧的情况. 对于后者，不妨只证 $B=\bar{A}\cap C(\Omega,\mathrm{R})$ 在 $C(\Omega,\mathrm{R})$ 中稠密. B 亦分离 Ω 的点. 任给 $f\in B$，$\varepsilon>0$，依经典的 Weierstrass 定理有实系数多项式 P：$\sup\limits_{x\leqslant\|f\|}|P(x)-|x||<\varepsilon$，于是 $\|P\circ f-|f|\|_u<\varepsilon$，可见 $|f|\in B$，从而 B 对运算 $f\vee g=(f+g+|f-g|)/2$ 与 $f\wedge g=-[(-f)\vee(-g)]$ 封闭. 任给 $g\in C(\Omega,\mathrm{R})$，$\varepsilon>0$，$x,y\in\Omega$，取 $f_{xy}\in B$：$f_{xy}(x)=g(x)$，$f_{xy}(y)=g(y)$（可设 $x\neq y$，取 $\varphi\in B$：$\varphi(x)\neq\varphi(y)$，则 $f_{xy}(z)=g(y)+[g(x)-g(y)][\varphi(z)-\varphi(y)][\varphi(x)-\varphi(y)]^{-1}$ 合于所求）；取每个 $y\in\Omega$ 的邻域 V_y，使得 $\forall z\in V_y$：$f_{xy}(z)<g(z)+\varepsilon$. 设 $\{V_{y_i}\}_{i=1}^n$ 覆盖 Ω，则 $f_x=f_{xy_1}\wedge\cdots\wedge f_{xy_n}\in B$，$f_x(x)=g(x)$，$f_x(y)<g(y)+\varepsilon(\forall y\in\Omega)$. 再用类似的推理得出 $\{x_i\}_{i=1}^m\subset\Omega$：$f=f_{x_1}\vee\cdots\vee f_{x_m}\in B$，$\|f-g\|_u<\varepsilon$，可见 B 在 $C(\Omega,\mathrm{R})$ 中稠密. □

4.7.4 定理(Gelfand-Naimark, 1943) 若 A 是交换 (B^*) 代数，$\Omega=\mathcal{X}(A)$，则 $A\to C(\Omega)$，$x\mapsto\hat{x}$ 是等距的 (*) 代数同构.

证　任给 $x=a+ib\in A$，a,b 是自伴元，有

$$x^{*\wedge}(m)=m(a-ib)=m(a)-im(b)=\overline{\hat{x}(m)},\ m\in\Omega,$$

可见 $x^{*\wedge}=\overline{\hat{x}}$. 令 $y=xx^*$，则 $\|y^2\|=\|y\|^2$，归纳地得 $\|y^m\|=\|y\|^m$ $(m=2^n)$，因此 $\|x\|^2=\|y\|=r(y)=\|\hat{y}\|_u=\|\hat{x}\|_u^2$(4.5.3，4.5.6)，可见 $x\longmapsto\hat{x}$ 是等距的(*)代数同态，$\hat{A}$ 是 $C(\Omega)$ 的闭子代数. $\hat{A}$ 显然分离 Ω 的点，故4.7.3推出 $\hat{A}=C(\Omega)$. □

由此可见，实质上仅有一种交换(B^*)代数，即 $C(\Omega)$ (Ω 是紧 T_2 空间). 为将 4.7.4 用到一般(B^*)代数的交换 (*) 子代数，建立以下预备结果.

4.7.5 引理　若 B 是 A 的闭(*)子代数，$e\in B$，则 $\forall x\in B$，$\sigma(x,B)=\sigma(x)$，$\sigma(x,B)$ 记 x 在 B 中的谱.

证　只需证 $B\cap G\subset G(B)=\{x\in G|\ x^{-1}\in B\}$. 若 $x\in B\cap G\diagdown G(B)$，不妨设 $e\in\overline{xB}$，于是 $0\in\sigma(xx^*,\ B)$. 因 $\sigma(xx^*)\subset\mathbb{R}$(4.7.2)，故 $\rho(xx^*)$ 连通. 易见 $\mathbb{C}\diagdown\sigma(xx^*,B)$ 是 $\rho(xx^*)$ 的开闭子集，于是 $0\in\sigma(xx^*,B)=\sigma(xx^*)$，这与 $xx^*\in G$ 矛盾.

□

4.7.6 引理(Fuglede, 1950) 设 $x,y,z\in A$，x,y 是正规元. 若 $xz=zy$，则 $x^*z=zy^*$；若 $xz=zx$，则 $x^*z=zx^*$.

证　首先注意，任给 $a\in A$，$b=a-a^*$，有

$$\|\exp(a-a^*)\|^2=\|\exp b\cdot\exp(-b)\|=1. \tag{1}$$

$xz=zy$ 推出 $x^nz=zy^n(n\geqslant0)$，从而 $\exp x\cdot z=z\cdot\exp y$，于是

$$\begin{aligned}&\|\exp x^*\cdot z\cdot\exp(-y^*)\|\\&=\|\exp(x^*-x)\cdot z\cdot\exp(y-y^*)\|\leqslant\|z\|.\end{aligned} \tag{2}$$

(2)推出整函数 $f(\lambda)=\exp(\lambda x^*)\cdot z\cdot\exp(-\lambda y^*)$ $(\lambda\in\mathbb{C})$ 满足 $\|f(\lambda)\|\leqslant\|z\|$，于是依 Liouville 定理有 $f(\lambda)\equiv f(0)=z$，因此

$$\exp(\lambda x^*)\cdot z=z\cdot\exp(\lambda y^*),\ \lambda\in\mathbb{C}. \tag{3}$$

(3)两边对 λ 微分后置 $\lambda=0$，即得 $x^*z=zy^*$. □

以下定理给出应用4.7.4的一个重要形式.

4.7.7 定理 设$x\in A$是一正规元，B是$\{e,x,x^*\}$生成的闭子代数. 则B是交换(B^*)代数，它等距($*$)代数同构于$C(\sigma_x)$，$\sigma_x=\sigma(x)$；若$y\in A$，$xy=yx$，则$\forall b\in B$：$by=yb$.

证 因每个$b\in B$可用(x,x^*)的多项式逼近，从而b^*亦是如此，故B是A的交换($*$)子代数，于是$\sigma(x,B)=\sigma(x)$(4.7.5)，且$m\in\chi(B)$完全由$m(x)$决定. 这样，

$$\hat{x}: \chi(B)\to\sigma(x),\quad m\longmapsto m(x) \tag{4}$$

是一连续双射(4.5.6)，从而是同胚. 由4.7.4，

$$B\to C(\sigma_x),\quad b\longmapsto\hat{b}\circ(\hat{x})^{-1} \tag{5}$$

是等距的($*$)代数同构，其中$(\hat{x})^{-1}$记(4)之逆. 若$xy=yx$，则4.7.6推出$x^*y=yx^*$，因而$by=yb(b\in B)$. □

我们将同构(5)的逆写作

$$C(\sigma_x)\to B,\quad f(\lambda)\longmapsto f(x), \tag{6}$$

其中$f(x)\in B$由等式$(f(x))^\wedge=f\circ\hat{x}$唯一决定. 这样，任给$\Omega\subset\mathbb{C}$，每个$f(\lambda)\in C(\Omega)$可“延拓”为集$\{x\in A|\ x^*x=xx^*,\ \sigma(x)\subset\Omega\}$上的$A$-值函数$f(x)$. 类似于§6中所述的解析延拓，此处亦有$f(\lambda e)=f(\lambda)e$，$g(f(x))=(g\circ f)(x)$及

$$\begin{aligned}\sigma(f(x))&=(f(x))^\wedge(\chi(B))=(f\circ\hat{x})(\chi(B))\\&=f(\sigma(x)).\end{aligned} \tag{7}$$

4.7.7的以下推论特别有用.

推论 $x\in A$是自伴元[酉元]$\Longleftrightarrow x$是正规元且$\sigma(x)\subset\mathbb{R}$ $[\sigma(x)\subset S^1]$；若$x=x^*$，$\sigma(x)\subset[0,\infty)$（此时称$x$为正元，写作$x\geqslant 0$），则$x$有“正平方根”$y=\sqrt{x}\geqslant 0$：$y^2=x$.

给定复Hilbert空间H，对任给$T\in L(H)$有：

$$\|T\|^2=\sup_{\|x\|\leqslant 1}(T^*Tx,x)\leqslant\|T^*T\|,$$

由此推出$L(H)$依对合$T\longmapsto T^*$(1.10.8)是一(B^*)代数. 这样的$L(H)$及其闭($*$)子代数实质上穷尽了所有(B^*)代数

(“Gelfand-Naimark定理”，参看[64])．$L(H)$中的正规元[自伴元或酉元]亦即依1.10.8的正规算子[自伴算子或酉算子]；而$L(H)$中的正元通常称为正算子．

4.7.8 定义 设f是(*)代数A上的线性泛函．若任给$x\in A$；$f(xx^*)\geqslant 0$，则称f为A上的正泛函．

对前述的$L(H)$，取定$x\in H$，则$f(T)=(Tx,x)$是$L(H)$上的正泛函．若Ω是一紧T_2空间，f是$C(\Omega)$上的正泛函，$0\leqslant\varphi\in C(\Omega)$，$\psi=\sqrt{\varphi}$，则$f(\varphi)=f(\psi\bar{\psi})\geqslant 0$，可见$f$是3.4.5中所说的正线性泛函(不难直接指明$\|f\|=f(1)$)，因而$f$唯一决定$\Omega$上一有界正测度(3.4.5,3.5.5)，且反之亦然．这些性质可或多或少推广到一般(*)代数上的正泛函．

4.7.9 定理 设f是(*)代数A上的正泛函，$g(x,y)=f(y^*x)$．则(i)g是A上的正Hermite形式(1.10.1)；(ii)若A含单位元e，则$f(x^*)=\overline{f(x)}$；(iii)若进而假设A满足$\|x^*\|=\|x\|(x\in A)$，则$f\in A'$且$\|f\|=f(e)$；(iv)若A是含单位元e的交换(B^*)代数，$\Omega=\chi(A)$，则A上的正泛函之全体与Ω上的有界正测度之全体成一一对应．

证 展开$g(x+y,x+y)\geqslant 0$得$\operatorname{Im}g(x,y)=-\operatorname{Im}g(y,x)$；以$iy$换$y$得$\operatorname{Re}g(x,y)=\operatorname{Re}g(y,x)$，因此$g(x,y)=\overline{g(y,x)}$，(i)得证．由(i)推出$f(x^*)=g(e,x)=\overline{g(x,e)}=\overline{f(x)}$．对于(iii)只要证$\|x\|<1$时$|f(x)|\leqslant f(e)$．利用关于$g$的Schwarz不等式：$|f(x)|^2=|g(e,x)|^2\leqslant g(e,e)g(x,x)=f(e)f(y)$，$y=x^*x=y^*$．设$\sqrt{1-t}=\Sigma a_n t^n(|t|<1)$，则$z=\Sigma a_n y^n=z^*$，$z^2=e-y$，于是$f(e-y)=f(zz^*)\geqslant 0$，$f(y)\leqslant f(e)$，从而$|f(x)|\leqslant f(e)$．

证(iv)．若$0\leqslant\mu\in M(\Omega)$，令$f_\mu(x)=\int\hat{x}d\mu$，利用4.7.4易直接验证$f_\mu$是$A$上的正泛函，且$\|f_\mu\|=\|\mu\|$．其次，$A$上每个正泛函$f$通过等式$f(x)=\int\hat{x}d\mu$唯一决定一个$\mu\in M(\Omega)$，由$\mu(\Omega)=\int d\mu=f(e)=\|f\|=\|\mu\|$推出$\mu\geqslant 0$． □

注 上面(iv)中"A是(B^*)代数"可换成条件"$\widehat{x^*}=\overline{x^\wedge}$ $(x\in A)$".

参考文献：[22]，[33]，[38]，[39]，[63]，[64]，[85].

习 题

对交换$(*)$代数A，以下条件互相等价：(i) $m(x)=0\Rightarrow m(x^*)=0$ $(m\in X(A),\ x\in A)$；(ii) $\widehat{x^*}\equiv\overline{x^\wedge}$；(iii) $e+x^*x$恒可逆。

§8 Hilbert空间中的谱定理

给定复Hilbert空间H。本节的基本目标是指明每个正规算子$T\in L(H)$(及T的一定函数$f(T)$)可表为正投影算子的积分(所谓**谱分解定理**).

4.8.1 定义 设Ω是一LCH，$\mathscr{B}$记其Borel子集之全体，$\{P(B)\,|\,B\in\mathscr{B}\}$是$H$上一正投影算子族．若$P(\varnothing)=0$，$P(\Omega)=I=1_H$；$P(A\cap B)=P(A)P(B)$，$A\cap B=\varnothing\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)$；$\forall x,y\in H$，$\exists\mu_{xy}\in M(\Omega)$，$\forall B\in\mathscr{B}$：$\mu_{xy}(B)=(P(B)x,y)$，则称$P$为$\Omega$上的**谱族**或**单位分解**.

4.8.2 定理 任给正规算子$T\in L(H)$，存在$\Omega=\sigma(T)$上唯一谱族P（称为T的**谱分解**），使得：(i) 存在连续$(*)$代数同态$L^\infty(\Omega)\to L(H)$，$f(\lambda)\longmapsto f(T)$，当$f(\lambda)\in C(\Omega)$时$f(T)$由§7(6)决定(换$x$为$T$)；对任给$f(\lambda)\in L^\infty(\Omega)$，

$$(f(T)x,y)=\int f(\lambda)d\mu_{xy},\quad x,y\in H,\tag{1}$$

μ_{xy}如4.8.1所述；(ii) 若$B\subset\Omega$是非空开集，则$P(B)\neq0$；(iii) 若$S\in L(H)$，$ST=TS$，则$\forall f(\lambda)\in L^\infty(\Omega)$：

$$Sf(T)=f(T)S.$$

证 设$\mathscr{A}$是由$\{I,T,T^*\}$生成的$L(H)$的闭$(*)$子代数．由4.7.7，存在等距的$(*)$代数同构

$$C(\Omega)\to\mathscr{A},\quad f(\lambda)\longmapsto f(T).\tag{2}$$

令 $L_{xy}(f)=(f(T)x,y)(x,y\in H,\ f\in C(\Omega))$，则 $|L_{xy}(f)|\leqslant \|f\|_\infty\|x\|\|y\|$，由3.5.5，存在 $\mu_{xy}\in M(\Omega)$，使得(1)对任何$f\in C(\Omega)$ 成立，且 $\|\mu_{xy}\|\leqslant\|x\|\|y\|$. 任给 $f\in L^\infty(\Omega)$，$\int fd\mu_{xy}$ 关于 (x,y) 是 Hermite 双线性的（因 L_{xy} 有此性质），且 $|\int fd\mu_{xy}|\leqslant \|f\|_\infty\|x\|\|y\|$，于是有唯一算子 $f(T)\in L(H)$，使 (1) 满足且 $\|f(T)\|\leqslant\|f\|_\infty$(1.10.10)；若 $f\in C(\Omega)$，此处的 $f(T)$ 与 (2) 中的 $f(T)$一致.

若 $f\in C(\Omega,\mathrm{R})$，则 $f(T)$ 是自伴的，于是

$$\int fd\mu_{xy}=(f(T)x,y)=\overline{(f(T)y,x)}=\int fd\overline{\mu}_{yx},$$

由 f 的任意性得出 $\mu_{xy}=\overline{\mu}_{yx}$. 若 $f\in L^\infty(\Omega)$，则

$$(f(T)x,y)=\int fd\mu_{xy}=\overline{\int \overline{f}d\mu_{yx}}=(x,\overline{f}(T)y),$$

可见 $\overline{f}(T)=(f(T))^*$. 又任给 $f,g\in C(\Omega)$，令 $z=(f(T))^*y$，则

$$\int gd\mu_{xz}=(g(T)x,z)=(f(T)g(T)x,y)=\int fgd\mu_{xy},$$

由 g 的任意性得 $d\mu_{xz}=fd\mu_{xy}$. 于是换成 $g\in L^\infty(\Omega)$ 时亦有：

$$(f(T)g(T)x,y)=\int gd\mu_{xz}=\int fgd\mu_{xy}=((f\cdot g)(T)x,y).\tag{3}$$

这又推出对于 $f\in L^\infty(\Omega)$ 亦有 $d\mu_{xz}=fd\mu_{xy}$，从而 (3) 对任何 $f,g\in L^\infty(\Omega)$成立. 这就验证了定理之结论(i).

任给 Borel 集 $B\subset\Omega$，定义 $P(B)=\chi_B(T)$，则直接看出如此得到Ω上一谱族P，它由关系 $\mu_{xy}(B)=\int\chi_Bd\mu_{xy}=(P(B)x,y)$唯一确定，从而由 T 唯一确定.

今验证(ii). 若$B\subset\Omega$ 是非空开集，$P(B)=0$，则$\forall x,y\in H$，$\mu_{xy}(B)=0$. 任给 $f\in C_c(B)$，令 $z=(f(T))^*y$，则 $\int fd\mu_{xy}=\int\chi_Bd\mu_{xz}=\mu_{xz}(B)=0$，这推出 $f(T)=0$，从而 $f(\lambda)=0$，这与 B 非空矛盾. 最后验证(iii). 由 4.7.7，对任何 $f\in C(\Omega)$ 有 $Sf(T)=f(T)S$. 任给 $x,y\in H$，令 $u=Sx$, $v=S^*y$，则对任何 $f\in C(\Omega)$ 有：

$$\int fd\mu_{uy}=(f(T)Sx,y)=(Sf(T)x,y)=\int fd\mu_{xv},\tag{4}$$

这推出 $\mu_{xy}=\mu_{xv}$. 于是(4)亦对任何 $f\in L^\infty(\Omega)$ 成立. □

考虑两个最重要的特例，记号依 4.8.2.

1° 设 $T=T^*\in L(H)$，则 $\Omega=\sigma(T)\subset(\alpha,\beta]$，$-\infty<\alpha<\beta<\infty$. 令 $P_t=P(t)=P((-\infty,t]\cap\Omega)$，则当 $t\leqslant\alpha$ 时 $P_t=0$，$t\geqslant\beta$ 时 $P_t=I$；$t<s\Rightarrow P_tP_s=P_t$. 任给 $x,y\in H$，令 $\mu_{xy}((-\infty,t])=(P_tx,y)$，则 $\mu_{xy}\in M(\mathrm{R})$，对任给 $f\in L^\infty([\alpha,\beta])$（参考§3.7(11)）有：

$$(f(T)x,y)=\int_\alpha^\beta f(t)d(P_tx,y),\ x,y\in H, \tag{5}$$

(5)右端为 LS 积分. 若 $f\in C[\alpha,\beta]$，$\forall\varepsilon>0$，作分划 $\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$，使 $\|\sum_i f(t_i)\chi_{(t_{i-1},t_i]}-f\|_\infty<\varepsilon$，则

$$\|\sum_i f(t_i)(P(t_i)-P(t_{i-1}))-f(T)\|<\varepsilon,$$

可见
$$f(T)=\int_\alpha^\beta f(t)dP(t), \tag{6}$$

特别
$$T=\int_\alpha^\beta tdP(t). \tag{7}$$

(6)(7)中的积分是3.7.5意义下的RS积分.

2° 设 $T\in L(H)$ 是酉算子，则 $\sigma(T)\subset S^1$（4.7.7之推论）. 若$P(\theta)=P(\{z\in\sigma(T)|\ 0<\arg z\leqslant\theta\})$，则可得类似于(5)(6)(7)的公式($x,y\in H$)：

$$(f(T)x,y)=\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})d(P(\theta)x,y),\ f\in L^\infty(S^1); \tag{8}$$

$$f(T)=\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})dP(\theta),\ f\in C(S^1); \tag{9}$$

$$T=\int_0^{2\pi}e^{i\theta}dP(\theta). \tag{10}$$

谱分解是研究算子的有力工具，试看一例.

4.8.3 定理 若 $T\in L(H)$ 是正规算子，则

$$\|T\|=\sup_{\|x\|\leqslant1}|(Tx,x)|=\sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)|. \tag{11}$$

若 $T=T^*\in L(H)$，则

$$\inf\sigma(T)=\inf_{\|x\|=1}(Tx,x),\ \sup\sigma(T)=\sup_{\|x\|=1}(Tx,x). \tag{12}$$

证 对于(11)只需证：$\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,x\in H$：$\|x\|=1$，$|(Tx,x)|\geqslant\|T\|-\varepsilon$. 取 $\lambda_0\in\sigma(T)$：$\|T\|=|\lambda_0|$. 设 P 是 T 的谱族，$B=\sigma(T)\cap D(\lambda_0,\varepsilon)$，则 $P(B)\neq 0$，于是 $\exists\,x\in H$，$\|x\|=1$，$P(B)x=x$（参看1.10.9）. 令 $f(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)\chi_B$，则 $f(T)=(T-\lambda_0I)P(B)$，$f(T)x=Tx-\lambda_0x$，

$$\begin{aligned}|(Tx,x)|&\geqslant|(\lambda_0x,x)|-|(f(T)x,x)|\\&\geqslant\|T\|-\|f(T)\|\geqslant\|T\|-\varepsilon.\end{aligned}$$

对于(12)只要证后一式（以 $-T$ 代 T 得前一式），且不妨设 $(Tx,x)\geqslant 0$（否则以 $T+\|T\|I$ 代 T），于是直接归于(11). □

最后，我们专门讨论一下紧算子的谱分解，它具有特别简单的形式.

4.8.4 引理（Riesz） 若 A 是 B-空间 E 的闭子空间，$A\neq E$，则存在 $x\in E$：$\|x\|=1$，$d(x,A)\geqslant 1/2$.

证 任取 $y\in E\setminus A$，则 $\delta=d(y,A)>0$. 取 $a\in A$：$\|y-a\|<2\delta$，则 $x=(y-a)/\|y-a\|$ 能合引理要求. □

4.8.5 引理 设 $T\in L(E)$ 是紧算子，$T_1=I-T$. 则 $\mathrm{Im}T_1$ 是闭集；$\mathrm{Im}T_1=E\Longleftrightarrow\mathrm{Ker}T_1=0$.

证 设 $T_1x_n\to x$. 若 $\{x_n\}$ 有界，则不妨设 $Tx_n\to y$，于是 $x_n=(T_1+T)(x_n)\to x+y$，从而 $x=T_1(x+y)\in\mathrm{Im}T_1$. 若 $\{x_n\}$ 无界，取 $y_n\in\mathrm{Ker}\,T_1$：$d(x_n,\mathrm{Ker}T_1)=d_n\leqslant\|x_n-y_n\|\leqslant(1+n^{-1})\cdot d_n$，则 $\{d_n\}$ 必有界（这样就可以 x_n-y_n 代 x_n 同样得出 $x\in\mathrm{Im}T_1$）. 否则，可设 $d_n\to\infty$，令 $z_n=(x_n-y_n)/\|x_n-y_n\|$，则 $T_1z_n\to 0$，于是有子列 $\{z_{n_k}\}$：$z_{n_k}=(T_1+T)(z_{n_k})\to z\in\mathrm{Ker}T_1$，这与 $d_{n_k}\leqslant\|x_{n_k}-(y_{n_k}+\|x_{n_k}-y_{n_k}\|z)\|\leqslant(1+n_k^{-1})d_{n_k}\|z_{n_k}-z\|$ 矛

盾.

若 $\mathrm{Im}T_1=E$，则 $\mathrm{Ker}\ T_1=0$. 否则 $\exists x_1\in\mathrm{Ker}\ T_1$: $x_1\neq 0$，于是

$$x_1=T_1x_2=\cdots=T_1^{n-1}x_n,\quad x_n\in E,\quad n=2,3,\cdots,$$

从而 $x_n\in\mathrm{Ker}\ T_1^n\setminus\mathrm{Ker}\ T_1^{n-1}$. 依 4.8.4，$\exists y_n\in\mathrm{Ker}\ T_1^n$: $\|y_n\|=1$，$d(y_n,\mathrm{Ker}\ T_1^{n-1})\geqslant 1/2(n\geqslant 2)$. 因 $m>n$ 时 $T_1^{m-1}(T_1y_m+Ty_n)=0$，故

$$\|Ty_m-Ty_n\|=\|y_m-(T_1y_m+Ty_n)\|\geqslant 1/2,$$

这与 $\{Ty_m\}$ 有收敛子列矛盾. 反之，若 $\mathrm{Ker}\ T_1=0$，则 $T_1:E\to\mathrm{Im}\ T_1$ 是拓扑同构，任给 $f\in E'$: $g=f\circ T_1^{-1}\in(\mathrm{Im}T_1)'$，故可以认为$g\in E'$，$f=T_1'(g)$，这表明 $\mathrm{Im}T_1'=E'$. 因T' 亦是紧算子(1.8.12)，故前面所证推出$\mathrm{Ker}\ T_1'=0$，于是$\mathrm{Im}T_1=\overline{\mathrm{Im}\ T_1}=(\mathrm{Ker}\ T_1')^{\perp}=E$（参考1.8.11）. □

任给 $T\in L(E)$，令 $T_\lambda=\lambda I-T$，当 $\mathrm{Ker}\ T_\lambda\neq 0$ 时称 λ 为 T 的**特征值**，称 $x\in\mathrm{Ker}T_\lambda\setminus 0$为 T 关于λ的**特征向量**. 以$\mathrm{P}\sigma(T)$记T的特征值之全体，显然 $\mathrm{P}\sigma(T)\subset\sigma(T)$.

4.8.6 定理 设 $T\in L(E)$是一紧算子. 若$0\neq\lambda\in\sigma(T)$，则 $\lambda\in\mathrm{P}\sigma(T)$，且 $0<\dim\mathrm{Ker}\ T_\lambda<\infty$；$\sigma(T)$没有非零聚点，从而至多为一可数集.

证 设 $0\neq\lambda\in\sigma(T)$，不妨设 $\lambda=1$. 4.8.5 推出 $\mathrm{Ker}T_1\neq 0$，否则同时有 $\mathrm{Im}\ T_1=E$，从而必$1\in\rho(T)$. 因此$1\in\mathrm{P}\sigma(T)$. 因 $B(0,1)\cap\mathrm{Ker}\ T_1=T(B(0,1)\cap\mathrm{Ker}\ T_1)$ 相对紧，故必 $\dim\mathrm{Ker}\ T_1<\infty$（参看1.4.14）.

设 $0\neq\lambda_n\to\lambda$，$\lambda_n\in\sigma(T)$ 互不相同. 令 $T_n=\lambda_nI-T$，取 $x_n\in\mathrm{Ker}T_n\setminus 0$，则可归纳地证明$\{x_1,\cdots,x_n\}$线性无关. 以$E_n$记$\{x_1,\cdots,x_n\}$ 生成的E的子空间. 由 4.8.4，$\exists y_n\in E_n$: $\|y_n\|=1$，$d(y_n,E_{n-1})\geqslant 1/2(n=2,3,\cdots)$. 于是 $m>n$ 时，

$$\|Ty_m-Ty_n\|=\|\lambda_my_m-(T_my_m+Ty_n)\|\geqslant|\lambda_m|/2.$$

因$\{Ty_n\}$含收敛子列，故必有$\lambda=0$. □

4.8.7 定理 若$T\in L(H)$是非零紧正规算子，则

$$T=\sum\lambda_n P_n; \tag{13}$$

$$\|Tx\|^2=\sum|\lambda_n|^2\|P_n x\|^2,\quad x\in H, \tag{14}$$

其中$\lambda_n\in\sigma(T)\setminus 0$, P_n是正投影算子，$\mathrm{Im}P_n=\mathrm{Ker}(\lambda_n I-T)$，(13)依算子范数收敛.

证 因$\|T\|=\sup\{|\lambda|\ |\lambda\in\sigma(T)\}>0$,故$\sigma(T)\setminus 0$非空，将其排列成$\lambda_1$, λ_2, …，使得$|\lambda_1|\geqslant|\lambda_2|\geqslant\cdots$，不妨设$\lambda_n\to 0$. 设$P$是$T$的谱分解，令$P_n=P(\{\lambda_n\})$，$f(\lambda)=\lambda$，$f_n(\lambda_j)=\lambda_j(j\leqslant n)$, $f_n(\lambda_k)=0(k>n)$，则$\|f_n-f\|_\infty\to 0$，于是依4.8.2有

$$\|T-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i P_i\|=\|f(T)-f_n(T)\|\to 0,$$

可见(13)成立. 当$m\neq n$时，$P_m P_n=0$，故对任给$x,y\in H$，$(P_n x,\ P_m y)=(P_m P_n x,y)=0$，可见$\mathrm{Im}P_m$与$\mathrm{Im}\,P_n$互相正交，于是

$$\|Tx\|^2=(\sum\lambda_m P_m x,\sum\lambda_n P_n x)=\sum|\lambda_n|^2\|P_n x\|^2.$$

由$(\lambda_n I-T)P_n=\lambda_n P_n-\lambda_n P_n=0$推出$\mathrm{Im}P_n\subset\mathrm{Ker}(\lambda_n I-T)$. 任给$x\in\mathrm{Ker}(\lambda_n I-T)$，即$Tx=\lambda_n x$，有

$$\begin{aligned}0=\|Tx-\lambda_n^{-1}T^2x\|^2&=\|\sum_j(\lambda_j-\lambda_n^{-1}\lambda_j^2)P_j x\|^2\\&=\sum_j|\lambda_j\lambda_n^{-1}|^2|\lambda_n-\lambda_j|^2\|P_j x\|^2,\end{aligned}$$

这推出$P_j x=0(j\neq n)$，因此$x=\lambda_n^{-1}Tx=P_n x\in\mathrm{Im}\,P_n$. □

参考文献：[22]，[38]，[39]，[64]，[85].

习 题

1. 正规算子$T\in L(H)$可逆$\Longleftrightarrow\exists\beta>0,\forall x\in H$，$\|Tx\|\geqslant\beta\|x\|$.

2. 设Ω是一紧T_2空间，$U:C(\Omega)\to L(H)$是一个(*)代数同态，$a\in H$，$\|a\|=1$，$\Phi(f)=(U(f)a,a)$，则$\|\Phi\|=1$，$|\Phi(f)|^2\leqslant\Phi(|f|^2)$.

第五章　微　分　流　形

近代分析学在向无限维空间拓广的同时，也扩展到那些由 Euclid 空间接合起来的"弯曲的"空间，即所谓流形上．沿后一方向发展成为近年来日益重要的**大范围分析**．本章及下一章提供它的一个导引．

约定　$B^n(a, r)$记 $\mathbf{R}^n$ 中的球 $B(a, r)$；0^n 记 $\mathbf{R}^n$ 的零元．

§1　微分流形与可微映射

初等分析已接触到 2 维（乃至更高维）曲面上的函数的问题，所用的方法是通过曲面的参数表示将曲面上的函数转化为平面区域上的函数．这种作法引出了一个问题：若参数表示只是局部地适用，我们如何能达到整体有效的结论？欲解答此问题，需要"局部地可参数化"空间即流形的概念．

5.1.1　**定义**　设M是一个第二可数的 T_2空间．若给定了一集 $\Phi=\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)|\ \alpha\in A\}$，满足条件：

MA_1．每个 U_α 是M的开子集，$M=\bigcup U_\alpha$；

MA_2．每个 φ_α 将 U_α 同胚地映到 $\mathbf{R}^m$ 的某开子集上，m 与 α 无关（约定 $\mathbf{R}^0=\{0\}$）；

MA_3．$U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing(\alpha,\beta\in A)$ 时 $\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1}|\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\in C^\infty$，则称$\Phi$ 为 M 上的一个**图册**．说M上的两个图册Φ 与 Φ' 等价，若$\Phi\cup\Phi'$是一图册；$\Psi=\bigcup\{\Phi'|\Phi'$与 Φ等价$\}$是M上包含Φ的极大图册，称它为由Φ生成的**微分结构**，称M（或(M,Φ)，或

(M,Ψ))为一个 m 维微分流形，称每个 $(V,\psi)\in\Psi$ 为 M 上的图或(局部)坐标系.

本书中简称微分流形为流形. 给定流形 M 的一个图 (U,φ)，写 $\varphi(x)(x\in U)$ 为 $(x^1,\cdots,x^m)$ 或 $(\varphi^1(x),\cdots,\varphi^m(x))$（在本书涉及流形的章节中，约定点的坐标采用上指标），称 (x^i) 为点 x 的局部坐标，它正是与曲面参数表示相当的东西. 对上述的 (U,φ)，今后将依方便写成 (U,φ,x^i)、(U,x^i) 或 (x^i) 等形式；当 $x\in U$ 时，说 (U,φ) 是"x 处的一个坐标系".

5.1.2 例 1° 单个图的集 $\{(\mathrm{R}^n,\mathrm{id})\}$ 自动满足5.1.1之条件，从而确定 R^n 为一 n 维流形，图 $(\mathrm{R}^n,\mathrm{id})$ 对应其**自然坐标系** (x^i). 今后倘无特殊规定，R^n(及其开子集)上总采用由自然坐标所决定的微分结构.

2° 设 $S^n=\{x\in\mathrm{R}^{n+1}|\ |x|=1\}$. 令 $U=\{x\in S^n|\ x^{n+1}<1\}$，$V=\{x\in S^n\ |x^{n+1}>-1\}$，$\lambda^{\pm}=(1\pm x^{n+1})^{-1}$. 定义**球极投影**：

$$\varphi:\ U\to\mathrm{R}^n,\ (x^1,\cdots,x^{n+1})\longmapsto(\lambda^-x^1,\cdots,\lambda^-x^n);\quad (1)$$

$$\psi:\ V\to\mathrm{R}^n,\ (x^1,\cdots,x^{n+1})\longmapsto(\lambda^+x^1,\cdots,\lambda^+x^n),\quad (2)$$

则
$$\psi\varphi^{-1}:\ \mathrm{R}^n\backslash 0\to\mathrm{R}^n\backslash 0,\ y\longmapsto y/|y|^2$$
是 C^∞ 微分同胚. 因此，S^n 以 $\Phi=\{(U,\varphi),(V,\psi)\}$ 为图册成为一 n 维流形. 设 $n=2$，$W=S^2\backslash([0,\infty)\times 0\times\mathrm{R})$，则

$$h:(0,2\pi)\times(0,\pi)\to W,\ (u,v)\longmapsto(\cos u\sin v,\sin u\sin v,\cos v)\quad (3)$$

是一同胚，且可验证 φh 与 ψh 都是 C^∞ 映射. 因此，(W,h^{-1})（或 (u,v)）是流形 (S^2,Φ) 上的一个坐标系，它就是熟知的**球面坐标**.

3° 给定 m 维流形 (M,Φ) 与非空开集 $W\subset M$，令

$$\Phi_W=\{(W\cap U,\varphi|W\cap U)|(U,\varphi)\in\Phi\},\quad (4)$$

则 (W,Φ_W) 显然是一 m 维流形，称为 M 的**开子流形**.

4° 设(M,Φ)，(N,Ψ)分别为m维与n维流形，令

$$\Phi\times\Psi=\{(U\times V,\ \varphi\times\psi)|(U,\varphi)\in\Phi,\ (V,\psi)\in\Psi\}\quad(5)$$

（参看§1.1(2)），则不难验证$(M\times N,\ \Phi\times\Psi)$是一个$m+n$维流形，称为$M$与$N$的**积流形**. 粗言之，积流形$M\times N$上采用形如$(x^1,\cdots,x^m,\ y^1,\cdots,y^n)$的坐标系，其中$(x^i)$与$(y^j)$分别为$M$与$N$上的坐标系.

一个流形M有良好的拓扑性质：5.1.1的MA_1，MA_2表明M是"局部 Euclid 的"，从而是局部紧与局部连通的. 再由第二可数性推出，M是可度量化的、σ-紧的（1.4.11）、正规的（1.4.6）；它至多有可数个分支，且各分支是M的开也(是闭)子流形(1.4.3).

约定 以下直至下章结束，字母M，N总记给定的m维与n维微分流形.

设$f\in C(M,N)$，$a\in M$，则必有M的坐标系(U,φ,x^i)与N的坐标系(V,ψ,y^i)，使得$a\in U$，$fU\subset V$. 称映射

$$\psi f\varphi^{-1}:\ \varphi U\to\mathrm{R}^n,\ (x^1,\cdots,x^m)\longmapsto(y^1,\cdots,y^n)\qquad(6)$$

为f（在a处）的一个**局部表示**. 不致误解时，(6)可简写作"局部表示$f:(x^1,\cdots,x^m)\longmapsto(y^1,\cdots,y^n)$"或"$y^i=f^i(x^1,\cdots,x^m)$". 若$N=\mathrm{R}^n$，$\partial f\varphi^{-1}/\partial x^j$存在，则将它简写作$\partial f/\partial x^j$或$\partial_j f$.

5.1.3 定义 给定映射$f:M\to N$.

1° 若f在每点$x\in M$处有一局部表示为$C^r(0\leqslant r\leqslant\infty)$映射，则称$f$为$C^r$映射；以$C^r(M,N)$记从$M$到$N$的$C^r$映射之全体，令$C^r(M)=C^r(M,\mathrm{R})$. 若$f$是双射且$f$与$f^{-1}$皆为$C^\infty$映射，则称$f$为($C^\infty$) **微分同胚**，记作$f\in\mathrm{Diff}(M,N)$或$f:M\cong N$，令$\mathrm{Diff}(M)=\mathrm{Diff}(M,M)$. 若有$a\in M$的邻域$U$与$f(a)\in N$的邻域$V$，使得$f|U:U\cong V$，则说$f$在$a$处为局部微分同胚；若$f$在每点$x\in M$为局部微分同胚，则说$f$是一局

部微分同胚.

2° 设$f\in C^r(M,N)(r\geqslant 1)$, $a\in M$. 取f在a处的一局部表示$(x^1,\cdots,x^m)\longmapsto(y^1,\cdots,y^n)$, 称$\mathrm{rank}(\partial y^i(a)/\partial x^j)$为$f$在$a$的秩, 记作$\mathrm{rank}f(a)$. 若$\mathrm{rank}f(a)<n$, 则称$a$为$f$的临界点(否则称$a$为正则点), 称$f(a)$为$f$的临界值; 若$y\in N$非$f$的临界值, 则称$y$为$f$的正则值. 若$\mathrm{rank}f(x)=m[n]$, 则称$f$为$C^r$浸入[浸满]. 若$f$是一$C^\infty$浸入且是一拓扑嵌入(1.1.10), 则称$f$为$C^\infty$嵌入, 记作$f:M\hookrightarrow N$.

注 1° 若$\psi_i f\varphi_i^{-1}(i=1,2)$是$f$在$a$处的两个形如(6)的局部表示, 则从$\psi_2 f\varphi_2^{-1}=(\psi_2\psi_1^{-1})(\psi_1 f\varphi_1^{-1})(\varphi_1\varphi_2^{-1})$看出, $\psi_i f\varphi_i^{-1}(i=1,2)$的可微性及其 Jacobi 矩阵的秩相同. 因此, f的可微性与秩的定义与坐标系无关.

2° 显然$C^r(0\leqslant r\leqslant\infty)$映射复合后仍为$C^r$映射.

3° 任给M的图(U,φ), U与φU分别为M与R^m的开子流形, 从$1_{\varphi U}\circ\varphi\circ\varphi^{-1}=1_{\varphi U}=\varphi\circ\varphi^{-1}\circ 1_{\varphi U}^{-1}$推出$\varphi\in\mathrm{Diff}(U,\varphi U)$. 反之, 若$\varphi\in\mathrm{Diff}(U,V)$, $U\subset M$与$V\subset\mathrm{R}^m$是开集, 则直接从5.1.1与5.1.3看出(U,φ)是M上的一个图.

4° 设X是一集[拓扑空间], $f:M\to X$是一双射[同胚]. 对M的每个图(U,φ), 以$(fU,\varphi f^{-1})$作为X上的图, 如此得到X上一微分结构, 使得$f\in\mathrm{Diff}(M,X)$[且X保持原拓扑]. 特别, 任给n维实向量空间V, 任何线性同构$f:\mathrm{R}^n\to V$在V上诱导出同样的微分结构. 今后任何n维实[复]向量空间将自动地看作等同于$\mathrm{R}^n[\mathrm{R}^{2n}]$的流形(参看1.4.14).

直接从5.1.3推出以下简单而有用的结论:

5.1.4 定理 设$\{W_\alpha\}$是M的一个开覆盖, $f:M\to N$. 若$\forall\alpha$: $f|W_\alpha\in C^r(W_\alpha,N)$, 则$f\in C^r(M,N)$.

下面这个重要结果可与1.4.8对照.

5.1.5 定理 若$A\Subset W\subset M$, A是相对紧的, 则存在

$f\in C_c^\infty(M)$：$A\prec f\prec W$（关于记号参看§1.4）.

证 首先定义R上的 C^∞ 函数：

$$h(t)=\begin{cases}\exp t^{-1}, & t>0;\\ 0, & t\leqslant 0.\end{cases} \tag{7}$$

令

$$g(x)=\frac{h(2-|x|)}{h(2-|x|)+h(|x|-1)},\quad x\in\mathrm{R}^m, \tag{8}$$

则易见 $g\in C_c^\infty(\mathrm{R}^m)$，且 $B^m(0,1)\prec g\prec B^m(0,3)$. 取$M$的有限个图 (U_i,φ_i)，使得 $U_i\Subset W$，$\varphi_iU_i=B^m(0,3)$，$A\subset\bigcup V_i$，$V_i=\varphi_i^{-1}B^m(0,1)$. 令 $f_i(x)=g(\varphi_i(x))(x\in U_i)$，补充定义 $f_i|U_i^c=0$，则 $f_i\in C_c^\infty(M)$，$V_i\prec f_i\prec U_i$. 于是$f(x)=1-\prod[1-f_i(x)]$ $(x\in M)$合于定理所求. □

利用 5.1.5 可将 1.4.13 推广于下.

5.1.6 单位分解定理 设$\{W_\alpha\}$是M上的开集族，它覆盖闭集 $A\subset M$. 则存在$\{\lambda_\alpha\}\subset C^\infty(M)$，使得 $\lambda_\alpha\prec W_\alpha$，$\{\mathrm{supp}\lambda_\alpha\}$局部有限，$\sum\lambda_\alpha\leqslant 1$，$\sum\lambda_\alpha|A=1$. 这样的 $\{\lambda_\alpha\}$ 称为A上从属于$\{W_\alpha\}$的一个 C^∞ 单位分解.

1.4.13 的证明只需稍作修改即可移用，但引用1.4.8的地方应改成依 5.1.5. 本书今后使用单位分解一词时，总是指C^∞单位分解.

推论 $\varnothing\neq A\Subset W\subset M\Rightarrow\exists f\in C^\infty(M)$：$A\prec f\prec W$（参照 5.1.5）.

注 不难利用证 1.4.13 的那种程序求出M的一个局部有限图册$\{(U_i,\varphi_i)\}$，使每个 U_i 相对紧. 因此必存在M上的单位分解$\{\lambda_i\}$：$\lambda_i\in C_c^\infty(M)$.

5.1.7 定义 任给 $x\in M$，以$C_x^r(M,N)$记从x的某邻域到N的 C^r 映射（定义域不必相同）之全体，在其中规定 $f\sim g\Longleftrightarrow$存在 x 的邻域 U：$f|U=g|U$，令 $G_x^r(M,N)=C_x^r(M,N)/\sim$，$G_x^r(M)=G_x^r(M,\mathrm{R})$. 称 $G_x^r(M,N)$中的元为x处的

C^r 映射芽，每个 $f\in C^r_x(M,N)$ 所属的芽记作 $[f]_x$.

5.1.8 定理 $\forall x\in M$: $C^r(M,N)\to G^r_x(M,N)$, $f\longmapsto [f]_x$ 为满射.

证 任取 $f\in C^r_x(M,N)$. 取 N 的图 (V,ψ): $\psi f(x)=0$, $\psi V=B^n(0,1)$; 取 x 的邻域 $W\Subset f^{-1}V$, 取 $h\in C^\infty(M)$: $W\prec h\prec f^{-1}V$. 令

$$g(y)=\begin{cases}\psi^{-1}(h(y)\psi(f(y))), & y\in f^{-1}V;\\ f(x), & y\in X\setminus f^{-1}V,\end{cases}$$

则 $g\in C^r(M,N)$, $g|W=f|W$, 于是 $[g]_x=[f]_x$. □

参考文献：[2]，[12]，[22]，[34]，[40]，[45]，[51]，[83].

习 题

1. 任给 $x_0\in M$ 的邻域 W, $\varepsilon>0$, 存在 M 上的图 (U,φ), 使得 $x_0\in U\subset W$, $\varphi(x_0)=0$, $\varphi U=B^m(0,\varepsilon)$.

2. M 上的两个图册 Φ, Φ' 生成同一微分结构 $\Longleftrightarrow$ id: $(M,\Phi)\to(M,\Phi')$ 是微分同胚.

§2 子 流 形

大致说来，流形 M 与其子流形的关系（局部地）犹如 $\mathbf{R}^m$ 与其中某个 k 维平面的关系.

5.2.1 定义 设 $\varnothing\neq A\subset M$. 若在每点 $a\in A$ 处有 M 的图 (U,φ), 使得 $\varphi(A\cap U)$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中某个 k 维平面的开子集，则称 A 为 M 的 **k 维子流形**，称上述的 (U,φ) 为 (M,A) 的**子流形图**；称 $m-k$ 为 A 在 M 中的余维数，记作 $\operatorname{codim}A$; 当 $\operatorname{codim}A=1$ 时称 A 为 M 中的**超曲面**.

可直接验证，5.2.1 中的 A 以 $(A\cap U,\ \varphi|A\cap U)$ 作为图（(U,φ) 是任一子流形图）确是一 k 维流形；只要适当选取 M 的坐标系 $(x^1,\cdots,x^m)$, 就可用其"一段"$(x^1,\cdots,x^k)$ 作为子流

形A的坐标系.

5.2.2 例 1° 设$U=\mathrm{R}^2\setminus([0,\infty)\times 0)$, $V=\mathrm{R}^2\setminus((-\infty,0]\times 0)$,

$\varphi:(0,\infty)\times(0,2\pi)\to U$, $(r,\theta)\longmapsto(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$;

$\psi:(0,\infty)\times(-\pi,\pi)\to V$, $(r,\theta)\longmapsto(r\cos\theta, r\sin\theta)$,

则(U,φ^{-1})与(V,ψ^{-1})是关于(R^2,S^1)的子流形图且覆盖S^1,因此S^1是R^2的1维子流形.

2° 四边形$A=\{(x,y)\in\mathrm{R}^2 \mid |x|+|y|=1\}$不是$\mathrm{R}^2$的子流形. 否则,有$\mathrm{R}^2$的坐标系$(u,v)$,使顶点$a=(0,1)$有坐标$(0,0)$,$A$上邻近$a$的点有坐标$(u,0)$. 从等式$|x(u,0)|+y(u,0)=1=y(0,0)$推出$\pm\partial x(0)/\partial u+\partial y(0)/\partial u=0$,从而$\partial x(0)/\partial u=\partial y(0)/\partial u=0$,但这与$\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\neq 0$矛盾.

另一方面,通过一个以原点为中心的投影A与S^1同胚,从而A可定义为微分同胚于S^1的1维流形. 可见,说"A是一个流形"与说"A是某流形M的子流形"是很不相同的. 前者是一内在概念,与外围空间无关;而后者是一相对概念,依赖于A在外围空间M中的形态.

以下定理给出由可微映射决定子流形的方法.

5.2.3 定理 设$f\in C^\infty(M,N)$, $\mathrm{rank}f(x)=k$, $b\in B=f(M)$. 则(i)$A=f^{-1}(b)$是M的$m-k$维子流形;特别,当f是一浸满时A是M的$m-n$维子流形;(ii)若$f:M\to B$是开映射,则B是N的k维子流形;特别,若$f:M\hookrightarrow N$,则B是N的m维子流形且$f\in\mathrm{Diff}(M,B)$.

注 若$f\in L(\mathrm{R}^m,\mathrm{R}^n)$, $\mathrm{rank}f=k$, 则核$f^{-1}(0)$是R^m的$m-k$维子空间,象$f(\mathrm{R}^m)$是R^n的k维子空间. 用线性代数方法可求得$g\in\mathrm{GL}(m)$, $h\in\mathrm{GL}(n)$,使得$hfg^{-1}(x^1,\cdots,x^m)=(x^1,\cdots,x^k,0,\cdots,0)$. 这一事实多少启示了5.2.3的意义与证

法.

5.2.4 引理 设 $f: U\subset \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 是一 C^∞ 映射，$f(0)=0$，$\mathrm{rank}f(x)=k(x\in U)$. 则存在定义于 $\mathbb{R}^m$ 的某 0-邻域内的微分同胚 g 与定义于 $\mathbb{R}^n$ 的某 0-邻域内的微分同胚 h，使得 $g(0)=0$，$h(0)=0$，$hfg^{-1}(x^1,\cdots,x^m)=(x^1,\cdots,x^k,\ 0,\cdots,0)$.

证 设 $f(x^1,\cdots,x^m)=(y^1,\cdots,y^n)$，可设 $\dfrac{D(y^1,\cdots,y^k)}{D(x^1,\cdots,x^k)}\neq 0$.

定义

$$g(x^1,\cdots,x^m)=(y^1,\cdots,y^k,\ x^{k+1},\cdots,x^m),\qquad (1)$$

则 $g(0)=0$，$\mathrm{rank}g(0)=m$，于是 g 在 $0\in\mathbb{R}^m$ 处是一局部微分同胚(2.5.2). fg^{-1} 在 $0\in\mathbb{R}^m$ 邻近可表成：

$$fg^{-1}(x^1,\cdots,x^m)=(x^1,\cdots,x^k,\ z^{k+1},\cdots,z^n),\qquad (2)$$

其 Jacobi 矩阵为

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ * & \dfrac{\partial(z^{k+1},\cdots,z^n)}{\partial(x^{k+1},\cdots,x^m)} \end{pmatrix},\qquad (3)$$

I_k 是 k 阶单位矩阵. 由 $\mathrm{rank}(fg^{-1})=k$ 推出(3)之右下块为零，因此 $z^i(k<i\leqslant n)$ 是 $(x^1,\cdots,x^k)$ 的函数. 定义

$$h(x^1,\cdots,x^n)=(x^1,\cdots,x^k,\ x^{k+1}-z^{k+1},\cdots,x^n-z^n),\qquad (4)$$

如此得到的 h,g 即合引理所求. □

5.2.3 的证明 给定 $a\in M$，将 5.2.4 用到 f 在 a 处的某个局部表示得出：存在 M 在 a 处的图 (U,φ) 与 N 在 $f(a)$ 处的图 (V,ψ)，$\varepsilon>0$，使得 $\varphi(a)=0$，$\varphi U=B^m(0,\varepsilon)$，$\psi f(a)=0$，$\psi V=B^n(0,\varepsilon)$，$fU\subset V$，

$$\psi f\varphi^{-1}(x^1,\cdots,x^m)=(x^1,\cdots,x^k,\ 0,\cdots,0).\qquad (5)$$

(i) 若 $a\in A$，则(5)推出

$$\varphi(A\cap U)=\{x\in B^m(0,\varepsilon)\,|\,\psi f\varphi^{-1}(x)=0\}$$
$$=0^k\times B^{m-k}(0,\varepsilon),$$

(0^k 记 $\mathbf{R}^k$ 之零元)，可见(U,φ)是关于(M,A)的子流形图.

(ii) 若 $f:M\to B$ 是开映射，则有开集 $W\subset N$，$fU=B\cap W$，可设$W\subset V$. 于是$(W,\psi|W)$是N的一个图，

$$\psi(B\cap W)=\psi f\varphi^{-1}B^m(0,\varepsilon)=B^k(0,\varepsilon)\times 0^{n-k},$$

可见$(W,\psi|W)$是关于(N,B)的子流形图. 若 $f:M\hookrightarrow N$，则(5)表明双射 $f:M\to B$ 是局部微分同胚，从而 $f\in \mathrm{Diff}(M,B)$. □

推论 1 设$U\subset\mathbf{R}^m$是一开集，$F^i\in C^\infty(U)(1\leqslant i\leqslant n)$，$\mathrm{rank}(\partial F^i(x)/\partial x^j)=k$. 则由方程组

$$F^i(x^1,\cdots,x^m)=0,\ i=1,2,\cdots,n \tag{6}$$

决定的"曲面" S (假定$S\neq\varnothing$) 是$\mathbf{R}^m$的 $m-k$ 维子流形.

推论 2 设 $f:U\subset\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^n$，$(u^1,\cdots,u^m)\longmapsto(x^1,\cdots,x^n)$是一$C^\infty$单射，$\mathrm{rank}(\partial x^i/\partial u^j)=m$. 则对任给有界开集 $W\Subset U$，由参数方程

$$x^i=x^i(u^1,\cdots,u^m),\ (u^1,\cdots,u^m)\in W,\ 1\leqslant i\leqslant n \tag{7}$$

决定的"曲面" S是$\mathbf{R}^n$的m维子流形 (参看1.3.3).

推论 3 设$f\in C^\infty(M,N)$，$y\in f(M)$是f的正则值，则$f^{-1}(y)$(称为f的**正则等位面**)是M的 $m-n$ 维子流形.

若 $f:M\hookrightarrow N$，不妨说"M是N的子流形". 反之，任给子流形 $B\subset N$，直接看出 $i:B\subset N$ 是一C^∞嵌入. 可见子流形与嵌入两概念实质上等价. 这种理解导致子流形概念的改形与拓广.

5.2.5 定义 若$f\in C^\infty(M,N)$是一嵌入[单射浸入]，则称(M,f)为N的一个嵌入[浸入]子流形. 称N的两个嵌入[浸入]子流形(M,f)与(M',g)等价，若存在$h\in\mathrm{Diff}(M',M)$，使得 $g=fh$. 嵌入子流形也简称子流形.

若(M,f)是N的嵌入[浸入]子流形，$B=f(M)$上采用由f诱导的微分结构，$i:B\subset N$，则(B,i)(通常就写作B)是

N的等价于(M,f)的嵌入[浸入]子流形．互相等价的嵌入[浸入]子流形今后将不加区别．

5.2.6 **定理** 设(M,f)是N的浸入子流形．则 f 是嵌入[且 $f(M)$是闭集]$\Longleftrightarrow \forall x\in M$，存在$f(x)$的紧邻域$K$：$f^{-1}K$紧[$f$是适映射，即任给紧集$K\subset N$：$f^{-1}K$紧]．

证 设$f:M\subsetneq N$．从(5)看出，$\forall x\in M$，有$f(x)$的紧邻域K：$f^{-1}K$是紧集．若$f(M)$是闭集，则对任给紧集$K\subset N$，可取$K\cap f(M)$的有限紧覆盖$\{K_i\}$：$f^{-1}K_i$皆为紧集．于是从$f^{-1}K\subset\bigcup f^{-1}K_i$推出$f^{-1}K$为紧集．

若$\forall x\in M$，有$f(x)$的紧邻域K：$f^{-1}K$是紧集，则从f：$f^{-1}K\to K\cap f(M)$为同胚(1.3.3)推出$f^{-1}\in C(f(M),M)$，从而$f:M\subsetneq N$．若f是适映射，则首先有$f:M\subsetneq N$．其次证$f(M)$是闭集：设$f(x_n)\to y\in N$，取y的紧邻域K，可设$\{x_n\}\subset f^{-1}K$，又不妨设$x_n\to x\in M$，于是$y=f(x)\in f(M)$．□

5.2.7 **定理** 设(M,f)是N的浸入子流形，$g\in C(P,M)$，P是一流形．若$h=fg\in C^r(P,N)(0\leqslant r\leqslant\infty)$，则$g\in C^r(P,M)$．

证 任给$p\in P$，取$x=g(p)$的邻域U，使$f|U$是一嵌入．因g连续(这是要点!)，$V=g^{-1}(U)$是p的邻域，$g|V=(f|U)^{-1}\circ(h|V)\in C^r$．由此推出$g\in C^r$．□

推论 设$f:M\subsetneq N$，$h:P\to N$满足$h(P)\subset f(M)$．则$f^{-1}h\in C^r(P,M)\Longleftrightarrow h\in C^r(P,N)(0\leqslant r\leqslant\infty)$．

参考文献：[2]，[40]，[45]，[56]，[83]．

习 题

1．设$i:A\subsetneq M$．则$\forall a\in A$，存在a的开邻域U：$A\cap U$在U中是闭的$\Longleftrightarrow$存在开集$G\subset M$与闭集$F\subset M$：$A=G\cap F$．

2．紧流形的子流形只含有限个分支．

3．设$f\in C^\infty(M,N)$是双射，若f是浸入(或浸满，或为局部微分同胚)，则$f\in \mathrm{Diff}(M,N)$．

4. 设$f\in C^1(M,N)$. 若f为浸满，则它是开映射；若f为单射，则$m\leqslant n$。

§3 切空间与切映射

5.3.1 定义 设(U,φ)与(V,ψ)是M的两个图. 当$x=y\in U\cap V$，$a\in\mathrm{R}^m$，$b=D(\psi\varphi^{-1})(\varphi(x))a$时，约定$(x,\varphi,a)$与$(y,\psi,b)$等价，如此所得的含$(x,\varphi,a)$的等价类记作$[x,\varphi,a]$，称它为$M$在$x$的一个切向量. 以$M_x$(或$T_xM$)记$M$在$x$的切向量之全体. M_x依运算

$$\lambda[x,\varphi,a]+\mu[x,\varphi,b]=[x,\varphi,\lambda a+\mu b] \qquad (1)$$

$(\lambda,\mu\in\mathrm{R})$成为一个$m$维实向量空间，称为$M$在$x$的**切空间**. 称$TM=\bigcup_{x\in M}M_x$为$M$的**切丛**；称映射$\pi:TM\to M$，$[x,\varphi,a]\longmapsto x$为**投影映射**.

给定M在x处的坐标系(U,φ,x^i)，令

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x=[x,\varphi,e_i],\quad i=1,2,\cdots,m, \qquad (2)$$

其中$\{e_i\}$是R^m的标准基. 于是对任给$a=(X^i)\in\mathrm{R}^m$有：

$$X=[x,\varphi,a]=X^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x, \qquad (3)$$

此处（及今后）采用**求和约定**：上下成对出现的指标（如(3)中的i）看作求和指标，关于该指标的求和号Σ则省去（如(3)中省去了$\sum\limits_i$）. (3)表明$\{(\partial/\partial x^i)_x\}$是$M_x$的一组基. $(\partial/\partial x^i)_x$中的下标$x$通常省去，这意味着"基点"$x$依上下文是自明的，或容许$x$在$U$内变动. 在后一种情况下，$\{\partial/\partial x^i\}$是$U$内一**活动标架**. 若$(U,\psi,y^i)$是$M$在$x$处的另一坐标系，则从$[x,\varphi,e_i]=[x,\psi,D(\psi\varphi^{-1})(\varphi(x))e_i]$推出：

$$\frac{\partial}{\partial x^i}=\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j},\quad i=1,2,\cdots,m. \qquad (4)$$

若(x^i)是R^n的自然坐标，$x\in\mathrm{R}^n$，则有**自然同构**：

$$(\mathrm{R}^n)_x\cong\mathrm{R}^n,\quad X^i\frac{\partial}{\partial x^i}\longmapsto(X^i). \tag{5}$$

因此，通常将$(\mathrm{R}^n)_x$等同于R^n，$\partial/\partial x^i$等同于e_i.

5.3.2 定义 设$f\in C^1(M,N)$，$x\in M$，$y=f(x)$. 取f在x处的任一局部表示$\psi f\varphi^{-1}$，由

$$f_*[x,\varphi,a]=[y,\psi,D(\psi f\varphi^{-1})(\varphi(x))a] \tag{6}$$

决定一线性映射$f_*:M_x\to N_y$（易验知它与φ,ψ的选取无关），称为f在x的微分，亦记作f_{x*}或df_x.当x取遍M时，得到一映射$f_*:TM\to TN$，称为f的微分或切映射，亦记作df.

给定局部表示$f:(x^1,\cdots,x^m)\longmapsto(y^1,\cdots,y^n)$，(6)直接推出：

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j},\quad i=1,2,\cdots,m. \tag{7}$$

由此直接得出**链规则**：$(gf)_*=g_*f_*(g\in C^1(N,P),\ f\in C^1(M,N))$.

5.3.3 例 1° 设$g:(\alpha,\beta)\subset\mathrm{R}\to M$是一$C^r(1\leqslant r\leqslant\infty)$函数（称为$M$上的$C^r$**曲线**），$(x^i)$是$M$上的坐标系，$x^i(t)(t\in(\alpha,\beta),\ 1\leqslant i\leqslant m)$是$g$的局部表示，则依(7)有

$$g_*\left(\frac{d}{dt}\right)=\dot{x}^i\frac{\partial}{\partial x^i},\quad \dot{x}^i=\frac{dx^i}{dt}. \tag{8}$$

约定$\dot{g}=dg/dt=g_*(d/dt)$，称$\dot{g}(t)$为g在点$g(t)$的切向量.

2° 设$f=(f^1,\cdots,f^n)\in C^1(M,\mathrm{R}^n)$，则对任给$X=X^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}\in M_x$有：

$$df(X)=X^i\frac{\partial f^j(x)}{\partial x^i}e_j=\left(\frac{\partial f^j(x)}{\partial x^i}\right)(X^i), \tag{9}$$

其中$(X^i)\in \mathbb{R}^m$看作列向量．特别当$f\in C^1(M)$时，$df_x\in M_x^*$，M_x^*记M_x的对偶．约定$X(f)=df(X)$，则(9)推出

$$X(f)=X^i\frac{\partial f}{\partial x^i},\ f\in C^1(M), \tag{10}$$

称$X(f)$为f沿X的**方向导数**.

5.3.4 定理 设$a\in M$, $X\in M_a$, 则线性函数$L: C^1(M)\to \mathbb{R}$，$f\longmapsto X(f)$满足"Leibniz 规则"：

$$L(fg)=L(f)g(a)+f(a)L(g),\ f,g\in C^1(M). \tag{11}$$

凡满足(11)的线性函数$L: C^1(M)\to \mathbb{R}$必可表为方向导数.

证 (11)可直接依(10)验证．下面设L是满足(11)的任给线性函数．若$f\in C^1(M)$在a的某邻域U内为零，取$g\in C^\infty(M)$，$\{a\}\prec g\prec U$，则$fg=0$，于是

$$L(f)=L(f)g(a)+f(a)L(g)=L(fg)=0.$$

这表明$L(f)$完全决定于C^1函数芽$[f]_a$(5.1.7)．其次易从(11)推出$L(1)=0$，1记恒等于1的函数．取坐标系(U,φ,x^i)，使$\varphi(a)=0$．任给$f\in C^1(M)$，当x邻近a时，

$$f(x)=f(a)+x^i\int_0^1\frac{\partial}{\partial x^i}f\varphi^{-1}(t\varphi(x))dt. \tag{12}$$

令 $X=L(x^i)\dfrac{\partial}{\partial x^i}\in M_a$，则利用(11)(12)得出$L(f)=X(f)$．□

5.3.4中的L今后将就写作X．因此切向量可解释为方向导数，这也是采用记号$\partial/\partial x^i$的缘由.

下面利用切空间与切映射概念来阐明可微映射的一个重要几何性质.

5.3.5 定义 设$f\in C^1(M,N)$，A，B是N的子流形．若$x\in M\setminus f^{-1}A$，或$f_*M_x+A_y=N_y$，$y=f(x)\in A$，则说f在x横截A；以$f\pitchfork_K A$记f在每点$x\in K(K\subset M)$横截A，当$K=M$时就写作$f\pitchfork A$．若$i: B\subset N$，$i\pitchfork A$，则说A与B横截

相交，记作 $A\pitchfork B$.

若 y 是 $f\in C^1(M,N)$ 的正则值，则显然 $f\pitchfork\{y\}$. 可以说横截性推广了正则值概念，而 5.2.3 则推广成

5.3.6 定理 设 $f\in C^\infty(M,N)$, A, $B\subsetneq N$, $f\pitchfork A$. 若 $S=f^{-1}A\neq\varnothing$，则 S 是 M 的子流形，$S_x=f_{*x}^{-1}(A_y)$ $(x\in S,\ y=f(x))$，$\operatorname{codim}f^{-1}A=\operatorname{codim}A$. 特别，若 $y\in fM$ 是 f 的正则值，则 $(f^{-1}y)_x=\operatorname{Ker}f_{*x}$ $(y=f(x))$；若 $A\pitchfork B$, $A\cap B\neq\varnothing$，则 $A\cap B$ 是 A 与 B 的子流形，$\dim A+\dim B=\dim N+\dim(A\cap B)$.

证 因所涉及的问题带有局部性质，不妨设 $N=U\times V\subset \mathrm{R}^r\times\mathrm{R}^s$ 是 $(0,0)$ 的一开邻域，$A=U$. 设 $p: N\to V$ 是投影，则由横截性定义直接看出，$f\pitchfork A\Longleftrightarrow g=p\circ f$ 以 0 为正则值，因此当 $f\pitchfork A$ 时 $f^{-1}(A)=g^{-1}(0)$ 是 M 的子流形(5.2.3)，且

$$\operatorname{codim}f^{-1}A=\operatorname{codim}g^{-1}(0)=s=\operatorname{codim}A.$$

由 5.2.4，g 有形如 $(x^1,\cdots,x^m)\longmapsto(x^1,\cdots,x^s)$ 的局部表示. 由此推出：$g_*X=0\ (X\in M_x)\Longleftrightarrow X\in(g^{-1}(0))_x$，因此

$$(f^{-1}A)_x=\operatorname{Ker}g_{*x}=f_{*x}^{-1}p_*^{-1}(0)=f_{*x}^{-1}(A_y),\quad y=f(x).\qquad\square$$

注 若 $N=\mathrm{R}^n$，A, B 分别为 k 维与 l 维平面，则5.3.6最后的等式表达了熟知的几何事实.

最后，我们指出切丛 TM 上可导入自然的微分结构. 任给 M 的坐标系 (U,φ)，定义

$$\tilde\varphi: \pi^{-1}U\to\varphi U\times\mathrm{R}^n,\quad [x,\varphi,a]\longmapsto(\varphi(x),\ a),\qquad(13)$$

则 $\{(\pi^{-1}U,\tilde\varphi)\}$ 构成 TM 上的一个图册. 若 $f\in C^{r+1}(M,N)$ $(r\geqslant1)$，则从 f 的局部表示 $(x^1,\cdots,x^m)\longmapsto(y^1,\cdots,y^n)$ 导出 f_* 的局部表示

$$(x^1,\cdots,x^m,\ \xi^1,\cdots,\xi^m)\longmapsto\left(y^1,\cdots,y^n,\cdots,\xi^j\frac{\partial y^i}{\partial x^j},\cdots\right),$$

可见 $f_*\in C^r(TM,TN)$.

参考文献：[2], [12], [34], [40], [45], [51], [83], [84].

习　题

1. 若$f\in C^1(M,N)$，M连通，$f_*=0$，则f取常值.

2. 若$f\in C^1(M,N)$，$g\in C^1(N)$，$X\in TM$，则$(f_*X)(g)=X(g\circ f)$.

3. 设$f\in C^\infty(M,N)$，$\Gamma_f=\{(x,f(x))\,|\,x\in M\}$，$A\subsetneq N$.则$f\pitchfork A\Longleftrightarrow$ $\Gamma_f\pitchfork(M\times A)$.

§4　逼　近　定　理

给定$H\subset C^r(M,N)(0\leqslant r\leqslant\infty)$，可提出以下典型问题：

A．是否每个$f\in C^r(M,N)$可用H中的函数"逼近"？

B．任何$f\in H$经微小"扰动"后是否仍属于H？

赋予$C^r(M,N)$适当的拓扑，以上问题归结为H在$C^r(M,N)$中的稠密性与开性．在很多情况下，采用强拓扑或弱拓扑能使问题A,B获得肯定解答．

5.4.1 定义　任给M的局部有限图册$\Phi=\{(U_i,\varphi_i)\}$，N的图册$\Psi=\{(V_i,\psi_i)\}$，紧集列$K=\{K_i\}$：$K_i\subset U_i$，$\bigcup K_i=M$，$f\in C^r(M,N)$：$fK_i\subset V_i$，$\varepsilon=\{\varepsilon_i\}\subset(0,\infty)$，$0\leqslant k<r+1$，令

$$
\begin{aligned}
&S(f,\Phi,\Psi,K,\varepsilon,k)\\
&=\{g\in C^r(M,N)\,|\,\forall i:\ gK_i\subset V_i,\\
&\quad\|\psi_i f\varphi_i^{-1}-\psi_i g\varphi_i^{-1}\|_{\varphi_i K_i,k}<\varepsilon_i\},
\end{aligned}\tag{1}
$$

记号$\|\cdot\|_{A,k}$依§2.4(12)．任给M的图(U,φ)，N的图(V,ψ)，紧集$L\subset U$，$f\in C^r(M,N)$：$fL\subset V$，$\delta>0$，$0\leqslant k<r+1$，令

$$
\begin{aligned}
&W(f,\varphi,\psi,L,\delta,k)\\
&=\{g\in C^r(M,N)\,|\,gL\subset V,\ \|\psi f\varphi^{-1}-\psi g\varphi^{-1}\|_{\varphi L,k}<\delta\}.
\end{aligned}\tag{2}
$$

以所有形如(1)[(2)]的集作基开集[子基开集]在$C^r(M,N)$中导入的拓扑称为强[弱]拓扑，将装备强[弱]拓扑的空间$C^r(M,N)$记作$C^r_S(M,N)$ [$C^r_W(M,N)$]．

粗略地说，任给$f,g\in C^r(M,N)$，强拓扑用任意正数组控制f,g（在局部坐标下）各阶导数的相互接近，而弱拓扑仅在紧集上控制这种接近；若M是紧的，则两种拓扑一致。

若$N=\mathrm{R}^n$，取定(1)所要求的Φ，K，则形如

$$S(f,\varepsilon,k)=\{g\in C^r(M,\mathrm{R}^n)\mid\forall i:\|f\varphi_i^{-1}-g\varphi_i^{-1}\|_{\varphi_iK_i,k}<\varepsilon_i\} \tag{3}$$

的基开集决定$C^r(M,\mathrm{R}^n)$的强拓扑；而半范族

$$\|f\|_{i,k}=\|f\varphi_i^{-1}\|_{\varphi_iK_i,k},\quad i\geqslant 1,\quad 0\leqslant k<r+1 \tag{4}$$

决定$C^r(M,\mathrm{R}^n)$的弱拓扑。不难验明$C_W^r(M,\mathrm{R}^n)$是一个F-空间，记作$\mathscr{E}^r(M,\mathrm{R}^n)$（参看2.4.4，9.1.1）。

强拓扑是一个很大的拓扑，因此不难设想，它能使问题B较易获肯定解答。

5.4.2 定理 $C^r(r\geqslant 1)$浸入构成$C_S^r(M,N)$的开子集；或者说，C^r浸入在强拓扑下是“稳定的”。对于C^r嵌入、C^r浸满及C^r微分同胚有同样结论。

证 只考虑浸入（对浸满的证明是类似的，而对嵌入与微分同胚需要较细致的论证，可参看[40]）。显然可设$r=1$。给定C^1浸入$f:M\to N$，容易取出(1)所要求的Φ，Ψ，K。令$M_{nm}=L(\mathrm{R}^m,\mathrm{R}^n)$。因$\{a\in M_{nm}\mid\mathrm{rank}\,a=m\}$是$M_{nm}$的开子集，$\varphi_iK_i$是紧集，故当$g\in C^1(M,N)$，$gK_i\subset V_i$，$\|\psi_if\varphi_i^{-1}-\psi_ig\varphi_i^{-1}\|_{\varphi_iK_i,1}$充分小时，$g$在$K_i$上有秩$m$。这表明可选定$\varepsilon=\{\varepsilon_i\}\subset(0,\infty)$，使得$S(f,\Phi,\Psi,K,\varepsilon,1)$只含$C^1$浸入。□

5.4.2对于解“存在性问题”无所帮助，因开集可以是空集；在这一点上，问题A的解答更有意义（也更困难）。下面是一个基本的结果。

5.4.3 定理 $C^\infty(M,N)$在$C_S^r(M,N)(0\leqslant r<\infty)$中（从而亦必在$C_W^r(M,N)$中）稠密。

证 首先证$C^\infty(U,V)$在$C_S^r(U,V)$中稠密，$U\subset\mathrm{R}^m$，$V\subset$

$\mathbf{R}^n$ 是开集，可设 $V=\mathbf{R}^n$. 取定 $f\in C^r(U,\mathbf{R}^n)$，设 $\{K_i\}$ 是 U 中的局部有限紧集族，$U=\bigcup K_i^\circ$，$\{\varepsilon_i\}\subset(0,\infty)$. 令 $B_i=\{j\mid K_i\cap K_j\neq\varnothing\}$，设 B_i 含 m_i 个元. 取 U 上从属于 $\{K_i^\circ\}$ 的单位分解 $\{\lambda_i\}$，令 $\delta_i=\sup_j\|\lambda_j\|_{K_i,r}$，$\varepsilon_i'=\varepsilon_i\Big/\Big[m_i\delta_i\sum_{\beta\leqslant\alpha,|\alpha|\leqslant r}\binom{\alpha}{\beta}\Big]$，$p_i=\min\limits_{j\in B_i}\varepsilon_j'$. 取 $g_i\in C^\infty(U,\mathbf{R}^n)$，使 $\|f-g_i\|_{K_i,r}<p_i$（存在之理由将由 8.3.6 补明），则 $g=\sum\lambda_i g_i\in C^\infty(U,\mathbf{R}^n)$，当 $|\alpha|\leqslant r$，$x\in K_i$ 时，

$$|\partial^\alpha(f-g)(x)|\leqslant\sum_j|\partial^\alpha[\lambda_j(x)(f(x)-g_j(x))]|$$

$$\leqslant\sum_j\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\left|\partial^{\alpha-\beta}\lambda_j(x)\partial^\beta(f-g_j)(x)\right|$$

$$<\sum_{j\in B_i}\sum_{\beta\leqslant\alpha,|\alpha|\leqslant r}\binom{\alpha}{\beta}\delta_i p_j\leqslant\varepsilon_i,$$

可见 $\|f-g\|_{K_i,r}<\varepsilon_i(i=1,2,\cdots)$，$g$ 依强拓扑邻近 f.

其次证：对上述的 U,V，任给 $f\in C_S^r(U,V)$ 的邻域 S 及闭集 A 与开集 W，$A\subset W\subset U$，必有 $h\in S$：h 在 A 的某邻域内属 C^∞，在 $U\setminus W$ 上与 f 一致. 可设 $V=\mathbf{R}^n$. 设 $A\Subset B\Subset W$，$\lambda\in C^\infty(U)$，$B\prec\lambda\prec W$. 定义

$$T:C_S^r(U,\mathbf{R}^n)\to C_S^r(U,\mathbf{R}^n),\quad g\longmapsto\lambda g+(1-\lambda)f,$$

则 T 连续，$Tf=f$. 于是有 f 在 $C_S^r(U,\mathbf{R}^n)$ 内的邻域 S_0：$TS_0\subset S$. 取 $g\in S_0\cap C^\infty$，则 $h=Tg$ 即合于所求.

最后证：任给 $f\in C^r(M,N)$ 的一个形如 (1) 的邻域 $S=S(f,\Phi,\Psi,K,\varepsilon,r)$，有 $S\cap C^\infty\neq\varnothing$. 取开集 W_i：$K_i\subset W_i\Subset U_i$. 今归纳地作出 $g_k\in S$：$g_0=f$，$k\geqslant1$ 时 g_k 在 $\bigcup_1^k K_i$ 的某邻域内属 C^∞，$g_k|W_k^c=g_{k-1}|W_k^c$. 设已作出合于要求的 $g_0,\cdots,g_{k-1}$ $(k\geqslant1)$. 令 $H=\{h\in C^r(U_k,V_k)\mid$ 在 $U_k\setminus W_k$ 上 $h=g_{k-1}\}$，定义

$$(Th)(x)=\begin{cases}h(x), & x\in U_k;\\ g_{k-1}(x), & \text{否则},\end{cases}$$

则$T: H\subset C_S^r(U_k,V_k)\to C_S^r(M,N)$是一连续映射，$T(g_{k-1}|U_k)=g_{k-1}$，于是 $T^{-1}S$ 是 $g_{k-1}|U_k$ 在 $C_S^r(U_k,V_k)$中的邻域．由已证结论，存在 $h\in T^{-1}S$：h 在 $K_k\cap(\bigcup_1^k U_i)$的某邻域内属 C^∞，在 $U_k\setminus W_k$ 上 $h=g_{k-1}$．令 $g_k=Th$，则 g_k 具有所要求的性质．令 $k(x)=\max\{i|\ x\in U_i\}(x\in M)$，则 $k(x)$ 局部地为常数．定义 $g(x)=g_{k(x)}(x)(x\in M)$，则易见 $g\in S\cap C^\infty$．　□

至于浸入或嵌入在 $C^r(M,N)$中是否稠密的问题，其解答强烈地依赖于 M,N 的维数．这方面的一个非常深刻的结果是（参看[40]）：

5.4.4 定理　若 $n\geqslant 2m$ [$n>2m$]，则任何$C^r(r\geqslant 1)$映射[C^r 适映射] $f: M\to N$ 可用 C^∞ 浸入[C^∞ 嵌入]依强拓扑逼近．

本书没有机会利用这一结果．

当要直接证明某个函数族H在$C^r(M,N)$中稠密遇到困难时，通常的作法是：将H表为一可数交$\cap H_k$，使问题A，B对每个H_k可解．于是问题的关键在于$C^r(M,N)$是否为Baire空间(1.3.7)．我们幸而有以下肯定结果（其证明参看[40]）：

5.4.5 定理　$C_S^r(M,N)$ 与 $C_W^r(M,N)$ $(0\leqslant r\leqslant\infty)$ 都是Baire空间，其中 $C_W^r(M,N)$的拓扑可由一完备度量决定．

本书在下节有一次使用以上结果的机会．

本书后面将需要一个较特殊的逼近定理：

5.4.6 定理　设 $a\in U\subset \mathrm{R}^m$，$U$ 是开集，$f\in C^s(U,\mathrm{R}^n)$，$0\leqslant r\leqslant s\leqslant\infty, r<\infty$，$D^kf(a)=0(0\leqslant k\leqslant r)$．则对任给 $\varepsilon>0$，存在$g\in C^s(U,\mathrm{R}^n)$，使得g在a邻近为零，$\|f-g\|_{U,r}<\varepsilon$．

证　可设$a=0$．取 $\varphi\in C^\infty(\mathrm{R}^m)$：$B^m(0,1)\prec\varphi\prec B^m(0,2)$．取充分大的 $\rho>0$，令 $g(x)=[1-\varphi(\rho x)]f(x)$，则 $g\in$

$C^{s}(U,\mathrm{R}^n)$，x 邻近 0 时 $g(x)=0$，$|x|\geqslant 2/\rho$ 时 $g(x)=f(x)$.
若 $|x|<2/\rho$，$|\alpha|\leqslant r$，则

$$|\partial^\alpha(f-g)(x)| = |\partial^\alpha[\varphi(\rho x)f(x)]|$$
$$\leqslant \sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\rho^{|\alpha-\beta|}|(\partial^{\alpha-\beta}\varphi)(\rho x)\partial^\beta f(x)|$$
$$\leqslant \text{const}\sup_{|\beta|\leqslant r}\rho^{r-|\beta|}|\partial^\beta f(x)|$$

利用 $\partial^\beta f(x)$在 $x=0$ 展开的 $r-|\beta|$ 阶 Taylor 公式得出：

$$|\partial^\beta f(x)|\leqslant \text{const}\,\rho^{|\beta|-r}\sup_{|\gamma|=r,|y|<2/\rho}|\partial^\gamma f(y)|$$

（$|\beta|\leqslant r$，$|x|<2/\rho$），由此看出 g 合于所求. □

注　从以上证明看出，当 $f\in C^s_0(U,\mathrm{R}^n)$ 时，可要求 $g\in C^s_c(U,\mathrm{R}^n)$；$\mathrm{R}^n$ 显然可代以 C^n.

推论(Borel)　任何序列 $\{c_\alpha|\alpha\in\mathrm{N}^m\}\subset\mathrm{C}^n$ 是某个 $f\in\mathrm{C}^\infty(\mathrm{R}^m,\mathrm{C}^n)$ 的 Taylor 系数，即 $c_\alpha=\partial^\alpha f(0)/\alpha!$.

事实上，令 $f_k(x)=\sum_{|\alpha|\leqslant k}c_\alpha x^\alpha$，取 $g_k\in C^\infty(\mathrm{R}^m,\mathrm{C}^n)$，$g_k$在 $x=0$ 邻近为零，$\|f_{k+1}-f_k-g_k\|_{\mathrm{R}^m,k}<2^{-k}(k=0,1,\cdots)$，则不难验证 $f=f_0+\sum_0^\infty(f_{k+1}-f_k-g_k)$合于所求.

参考文献：[40]，[45]，[57].

习　题

1. 设$\{A_i\}$是M中的局部有限集族，$M=\bigcup A_i$，$\{\varepsilon_i\}\subset(0,\infty)$. 则存在$f\in C^\infty(M)$：$0<f(x)\leqslant\varepsilon_i$ $(x\in A_i,\ i=1,2,\cdots)$.

2. 设 $f\in C(M,\mathrm{R}^n)$，$\delta(x)\in C(M,(0,\infty))$，则存在 $g\in C^\infty(M,\mathrm{R}^n)$，$|f(x)-g(x)|<\delta(x)$ $(x\in M)$.

3. 任给闭集 $A\subset M$，存在 $f\in C^\infty(M)$：$A=f^{-1}(0)$.

§5　Sard 定理与 Morse 函数

任给 $f\in C^\infty(M,N)$，以 $C(f)$或 C_f 记其临界点（定义见 5.1.3）集. 本节要证明：$N\setminus f(C_f)$包含了N中几乎所有的

点．这一结果基于流形上的“零测集”概念．

5.5.1 定义 设 $A \subset M$．若任给 M 的图 (U, φ)，有 $\mu\varphi(A \cap U)=0$（μ 是 m 维 Lebesgue 测度），则称 A 为零测集，记作 $\mu A=0$（此处不涉及在 M 上定义某个测度！）．

直接从定义可推出零测集的以下性质：

1° 零测集的子集与零测集的可数并是零测集．

2° “零测性”是局部性质：若 $A \subset M$，$\forall a \in A$，存在 a 的邻域 U_a：$\mu(A \cap U_a)=0$，则 $\mu A=0$（利用 1.1.9）．

3° 闭零测集是疏集；σ-紧零测集是瘦集．

5.5.2 引理 设 $A \subset M$，$\mu A=0$，$f \in C^1(M, N)$，$m=n$，则 $\mu f(A)=0$．

证 不妨设 $M=N=\mathrm{R}^n$，$A \subset B^n(0,1)$．取可数个球 B_i 覆盖 A，$B_i \subset B^n(0,2)$．令 $\beta=\sup_{|x|<2}\|f'(x)\|$，则中值定理（2.1.6）推出 fB_i 含于一半径为 βr_i（r_i 是 B_i 之半径）的球，故

$$\mu f(A) \leqslant \sum \mu f(B_i) \leqslant \beta^n \sum \mu B_i.$$

因 B_i 可取得使 $\sum \mu B_i$ 任意小，故 $\mu f(A)=0$． □

5.5.2特别推出，“零测性”在微分同胚下不变，故5.5.1中的条件只需对某个图册验证．其次，若 $f \in C^1(M, N)$，$m<n$，则因 $f(M)=g(M \times 0)$，$g: M \times \mathrm{R}^{n-m} \to N$，$(x, y) \longmapsto f(x)$，5.5.2推出 $\mu f(M)=0$．

5.5.3 Sard 定理（1942） 若 $f \in C^\infty(M, N)$，$m \geqslant 0$，$n \geqslant 1$，$C_0=C(f)$，则 $\mu f(C_0)=0$．

证 不妨设 $M=U \subset \mathrm{R}^m$ 是开集，$N=\mathrm{R}^n$．$m=0$ 时定理显然成立．假定定理已对定义于 $m-1$ 维流形上的 C^∞ 映射证明，$m \geqslant 1$．令

$$C_k=\{x \in U \mid D^i f(x)=0,\ 1 \leqslant i \leqslant k\},\quad k \geqslant 1, \tag{1}$$

则 $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots$，于是

$$f(C_0)\subset[\bigcup_{0\leq i<k}f(C_i\setminus C_{i+1})]\cup f(C_k),\ k\geqslant 1. \tag{2}$$

因此证 $\mu f(C_0)=0$ 归于以下三个步骤：

1° 证 $\mu f(C_0\setminus C_1)=0$. 因 $n=1$ 时 $C_0=C_1$，故可设 $n>1$. 任取 $a\in C_0\setminus C_1$，今证有 a 的邻域 V：$\mu f(C_0\cap V)=0$. 因 $Df(a)\neq 0$，不妨设 $\partial f^1(a)/\partial x^1\neq 0(f=(f^1,\cdots,f^n))$. 令

$$g(x^1,\cdots,x^m)=(f^1(x),\ x^2,\cdots,x^m), \tag{3}$$

则 g 在 a 处是一局部微分同胚. 取 a 的邻域 V，使得 $g|V$：$V\cong A\times B\subset\mathrm{R}\times\mathrm{R}^{m-1}$，于是

$$fg^{-1}: A\times B\to\mathrm{R}\times\mathrm{R}^{n-1},\ (t,y)\longmapsto(t,\ \varphi_t(y)), \tag{4}$$

其中 $\varphi_t\in C^\infty(B,\ \mathrm{R}^{n-1})(t\in A)$. 从 fg^{-1} 的 Jacobi 式看出，$g^{-1}(t,y)\in C_0\cap V\Longleftrightarrow(t,y)\in C(fg^{-1})\Longleftrightarrow y\in C(\varphi_t)$，于是

$$f(C_0\cap V)=\bigcup_{t\in A}t\times\varphi_t(C(\varphi_t)). \tag{5}$$

由归纳假设，$\mu_{n-1}\varphi_t(C(\varphi_t))=0$，$\mu_{n-1}$ 记 $n-1$ 维 Lebesgue 测度. 于是由(5)及 Fubini 定理(3.1.8)推出：

$$\mu f(C_0\cap V)=\int_A\mu_{n-1}\varphi_t(C(\varphi_t))dt=0.$$

2° 证 $\mu f(C_k\setminus C_{k+1})=0(k>0)$. 令

$$A_{i,\alpha}=\{x\in U\,|\,\partial^\alpha f^i(x)=0,\ \mathrm{grad}\partial^\alpha f^i(x)\neq 0\}, \tag{6}$$

则 $C_k\setminus C_{k+1}\subset\bigcup\{A_{i,\alpha}\,|\,1\leqslant i\leqslant n,\ |\alpha|=k\}$. 于是只要证：对任一取定的 $A=A_{i,\alpha}$，有 $\mu f(C_0\cap A)=0$. 不妨设 $A=A_{1,\alpha}(|\alpha|=k)$. 5.2.3 推出 A 是 R^m 中的超曲面，于是由归纳假设有 $\mu f(C(f|A))=0$，因此只需证 $C_0\cap A\subset C(f|A)$. 任给 $a\in C_0\cap A$，令 $w(x)=\partial^\alpha f^1(x)$，不妨设 $\partial w(a)/\partial x^1\neq 0$. 定义

$$h(x^1,\cdots,x^m)=(w(x),\ x^2,\cdots,x^m), \tag{7}$$

则 h 在 a 处是一局部微分同胚，$fh^{-1}(0,\ x^2,\cdots,x^m)$ 是 $f|A$ 在 a 处的局部表示，从其 Jacobi 矩阵看出 $a\in C(f|A)$.

3° 证 $\mu f(C_k)=0$(k 充分大). 任取棱长为 λ 的 m 维方体 $Q\subset U$，$\forall x\in Q\cap C_k$，$y\in Q$，由 Taylor 公式 (2.2.6) 推出

$|f(y)-f(x)|\leqslant\beta|y-x|^k$，$\beta$ 与 x,y 无关．分 Q 为 s^m 个棱长为 λ/s 的子体，任取其中一个交于 C_k 者 Q'，则

$$\mu f(Q')\leqslant\text{const}(\lambda/s)^{kn},$$

于是
$$\mu f(Q\cap C_k)\leqslant\text{const}\,s^m(\lambda/s)^{kn}.$$

令 $s\to\infty$（设 $k>m/n$）得出 $\mu f(Q\cap C_k)=0$，由此推出 $\mu f(C_k)=0$．□

因闭子集 C_j 必是 σ-紧的，于是有

推论 在5.5.3的条件下，$f(C_f)$是N中的瘦集，从而 f 的正则值在N中稠密（参看1.3.8）．

可微映射有"足够多"的正则值这一事实有许多重要的应用，下面就是一个典型例子．

5.5.4 横截性定理 设 A 是N的子流形，$F=\{f\in C^\infty(M,N)|f\pitchfork A\}$，则$F$ 在$C_S^\infty(M,N)$中稠密．

证 首先证以下局部结果：设$K\subset U\subset\mathrm{R}^m$，$K$是紧集，$U$是开集，$H=\{f\in C^\infty(U,\mathrm{R}^n)|f\pitchfork_K\mathrm{R}^k\}(k\leqslant n)$，则$H$是$C_W^\infty(U,\mathrm{R}^n)$中的稠密开集．设 $p:\mathrm{R}^k\times\mathrm{R}^{n-k}\to\mathrm{R}^{n-k}$ 是投影．取定 $f\in H$，K必可表为有限个紧集K_i之并，K_i 与$f^{-1}\mathrm{R}^k$ 不交，或者K_i只含 $p\circ f$ 的正则点（参看5.3.6之证明）．$C_W^\infty(U,\mathrm{R}^n)$中充分接近 f 的函数亦有同样性质，因此H是开的．其次任给 $f\in C^\infty(U,\mathrm{R}^n)$，依5.5.3有 $p\circ f$ 的正则值 $y_j\in\mathrm{R}^{n-k}$，$y_j\to0(j\to\infty)$．令 $f_j=f-y_j$，则 $f_j\in H$，在 $C_W^\infty(U,\mathrm{R}^n)$中 $f_j\to f$，H 的稠密性得证．

现在取M的局部有限图册$\{(U_i,\varphi_i)\}$及紧覆盖$\{K_i\}$：U_i 相对紧，$K_i\subset U_i$．令$F_i=\{f\in C^\infty(M,N)|f\pitchfork_{K_i}A\}$，则$F=\cap F_i$，只需证每个 F_i 是 $C_S^\infty(M,N)$中的稠密开集．任给$f\in F_i$，当$g\in C^\infty(M,N)$依强拓扑邻近 f 时，$g|U_i$ 依弱拓扑邻近 $f|U_i$，于是已证局部结论推出 $g\in F_i$，F_i 是开的．其次任给 $f\in C^\infty(M,N)$，可设 $fK_i\subset V_i$，(V_i,ψ_i) 是关于(N,A)的子流形图

(5.2.1). 设 $K_i \Subset L_i \Subset W_i = U_i \cap f^{-1}V_i$, 取 $\lambda \in C^\infty(M)$: $L_i \prec \lambda \prec W_i$. 当 $g \in C^\infty(W_i, V_i)$依弱拓扑邻近 $f|W_i$ 时,

$$Tg = \begin{cases} \psi_i^{-1} \circ (\psi_i f + \lambda(\psi_i g - \psi_i f)), & \text{在} W_i \text{上}; \\ f, & \text{在} W_i^c \text{上} \end{cases}$$

依强拓扑邻近 f, 在 L_i 上 $Tg = g$. 于是从已证局部结论推出 F_i 在 $C_S^\infty(M, N)$中稠密. □

粗略地说, 5.5.4 表明横截具有"一般性".

5.5.5 定义 设 $a \in M$是 $f \in C^\infty(M)$的临界点(即 $df(a) = 0$, 参看 2.7.1, 5.1.3). 若 f 关于坐标系(x^i)的 "Hesse 矩阵" $H = (\partial^2 f(a)/\partial x^i \partial x^j)$是奇异的(容易验证这与坐标系的选择无关), 则说 a 是退化的. 若 f 设有退化临界点, 则称 f 为 Morse 函数.

C^∞ 函数在其非退化临界点邻近的结构可通过某种"标准形"予以彻底阐明.

5.5.6 Morse 引理 若 a 是$f \in C^\infty(M)$的一个非退化临界点, 则存在M的坐标系(U, φ, y^i), 使得

$$f\varphi^{-1}(y^1, \cdots, y^m) = f(a) - (y^1)^2 - \cdots - (y^\lambda)^2 + \cdots + (y^m)^2. \tag{8}$$

证 不妨设$M = \mathrm{R}^m$, $a = 0$, $f(0) = 0$. 由 Taylor 公式,

$$f(x) = \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 f(tx)}{\partial x^i \partial x^j} x^i x^j dt = x^i x^j h_{ij}(x), \tag{9}$$

其中
$$h_{ij}(x) = \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 f(tx)}{\partial x^i \partial x^j} dt \in C^\infty.$$

令$H(x) = (h_{ij}(x))$, $x^t = (x^1, \cdots, x^m)$, x 看作列向量, 则(9)可写成矩阵形式: $f(x) = x^t H(x) x$, 这是一个变系数的二次型. 从线性代数知道, 存在$P \in \mathrm{GL}(m)$, $P^t H(0) P = \mathrm{diag}(-1, \cdots, -1, 1, \cdots, 1) = B$. 将$H(0)$化为对角标准形$B$的过程归结为对$H(0)$进行有限次协合的行与列变换, 这种变换自然扩张到

$H(x)$，只要 $|x|$ 充分小．因此存在GL(m)-值的C^∞函数$P(x)$，写作 P_x，使得 $P_x^t H(x) P_x = B$．令 $y = P_x^{-1} x$，则从 $(\partial y^i / \partial x^j)_{x=0} = P_0^{-1}$ 看出 $y = (y^1, \cdots, y^m)$ 可作为 $x=0$ 处的局部坐标，而

$$f(x) = x^t H(x) x = y^t P_x^t H(x) P_x y = y^t B y$$
$$= -(y^1)^2 - \cdots - (y^\lambda)^2 + \cdots + (y^m)^2. \qquad \square$$

注　(8)中的 λ 称为 f 在 a 的指数，它与坐标系无关，且完全刻划了 f 在 a 邻近的性态．

从 5.5.6 直接看出，非退化临界点必为孤立点，因此紧流形上的 Morse 函数至多有有限个临界点．

关于 Morse 函数有一个"Sard 定理型"的结果．

5.5.7 定理　设 $M \subsetneq \mathrm{R}^n$，$f \in C^\infty(M)$，$f_a(x) = f(x) + a \cdot x$，$a \in \mathrm{R}^n$．则对几乎所有 $a \in \mathrm{R}^n$；f_a 是 M 上的 Morse 函数．

注　因 M 总可以嵌入某个 R^n 中([40])，故 5.5.7 指明任何 $f \in C^\infty(M)$ 稍经"扰动"之后得到 Morse 函数．

证　首先设 $M \subset \mathrm{R}^n$ 是开子流形．令 $g(x) = f'(x)$，则 $f_a'(x) = g(x) + a$，$f_a''(x) = g'(x)$，可见 x 是 f_a 的退化临界点 $\Rightarrow -a$ 是 g 的临界值，于是定理结论由 Sard 定理推出．

一般情况下，M 总可用可数个图覆盖，其中每个用$(x^1, \cdots, x^n)$ ((x^i)是 R^n 的自然坐标) 中的 m 个坐标作局部坐标，因此不妨设 M 可用 $(x^1, \cdots, x^m)$ 作坐标．令 $y = (x^1, \cdots, x^m)$，$z = (x^{m+1}, \cdots, x^n)$．对给定的 $c \in \mathrm{R}^{n-m}$，由第一段所证，对几乎所有 $b \in \mathrm{R}^m$：$f_{(b,c)}(x) = [f(y) + c \cdot z] + b \cdot y$ 是Morse 函数．令 c 遍取 R^{n-m}，由 Fubini 定理推出所要证．$\square$

参考文献：[1]，[34]，[40]，[45]，[57]，[66]，[70]，[80]，[81]．

习　题

1．对 $f \in C^\infty(\mathrm{R})$ 直接证明 Sard 定理．

2. 设$P\subset\mathrm{R}$是Cantor集. 取$f\in C^\infty(\mathrm{R})$: $f\geqslant 0$, $f^{-1}(0)=P$; 令$g(x)=\int_0^x f(t)dt$, 则$g(C_g)$是不可数零测集.

3. 设$K\subset M$是紧集, $f\in C^\infty(M,\mathrm{R}^n)$, $C_f=M$. 则存在$g\in C^\infty(\mathrm{R}^n)$: $g\circ f|K=0$, $g^{-1}(0)$为疏集.

§6 向量丛

简单说来，向量丛是由形如$U\times\mathrm{R}^n$($U\subset\mathrm{R}^m$是开集)的"构块"沿"纤维"$x\times\mathrm{R}^n$光滑地接合起来的流形.

5.6.1 定义 称一流形E为M上的n维实[复]向量丛，若存在$p\in C^\infty(E,M)$及一集$\Phi=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$，满足:

VB_1. $U_\alpha\subset M$是开集且$M=\bigcup U_\alpha$;

VB_2. $\varphi_\alpha: p^{-1}U_\alpha\to U_\alpha\times\mathrm{R}^n$是微分同胚; $\forall x\in U_\alpha$: 纤维$E_x=p^{-1}(x)$是n维向量空间, $\varphi_\alpha|E_x:\xi\longmapsto(x,\varphi_{\alpha x}(\xi))$, $\varphi_{\alpha x}: E_x\to\mathrm{R}^n$是一线性同构(对于"复"的情况以$\mathrm{C}^n$代$\mathrm{R}^n$);

VB_3. Φ是满足条件VB_1, VB_2的一个极大族. p与Φ分别称为E的(丛)投影与向量丛结构，每个$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$称为$E$的**向量丛图**. 称每个满足$\mathrm{VB}_1$, VB_2的集为向量丛图册(它唯一决定一向量丛结构).

当$x\in M$, $\xi\in E_x$时，有时也将ξ写作ξ_x或(x,ξ).

下面只讨论实向量丛，所有概念与结论都可自然地推广到复向量丛.

设E如5.6.1. 若将每个$x\in M$等同于E_x的零元，则可以认为$M\subset E$. 任给$x\in U_\alpha\cap U_\beta$, 令$g_{\alpha\beta}(x)=\varphi_{\alpha x}\varphi_{\beta x}^{-1}$, 则$(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathrm{R}^n\cong(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathrm{R}^n$, $(x,y)\longmapsto(x,g_{\alpha\beta}(x)\cdot y)$, 可见$U_\alpha\cap U_\beta\to\mathrm{GL}(n)$, $x\longmapsto g_{\alpha\beta}(x)$为$C^\infty$映射, $\mathrm{GL}(n)$看作$L(\mathrm{R}^n)$的开子流形. 反之，不难建立以下结果:

5.6.2 定理 给定一集E及满射$p: E\to M$. 若每个$E_x=$

$p^{-1}(x)(x\in M)$是一向量空间，$\Phi=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$满足5.6.1中的$\mathrm{VB}_1$，且$\varphi_{\alpha x}(x\in U_\alpha$，记号依5.6.1)：$E_x\to\mathrm{R}^n$为线性同构，$U_\alpha\cap U_\beta\to\mathrm{GL}(n)$，$x\longmapsto\varphi_{\alpha x}\varphi_{\beta x}^{-1}$是$C^\infty$映射，则$E$上存在唯一微分结构，使$E$成为$M$上以$\Phi$为向量丛图册的$n$维向量丛.

5.6.3 例 1° 单个向量丛图$(M,1_{M\times\mathrm{R}^n})$定义$M\times\mathrm{R}^n$为$M$上的向量丛，从投影就是投影$M\times\mathrm{R}^n\to M$.

2° 设$\pi:TM\to M$定义如5.3.1. 任给M的图(U,φ)，令

$$\tilde{\varphi}:\pi^{-1}U\to U\times\mathrm{R}^m,\ [x,\varphi,a]\longmapsto(x,a),\tag{1}$$

则$\tilde{\varphi}_x:M_x\to\mathrm{R}^m$，$[x,\varphi,a]\longmapsto a$为线性同构；当$(V,\psi)$是另一个图时，$x\longmapsto\tilde{\varphi}_x\tilde{\psi}_x^{-1}=D(\varphi\psi^{-1})(\psi(x))$是$C^\infty$函数. 由5.6.2，$TM$是$M$上的向量丛，其微分结构与§3中引入者一致.

3° 若E是M上的n维向量丛，A是M的子流形，则$\bigcup_{x\in A}E_x$是A上的n维向量丛，记作$E|A$或E_A，称为E在A上的限制.

4° 设E,F分别为M,N上的向量丛，任给E与F的向量丛图(U,φ)与(V,ψ)，依$h_{(x,y)}=\varphi_x\times\psi_y$定义一向量丛图$(U\times V,h)$，如此将$E\times F$定义为$M\times N$上的向量丛，称为$E$与$F$的积丛. $TM\times TN(\cong T(M\times N))$是积丛的典型例子. 若$E,F,(U,\varphi),(V,\psi)$同上，但$M=N$，$U=V$，令$h_x=\varphi_x\times\psi_x$，则形如$(U,h)$的向量丛图定义出$M$上一向量丛$E\oplus F$，任给$x\in M$：$(E\oplus F)_x=E_x\oplus F_x$. 称$E\oplus F$为$E$与$F$的直和.

以下设E,E'分别为M,M'上的向量丛，以p,p'记投影，n,n'记纤维维数.

5.6.4 定义 设$f\in C^r(E,E')(0\leqslant r\leqslant\infty)$. 若$\forall x\in M\subset E$，$y=f(x)\in M'$，$f_x=f|E_x\in L(E_x,E'_y)$，则称$f$为$C^r$(向量丛)同态；当每个$f_x(x\in M)$为单射[满射，双射]时称$f$为单同态[满同态，双同态]；若$M=M'$，$f|M=1_M$，则称$f$为

M-同态．以$\mathrm{Hom}(E,E')$记从E到E'的C^∞同态之全体．若$f\in\mathrm{Hom}(E,E')$是双射且$f^{-1}\in\mathrm{Hom}(E',E)$，则称$f$为（向量从）同构．同时是$M$-同态的同构称为$M$-同构；$M$-同构于$M\times\mathrm{R}^n$的向量从称为平凡从；当切从$TM$为平凡从时称$M$为可平行化流形．

任给E的向量从图(U,φ)，$\varphi: E|U\to U\times\mathrm{R}^n$是一$U$-同构，这也是向量从图的特征性质．若$f\in C^\infty(M,N)$，则显然$f_*\in\mathrm{Hom}(TM,TN)$，且$f$是浸入[浸满，局部微分同胚]$\Longleftrightarrow$ f_*：$TM\to TN$是单同态[满同态，双同态]．

5.6.5 定义 若$[C^r]$映射$\sigma: M\to E$满足$p\circ\sigma=1_M$，则称σ为E的$[C^r]$截面．以$\Gamma^r(E)$记E的C^r截面之全体，令$\Gamma(E)=\Gamma^\infty(E)$，$\Gamma(U,E)=\Gamma(E|U)$．若$U\subset M$是开集，$\{\sigma_i\}\subset\Gamma(U,E)$，$\forall x\in U$，$\{\sigma_i(x)\}$线性无关[是$E_x$的基]，则说$\{\sigma_i\}$在$U$内逐点线性无关[是$E$在$U$内的一组局部基]；$E$在$M$上的一组基也称为整体基．

任给截面$\sigma: M\to E$，今后将依方便交替使用记号$\sigma(x)$与$\sigma_x(x\in M)$．若$\sigma\in\Gamma^r(M\times\mathrm{R}^n)$，则有唯一的$f\in C^r(M,\mathrm{R}^n)$，$\sigma(x)=(x,f(x))(x\in M)$，通常对$\sigma$与$f$不加区别，因此可认为$\Gamma^r(M\times\mathrm{R}^n)=C^r(M,\mathrm{R}^n)$．

5.6.6 定理 $\{\sigma_i: U\to E\}$是E的局部基$\Longleftrightarrow$存在E的向量从图(U,φ)，$\varphi\sigma_i(x)=(x,e_i)(x\in U)$，$\{e_i\}$是$\mathrm{R}^n$的标准基．

证 若$\{\sigma_i\}\subset\Gamma(U,E)$是一局部基，令

$$\varphi: p^{-1}U\to U\times\mathrm{R}^n,\ \xi^i\sigma_i(x)\longmapsto(x,\xi^ie_i),\qquad(2)$$

则(U,φ)是定理所要求的向量从图．反之，若(U,φ)是E的向量从图，$\sigma_i(x)=\varphi^{-1}(x,e_i)(x\in U,\ 1\leqslant i\leqslant n)$，则$\{\sigma_i\}$显然是$E$在$U$内的局部基．□

推论 E是平凡的$\Longleftrightarrow E$有一组整体基；1维从是平凡的

$\Longleftrightarrow$ 其上存在无处为零的 C^∞ 截面.

若 $\{\sigma_i\}\subset\Gamma(U,E)$ 是一局部基，$\sigma:M\to E$ 是一截面，$\sigma|U=\xi^i\sigma_i$（或就写作 $\sigma=\xi^i\sigma_i$），则称 ξ^i 为 σ 关于基 $\{\sigma_i\}$ 的分量或坐标. 显然，$\sigma\in\Gamma^r(E)\Longleftrightarrow\sigma$ 关于任何局部基的分量是 C^r 的. 这一结论今后将特别用于张量场.

向量丛的截面在很多方面接近于通常的向量值函数，因此很适于作为分析学的对象.

5.6.7 定理 设 $A\subset W\subset M$，A 是闭[紧]集，W 是开集，$\sigma\in\Gamma^r(W,E)$. 则存在 $s\in\Gamma^r(E)$ [$s\in\Gamma^r_c(E)$，记号 Γ^r_c 的意义依 §1.4(2)]，使得对 A 的某邻域 U 有 $\sigma|U=s|U$.

证 取闭[紧]集 U：$A\Subset U\Subset W$；依 5.1.6 之推论[5.1.5]，$\exists\lambda\in C^\infty(M)$ [$\lambda\in C^\infty_c(M)$]：$U\prec\lambda\prec W$. 令

$$s(x)=\begin{cases}\lambda(x)\sigma(x), & x\in W;\\ 0, & x\in W^c,\end{cases}\tag{3}$$

则 s 即合于所求. □

5.6.8 定理 设 $A\subset M$ 是闭集，$\sigma:A\to E$ 满足：(i) $p\circ\sigma=1_A$；(ii) $\forall a\in A$，$\exists s_a\in\Gamma^r(W_a,E)$：$s_a|A\cap W_a=\sigma|A\cap W_a$，$W_a$ 是 a 的一邻域，则存在 $s\in\Gamma^r(E)$：$s|A=\sigma$. 若 A 是 M 的闭子流形，则条件(ii)可代以条件：(iii) $\sigma\in C^r(A,E)$.

证 取定条件(ii)中的 W_a，s_a，不妨设 $s_a\in\Gamma^r(E)$（依 5.6.7）. 取 A 上从属于 $\{W_a\}$ 的单位分解 $\{\lambda_a\}$，定义

$$s(x)=\sum_{a\in A}\lambda_a(x)s_a(x),\quad x\in M,\tag{4}$$

则 $s\in\Gamma^r(E)$，$s|A=\sigma$. 今证当 A 是闭子流形时(iii)⇒(ii)：因(ii)(iii)都是局部性条件，不妨设 $E=\mathrm{R}^m\times\mathrm{R}^n$，$A=\mathrm{R}^k\subset\mathrm{R}^m$，$\sigma\in C^r(\mathrm{R}^k,\mathrm{R}^n)$. 定义 $s:\mathrm{R}^k\times\mathrm{R}^{m-k}\to\mathrm{R}^n$，$(x,y)\longmapsto\sigma(x)$，则 $s\in C^r(\mathrm{R}^m,\mathrm{R}^n)$，$s|\mathrm{R}^k=\sigma$. □

推论 任给 $x\in M$，$\xi\in E_x$，存在 $\sigma\in\Gamma(E)$：$\sigma(x)=\xi$.

5.6.9 定义 设$F\subset E$. 若$\forall x\in M$，存在E的向量丛图(U,φ)：$x\in U$，$\varphi(F\cap p^{-1}U)=U\times \mathrm{R}^k\times 0^{n-k}$，则称$F$为$E$的**$k$维子丛**（易验证形如$(U,\varphi|(F\cap p^{-1}U))$的向量丛图确定义$F$为一$k$维向量丛），称上述的$(U,\varphi)$为关于$(E,F)$的**子向量丛图**（与5.2.1对照）.

5.6.10 定理 $F\subset E$是一k维子丛$\Longleftrightarrow\forall x\in M$：$F_x=F\cap E_x$是$E_x$的$k$维子空间，且存在$x$的邻域$U$及$\{\sigma_1,\cdots,\sigma_k\}\subset\Gamma(U,E)$，使当$y\in U$时$\{\sigma_i(y)\}$是$F_y$的基.

证 只需证逆命题. 设$\{\sigma_i\}$如定理所述，取E在U（必要时适当缩小U）内的一组局部基$\{s_j\}$. 设$\sigma_i=\beta_i^j s_j(1\leqslant i\leqslant k)$，不妨设$\det(\beta_i^j(y))_{1\leqslant i,j\leqslant k}\neq 0(y\in U)$. 令$\sigma_j=s_j(k<j\leqslant n)$，则$\{\sigma_1,\cdots,\sigma_n\}$是$E$在$U$内的局部基. 若依(2)定义$\varphi$，则$(U,\varphi)$是关于$(E,F)$的子向量丛图. □

推论 若$\{\sigma_1,\cdots,\sigma_k\}\subset\Gamma(E)$逐点线性无关，则$\{\sigma_i\}$生成$E$的一$k$维子丛$F$，$F_x(x\in M)$以$\{\sigma_i(x)\}$为基.

5.6.11 定理 设$f:E\to E'$是一M-同态，$\operatorname{rank}f_x=k$. 则"核"$\operatorname{Ker}f=\bigcup_{x\in M}\operatorname{Ker}f_x$是$E$的$n-k$维子丛；象$f(E)$是$E'$的$k$维子丛（与5.2.3相对照）.

证 因5.6.9的条件是局部的，不妨设

$$f:U\times\mathrm{R}^n\to U\times\mathrm{R}^{n'},\ (x,y)\longmapsto(x,f_x(y)),\qquad(5)$$

其中$f_x\in L(\mathrm{R}^n,\mathrm{R}^{n'})$可看作$n'\times n$阶矩阵. 用线性代数方法可求得$h_x\in\mathrm{GL}(n')$，$g_x\in\mathrm{GL}(n)$，使$h_xf_xg_x^{-1}=\begin{pmatrix}I&0\\0&0\end{pmatrix}$，$I$是$k$阶单位矩阵，$h_x,g_x$是$x$的$C^\infty$函数（必要时适当缩小$U$）. 定义$U$-同构：

$$g:U\times\mathrm{R}^n\to U\times\mathrm{R}^n,\ (x,y)\longmapsto(x,g_x(y));$$
$$h:U\times\mathrm{R}^{n'}\to U\times\mathrm{R}^{n'},\ (x,z)\longmapsto(x,h_x(z)),$$

则 $$hfg^{-1}:U\times\mathrm{R}^k\times\mathrm{R}^{n-k}\to U\times\mathrm{R}^k\times\mathrm{R}^{n'-k},$$

$$(x,u,v)\longmapsto(x,u,0).$$

故
$$g(\operatorname{Ker} f)=U\times 0^k\times \mathrm{R}^{n-k};$$
$$hf(E)=U\times\mathrm{R}^k\times 0^{n'-k},$$

由此看出所要证. □

参考文献：[2], [22], [40], [44], [45], [57].

习　题

1. 若 $f:E\to E'$ 是单同态，$f|M:M\to M'$ 是浸入[嵌入]，则 $f:E\to E'$ 是浸入[嵌入]. 特别，$g:M\subset N\Rightarrow g_*:TM\subset TN$.

2. 若 $\sigma\in\Gamma(E)$，则 (M,σ) 是 E 的闭子流形；特别，$(M,0)$ 是 E 的闭子流形，0 记零截面.

3. E_x 的一组基可扩张为 E 的一组局部基.

§7　向　量　场

令 $\mathscr{X}(M)=\Gamma(TM)$，称每个 $X\in\mathscr{X}(M)$ 为 M 上的(C^∞)向量场.

5.7.1 定义　设 $X\in\mathscr{X}(M)$. 若一 C^1 曲线 $g:I\to M$ 满足：$\dot g(t)=X(g(t))$，$g(0)=x$，$0\in I$，$I\subset R$ 是开区间(参看5.3.3之1°)，则称 g 为 X 的过点 x 的积分曲线.

求 $X\in\mathscr{X}(M)$ 的积分曲线相当于解场微分方程

$$\frac{dx}{dt}=X(x). \tag{1}$$

任取 M 的图 (U,φ)，$X_\varphi=\varphi_*\circ X|U\circ\varphi^{-1}\in\mathscr{X}(\varphi U)$. 因 $T(\varphi U)\cong\varphi U\times\mathrm{R}^m$，可以认为 $X_\varphi\in C^\infty(\varphi U,\mathrm{R}^m)$. 任给 C^1 曲线 $g:I\to U$，从 $\frac{d}{dt}(\varphi\circ g)=\varphi_*(dg/dt)$ 看出，g 是 X 的过 $x\in U$ 的积分曲线 $\Longleftrightarrow\bar g=\varphi\circ g$ 满足方程 $d\bar g/dt=X_\varphi(\bar g)$ 且 $\bar g(0)=\varphi(x)$.

5.7.2 定理　任给 $X\in\mathscr{X}(M)$，存在唯一 C^∞ 映射，$\theta:W\subset\mathrm{R}\times M\to M$，它满足：(i) $W=\bigcup_{x\in M}I_x\times x$，$I_x=(\alpha_x,$

$\beta_x)$, $-\infty\leqslant\alpha_x<0<\beta_x\leqslant\infty$; (ii) $\forall x\in M$; $\theta_x(t)=\theta(t,x)$ $(t\in I_x)$是X过x的积分曲线；若$g(t)(t\in I)$是X过x的积分曲线，则$I\subset I_x$，$g=\theta_x|I$；(iii) $I_x=t+I_{\theta(t,x)}((t,x)\in W)$；当$s+t$，$t\in I_x$时，

$$\theta(s+t,x)=\theta(s,\theta(t,x)). \tag{2}$$

证　任给$a\in M$，取M在a处的图(U,φ)．将2.6.1用于方程$\frac{dy}{dt}=X_\varphi(y)$得出：存在$\sigma_1\in C^\infty(I_\delta\times V_1,\varphi U)$，$I_\delta=(-\delta,\delta)$，$\delta>0$，$V_1$是$\varphi(a)$的一邻域，$\frac{\partial}{\partial t}\sigma_1(t,y)=X_\varphi(\sigma_1(t,y))$，$\sigma_1(0,y)=y((t,y)\in I_\delta\times V_1)$．令$V=\varphi^{-1}V_1$，$\sigma(t,x)=\varphi^{-1}\sigma_1(t,\varphi(x))$，则$\sigma\in C^\infty(I_\delta\times V,U)$，$\sigma(0,x)=x$，$\frac{\partial}{\partial t}\sigma(t,x)=X(\sigma(t,x))((t,x)\in I_\delta\times V)$．这表明过每点$x\in M$存在$X$的积分曲线．

若$g_i(t)(t\in I_i,i=1,2)$是X过x的两条积分曲线，则$I=\{t|g_1(t)=g_2(t)\}$是开区间$I_1\cap I_2$的闭子集．对方程(1)局部地应用经典的唯一性定理推出I也是$I_1\cap I_2$的开子集，因此$I=I_1\cap I_2$．由此推出，存在X过x的“最大积分曲线”$\theta_x(t)$，其定义区间$I_x=(\alpha_x,\beta_x)$是X的所有过x的积分曲线的定义区间之并．令$W=\bigcup_{x\in M}I_x\times x$，$\theta(t,x)=\theta_x(t)((t,x)\in W)$，则$\theta$显然满足(i)(ii)．

任给$x\in M$，$t\in I_x$，令$g(s)=\theta(t+s,x)$，$s\in I_x-t$．显然g是X过点$\theta(t,x)$的积分曲线，因此$I_x-t\subset I_{\theta(t,x)}$，$\theta(t+s,x)=\theta(s,\theta(t,x))$．其次，从$I_{\theta(t,x)}+t\subset I_{\theta(-t,\theta(t,x))}=I_x$推出$I_x=t+I_{\theta(t,x)}$，这就验证了(iii)．

最后证$W\subset\mathbf{R}\times M$是开集且$\theta\in C^\infty(W,M)$．令

$$W_0=\{(t,x)\in W\,|\,存在(t,x)的邻域V\subset W：\theta|V\in C^\infty\}.$$

从证明的第一段看出$0\times M\subset W_0$．若$W_0\neq W$，则有$(t_0,x_0)\in$

$W\setminus W_0$，不妨设 $t_0=\inf\{t>0\mid(t,x_0)\bar{\in}W_0\}$，于是 $t_0>0$. 取 $x_1=\theta(t_0,x_0)$的邻域V及$\delta>0$，使 $I_\delta\times V\subset W_0$；设$t_0-\frac{\delta}{3}<t_1<t_0$，$x_2=\theta(t_1,x_0)\in V$. 因$(t_1,x_0)\in W_0$，故有$x_0$的邻域$V_0$：$t_1\times V_0\subset W_0$ 且 $\theta(t_1\times V_0)\subset V$. 于是$(t_0,x_0)\in(t_1+I_\delta)\times V_0\subset W_0$，得出矛盾. □

5.7.3 定义 若C^∞映射 $\theta:W\subset\mathrm{R}\times M\to M$ 满足5.7.2中的条件(i)(iii)且 $\theta(0,x)=x$，则称θ为M上的流.

于是5.7.2表明，每个$X\in\mathscr{X}(M)$生成一个流θ（必要时写作θ^X）. 反之，任给M上的流θ，定义

$$X:M\to TM,\ x\longmapsto\frac{d}{dt}\theta(t,x)\mid_{t=0}, \qquad (3)$$

则显然$X\in\mathscr{X}(M)$，称X为θ的**生成子**. 固定$x\in M$，因 $\frac{d}{dt}\theta(t,x)=\frac{d}{ds}\theta(s+t,x)\mid_{s=0}=\frac{d}{ds}\theta(s,\theta(t,x))\mid_{s=0}=X(\theta(t,x))$，故$\theta(t,x)$恰为$X$过$x$的积分曲线. 由此可见，向量场与流实质上是两个等价的概念.

对于一个流$\theta\in C^\infty(W,M)$，将依方便交替地使用记号$\theta(t,x)$，$\theta_x(t)$与$\theta_t(x)$，后两个记号突出了θ对t或x的依赖性. 取定$t\in\mathrm{R}$，$V_t=\{x\mid(t,x)\in W\}\subset M$是开集. (2)表明$\theta_{s+t}=\theta_s\circ\theta_t$，由此推出$\theta_t\in\mathrm{Diff}(V_t,V_{-t})$. 若$W=\mathrm{R}\times M$，则$\mathrm{R}\to\mathrm{Diff}(M)$，$t\longmapsto\theta_t$是一群同态，此时称$\theta$为对$M$的**单参数群作用**，并说$\theta$或$X$是**完全的**.

5.7.4 定理 设θ是$X\in\mathscr{X}(M)$（生成）的流，$x\in M$. 若对任何有限区间$I\subset I_x$，$\theta_x(I)$是相对紧集，则$I_x=\mathrm{R}$. 因此，当$\mathrm{supp}X$为紧集时θ是完全的.

证 若$I_x\neq\mathrm{R}$，不妨设$\beta_x<\infty$（依5.7.2的记号）. 因$\theta_x((0,\beta_x))$相对紧，故有$t_n\to\beta_x-0$：$\theta_x(t_n)\to x_0$. 取x_0的邻

域V及$\delta>0$，使$I_\delta\times V\subset W$. 不妨设$\theta_x(t_n)\in V$，于是$(-\delta,\delta)\subset I_{\theta(t_n,x)}=I_x-t_n$，这推出$\delta\leqslant\beta_x-t_n$，与$t_n\to\beta_x$矛盾. □

5.7.5 直化定理 设$X\in\mathscr{X}(M)$，$a\in M$，$X(a)\neq0$. 则存在M在a处的坐标系(U,y^i)，使得$X|U=\partial/\partial y^1$.

证 取M在a处的坐标系(V,ψ,x^i)，使得$\psi(a)=0$，$X(a)=(\partial/\partial x^1)_a$. 设$\theta$是$X$的流. 定义

$$f(x^1,\cdots,x^m)=\psi\theta(x^1,\psi^{-1}(0,x^2,\cdots,x^m)),$$

则易见$f'(0)=\mathrm{id}$，于是得M在a处的坐标系(U,φ,y^i)：$f\circ\varphi=\psi$. 设$\varphi(x)=(u,v)\in\mathrm{R}\times\mathrm{R}^{m-1}(x\in U)$，则当$|t|$充分小时，

$$\begin{aligned}\varphi(\theta(t,x))&=\varphi\theta_t\varphi^{-1}(u,v)=\varphi\theta_t\psi^{-1}f(u,v)\\&=\varphi\theta_t\theta_u\psi^{-1}(0,v)=f^{-1}\psi\theta_{t+u}\psi^{-1}(0,v)=(t+u,v),\end{aligned}$$

由此推出$X|U=\partial/\partial u=\partial/\partial y^1$. □

5.7.6 定理 设$K\in C^1(V,M)$，V是$[0,\infty)\times M$的开子集，$0\times M\subset V$，$K_t(x)=K(t,x)$，$K_0=1_M$，$X(x)=\dfrac{\partial}{\partial t}K(t,x)|_{t=0}$. 则$\theta_t^X(x)=\lim\limits_n K^n_{t/n}(x)$.

证 任给$x_0\in U$，可归纳地指明，若t适当小，x邻近x_0，则对所有$n\geqslant1$，$K^n_{t/n}(x)$有定义且亦邻近x_0. 因此不妨设$X\in C^\infty(\mathrm{R}^m,\mathrm{R}^m)$，$\|X'(x)\|\leqslant\beta$. 从2.6.2推出$|\theta_t^j(x)-\theta_t^j(y)|\leqslant e^{j\beta|t|}|x-y|\ (j\geqslant0)$. 令$x_j=K^j_{t/n}(x)$，则

$$\begin{aligned}|\theta_t(x)-K^n_{t/n}(x)|&=|\theta^n_{t/n}(x)-K^n_{t/n}(x)|\\&\leqslant\sum_{j=1}^{n}|\theta^{n-j-1}_{t/n}(\theta_{t/n}-K_{t/n})K^j_{t/n}(x)|\\&\leqslant\sum_{j=1}^{n}e^{\beta t(n-j-1)/n}|(\theta_{t/n}-K_{t/n})(x_j)|\\&\leqslant e^{\beta t}\sum_{j=1}^{n}o\left(\frac{t}{n}\right)\to0(n\to\infty).\end{aligned}$$

□

所证结果可与熟知的 $\lim\limits_{n}\left(1+\frac{t}{n}\right)^{n}=e^{t}$ 对照．若 $Z=X+Y$，$X,Y\in\mathscr{X}(M)$，则将 5.7.6 用到 $K_t=\theta_t^X\circ\theta_t^Y$ 得出：

$$\theta^Z(t,x)=\lim_n(\theta_{t/n}^X\circ\ \theta_{t/n}^Y)^n(x). \tag{4}$$

下面考察 $\mathscr{X}(M)$ 的某些代数性质．任给 $X\in\mathscr{X}(M)$，$f\in C^\infty(M)$，令 $(Xf)(x)=X_x(f)$，则得到微分算子(仍记作 X)：$C^\infty(M)\to C^\infty(M)$，$f\longmapsto Xf$．若 $X,Y\in\mathscr{X}(M)$，则直接看出线性算子 $[X,Y]=XY-YX:C^\infty(M)\longmapsto C^\infty(M)$ 满足 §3(11)，且有坐标公式：

$$[X,Y](x^i)=X(Y^i)-Y(X^i)\in C^\infty. \tag{5}$$

因此 $[X,Y]\in\mathscr{X}(M)$(5.3.4)，称 $[X,Y]$ 为 X 与 Y 的 **Lie 积**或 **Lie 括号**．易直接验证 Lie 积的以下性质：

$$[\alpha X+\beta Y,\ Z]=\alpha[X,Z]+\beta[Y,Z]; \tag{6}$$

$$[X,\ Y]=-[Y,X]; \tag{7}$$

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0. \tag{8}$$

5.7.7 定义 若一向量空间 V 上定义了一个满足(6)—(8)的"乘法" $[\ ,\ ]$，则称 V 为 **Lie 代数**；满足 $[X,Y]=0$ 的 Lie 代数称为 **Abel Lie 代数**．

于是 $\mathscr{X}(M)$ 依 Lie 积 $[X,Y]$ 是一个 Lie 代数．因 Lie 代数亦是 1.2.1 所定义的代数(但不必是结合的)，故"Lie 代数同态[同构]"、"Lie代数的理想"等概念有自然的意义．

若 $f\in \mathrm{Diff}(M,N)$，则 f 导出一线性同构("推前")：

$$\mathscr{X}(M)\cong\mathscr{X}(N),\ X\longmapsto f_*\circ X\circ f^{-1}, \tag{9}$$

$f_*\circ X\circ f^{-1}$ 也写作 f_*X．对于 $f\in C^\infty(M,N)$ 有一相近的概念．

5.7.8 定义 设 $f\in C^\infty(M,N)$，$X\in\mathscr{X}(M)$，$Y\in\mathscr{X}(N)$．若 $f_*\circ X=Y\circ f$，则说 X 与 Y 是 **f-相关的**，记作 $X\overset{f}{\sim}Y$．若 $f\in$

$C^\infty(M,M)$，$X \overset{f}{\sim} X$，则说 X f-不变，写作 $f_* X = X$.

任给 $f \in C^\infty(M,N)$，$X \in \mathscr{X}(M)$，$g \in C^\infty(N)$，依§3(10)有

$$(f_* X)(g) = g_* f_* X = (gf)_*(X) = X(gf). \qquad (10)$$

利用(10)立即得到关系 $X \overset{f}{\sim} Y$ 的等价刻划：

$$X(g \circ f) = Y(g) \circ f \qquad (\forall g \in C^\infty(N)). \qquad (11)$$

5.7.9 定理 设 $f \in C^\infty(M,N)$，$X, Z \in \mathscr{X}(M)$，$Y, W \in \mathscr{X}(N)$. 若 $X \overset{f}{\sim} Y$，$Z \overset{f}{\sim} W$，则 $[X, Z] \overset{f}{\sim} [Y, W]$. 因此，当 $f \in \mathrm{Diff}(M,N)$ 时，(9)是一Lie 代数同构.

证 任给 $g \in C^\infty(N)$，由 $X \overset{f}{\sim} Y$，$Z \overset{f}{\sim} W$ 及(11)直接推出 $XZ(gf) = (YW(g)) \circ f$，同理 $ZX(gf) = (WY(g)) \circ f$，因此

$$[X, Z](gf) = ([Y, W](g)) \circ f. \qquad \square$$

推论 设 $i: M \hookrightarrow N$，$X, Y \in \mathscr{X}(N)$，$\forall x \in M$：$X_x \in M_x$，$Y_x \in M_x$，则 $[X|M, Y|M] = [X, Y]|M$.

这是因为，在所述条件下有 $X|M = X \circ i \overset{i}{\sim} X$.

f-相关的向量场生成的流有密切的联系.

5.7.10 定理 设 $f \in C^\infty(M,N)$，θ^X，θ^Y 分别为 $X \in \mathscr{X}(M)$ 与 $Y \in \mathscr{X}(N)$ 的流. 则 $X \overset{f}{\sim} Y \Longleftrightarrow f \circ \theta_t^X = \theta_t^Y \circ f$. 特别，若 $f \in C^\infty(M,M)$，则 X 是 f-不变的 $\Longleftrightarrow f \circ \theta_t^X = \theta_t^X \circ f$.

证 若 $X \overset{f}{\sim} Y$，则从 $f(\theta^X(0,x)) = f(x)$ 及

$$\frac{d}{dt} f(\theta^X(t,x)) = f_* X(\theta^X(t,x)) = Y(f(\theta^X(t,x)))$$

推出 $f(\theta^X(t,x)) = \theta^Y(t, f(x))$，即 $f \circ \theta_t^X = \theta_t^Y \circ f$. 反之，若 $f(\theta^X(t,x)) = \theta^Y(t, f(x))$，则对 t 微分立得 $f_* X(x) = Y(f(x))$，即 $X \overset{f}{\sim} Y$. $\square$

参考文献：[2]，[6]，[12]，[22]，[37]，[69]．

习　题

1．设 $X\in\mathscr{X}(M)$．若 $X(x)=0$，则 $\theta_x(t)\equiv x$；若 $X(x)\neq 0$，则 $\theta_x: I_x\to M$ 是一浸入；若 I_x 有限，则 θ_x 是一嵌入．若 $f\in C^1(M)$，则 $X_x(f)=\frac{d}{dt}f(\theta(t,x))|_{t=0}$．

2．设 $X,Y\in\mathscr{X}(M)$，$f,g\in C^\infty(M)$，则

$$[fX,gY]=fg[X,Y]+f(Xg)Y-g(Yf)X.$$

3．设 $M\subset N$，$X\in\mathscr{X}(N)$，$X|M\in\mathscr{X}(M)$，θ 是 X 的流，则当 $x\in M$ 时 $\theta_x(I_x)\subset M$．

4．设 $X\in\mathscr{X}(M)$．若 $\forall Y\in\mathscr{X}(M)$，$[X,Y]=0$，则 $X=0$．

5．若 $X,Y\in\mathscr{X}(M)$ 是完全的，$[X,Y]=0$，则 $\theta^{X+Y}_t=\theta^X_t\circ\theta^Y_t$．

§8　奇点与闭轨道

给定 $X\in\mathscr{X}(M)$，设 θ 是 X 的流．取定 $x\in M$．若存在 $\tau>0$：$\theta_x(\tau)=x$（沿用上节的记号），则从上节(2)推出 $\theta_x(t+\tau)=\theta_x(t)$，且必定 $I_x=\mathrm{R}$．这样，$\theta_x(t)$ 是场微分方程 $\frac{dx}{dt}=X(x)$ 的一个周期解．若 $X(x)=0$，则 $\theta_x(t)\equiv x$ 是一平凡的周期解，此时称 x 为 X 的奇点．若 $X(x)\neq 0$，则易看出 $\tau=\inf\{\tau'>0\,|\,\theta_x(\tau')=x\}>0$，此时 τ 是 $\theta_x(t)$ 的最小正周期，当 t 从 0 增大至 τ 时，$\theta_x(t)$ 无重点地描出一条闭轨道 γ；当 $t\to\pm\infty$ 时，$\theta_x(t)$ 分别沿两个相反的方向无限次经过 γ．对奇点与闭轨道的研究构成向量场（或即微分动力系统）定性理论的基本课题．

取定 X 的奇点 a．$d\theta_t: M_a\to M_a$ 导出线性映射

$$X'(a)=\frac{d}{dt}(d\theta_t)|_{t=0}: M_a\to M_a. \tag{1}$$

称切空间 M_a 中的线性方程 $\frac{dv}{dt}=X'(a)v$ 为 X 在点 a 的线性化，它近似地描述了 X 在 a 邻近的性态．设 $X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$，$\theta^i(t, x)$ 是 θ 关于 (x^i) 的分量，则

$$X'(a)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_a=\frac{d}{dt}\left[d\theta_t\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right]\Big|_{t=0}$$

$$=\frac{d}{dt}\left[\partial_i\theta^j(t, a)\frac{\partial}{\partial x^j}\right]\Big|_{t=0}=\partial_i X^j(a)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_a,$$

可见 $X'(a)$ 决定于矩阵 $(\partial_i X^j(a))$，后者的代数性质自然将用来刻划奇点 a 的特性．

5.8.1 定义 称 $X'(a)$ 的特征值为 X 在奇点 a 的特征指数，当它们全有非零实部时称 a 为双曲奇点．说奇点 a 是渐近稳定的，若有 a 的邻域 V，使得 $\forall t>0$，θ_t 在 V 上定义，且对 a 的任给邻域 U，t 充分大时 $\theta_t(V)\subset U$。对奇点 a，集

$$\mathrm{In}(a)=\{x\mid\lim_{t\to\infty}\theta_x(t)=a\} \tag{2}$$

与

$$\mathrm{Ont}(a)=\{x\mid\lim_{t\to-\infty}\theta_x(t)=a\} \tag{3}$$

分别称为入集与出集．

5.8.2 Liapunov 定理 若 X 在奇点 a 的特征指数全有负实部，则 a 是渐近稳定的．

证 因渐近稳定是局部性质，不妨设 $X\in C^\infty(\mathrm{R}^n, \mathrm{R}^n)$，$a=0$，$A=X'(0)$ 有特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，$-\varepsilon=\max\mathrm{Re}\lambda_i<0$．可设 λ_i 互异（否则对 X 作微小修正），于是依线性代数有 $P\in \mathrm{GL}(n, \mathrm{C})$，$PAP^{-1}=\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)=B$．令 $\|x\|=|Px|_u$，则

$$\|e^{tA}x\|=|e^{tB}Px|_u\leqslant e^{-\varepsilon t}|Px|_u=e^{-\varepsilon t}\|x\|,\quad x\in\mathrm{R}^n. \tag{4}$$

取 $\delta, r>0$，使当 $|t|<\delta$，$\|x\|<r$ 时 $\theta(t, x)$ 有定义，且 $\|R(x)\|\leqslant$

$\frac{\varepsilon}{2}\|x\|$. $R(x)=X(x)-Ax$. 取定 $x_0\in\mathrm{R}^n$：$\|x_0\|<r$，令 $x(t)=\theta(t,x_0)$. 设当 $0\leqslant t<t_0$ 时 $\|x(t)\|<r$. 因 $x(t)$ 满足线性方程

$$\frac{dx}{dt}=Ax+R(x(t)),$$

故
$$x(t)=e^{tA}x_0+\int_0^t e^{(t-s)A}R(x(s))ds$$

（参看 2.6.3）. 由(4)，当 $0\leqslant t<t_0$ 时，

$$\|x(t)\|\leqslant e^{-\varepsilon t}\|x_0\|+\frac{\varepsilon}{2}\int_0^t e^{\varepsilon(s-t)}\|x(s)\|ds.$$

由 Gronwall 不等式(§2.6(6))推出 $e^{\varepsilon t}\|x(t)\|\leqslant\|x_0\|e^{\varepsilon t/2}$，于是

$$\|\theta(t,x_0)\|\leqslant\|x_0\|e^{-\varepsilon t/2},\quad 0\leqslant t<t_0. \tag{5}$$

如同证 5.7.4 一样，可说明 $\theta(t,x_0)$ 实际上在 $0\leqslant t<\infty$ 内定义且满足(5). 由(5)直接推出定理结论. □

依 5.8.2，若 X 在奇点 a 的特征指数全在左[右]半复平面，则 $\mathrm{In}(a)$ [$\mathrm{Out}(a)$] 包含 a 的一个邻域. 双曲奇点介于这两种极端情况之间. 若 $X(x)=Ax$ ($A\in M_n(\mathrm{R})=L(\mathrm{R}^n,\mathrm{R}^n)$, $x\in\mathrm{R}^n$) 以 $x=0$ 为双曲奇点，则用线性代数方法可得结论：$\mathrm{In}(0)$ 与 $\mathrm{Out}(0)$ 是 R^n 的两个互补子空间（参看[6]）. 可以证明：若 a 是 $X\in\mathscr{X}(M)$ 的双曲奇点，则 $\mathrm{In}(a)$ 与 $\mathrm{Out}(a)$ 是 M 的两个浸入子流形，两者在 a 横截相交（参看[69]）. 在"拓扑等价"的意义上，X 在双曲奇点 a 邻近的性状完全决定于其线性化（"线性化定理"，参看[37]），从而完全决定于 a 在左半平面的特征指数（计算重数）之个数（记作 $S(X,a)$，称为稳定指标）.

奇点固然是一个局部概念，但奇点的存在性及其分布却是整体问题，它强烈地依赖于空间的拓扑构造，这方面的一些重要结果都是以流形论的深刻研究为基础的. 一个典型例子是：

若X在紧流形M上仅有孤立的双曲奇点$\{a_i\}$，则$\Sigma(-1)^{s(X,a_i)}=$ M的 Euler 特征数$\chi(M)$（参看6.10.5及[6]）．

闭轨道的研究看来要困难些．不过，它与奇点问题仍有某些互成对应之处．以下讨论中，γ总记$X\in\mathscr{X}(M)$的一条闭轨道，τ为其最小正周期．

若一超曲面$S\subset M$有性质：$X_x\overline{\in}S_x(\forall x\in S)$，$x_0\in S$，则说$S$是$X$在$x_0$处的一横截面（参照5.3.3）．

5.8.3 定理 任给$x_0\in\gamma$，存在X在x_0处的横截面S及$f\in C^\infty(S,S)$，使得：(i)存在x_0在S中的邻域V_0,V_0'：$f|V_0:V_0\cong V_0'$；(ii)存在$\delta(x)\in C(V_0)$，$\forall x\in V_0$：$\tau-\delta(x)\in I_x$，$f(x)=\theta(\tau-\delta(x),\ x)$；(iii)当$0<t<\tau-\delta(x)$时，$\theta(t,x)\overline{\in}V_0$．称如上的$f$为$X$在$S$上（或$x_0$处）的 **Poincaré 映射**．$X$的 Poincaré 映射在下述意义上互相等价：若f_i是X在S_i上的Poincaré 映射，$x_i\in\gamma\cap S_i(i=0,1)$，则在$x_0$在$S_0$的某邻域内有$hf_0=f_1h$（或$f_1=hf_0h^{-1}$），$h$是某个微分同胚．

证 依5.7.5，存在M在x_0处的图(U,φ,x^i)：$\varphi(x_0)=0$，$X|U=\partial/\partial x^1,\varphi U=I\times A\subset\mathrm{R}\times\mathrm{R}^{m-1}$．$S=\varphi^{-1}(0\times A)$显然是$X$在$x_0$处的横截面．不妨设$x\in U$时$[-\tau,\tau]\subset I_x$，于是$U_0=U\cap(\theta_{-\tau}U)$是$x_0$的开邻域，$\theta_\tau U_0\subset U$．令$V_0=S\cap U_0,f=\varphi^{-1}q\varphi\theta_\tau$，其中$q$：$I\times A\to A$，$(t,a)\longmapsto a$，则不难看出$f|V_0:V_0\to V_0'=f(V_0)$是微分同胚．任给$x\in V_0$，$f(x)$与$\theta_\tau(x)$在$X$的同一积分曲线上，故有$\delta(x)\in\mathrm{R}$：$\theta_\tau(x)=\theta(\delta(x),f(x))$，$f(x)=\theta(\tau-\delta(x),x)$．设$p$：$I\times A\to I$，$(t,a)\longmapsto t$，则

$$\varphi\theta(\delta(x),f(x))=\varphi\theta_\tau(x)=(p\varphi\theta_\tau(x),\varphi f(x)),$$

由此看出$\delta\in C(V_0)$，f是一 Poincaré映射得证．

其次设$f_i(i=0,1)$是如定理所述的两个 Poincaré 映射．首先设$x_0=x_1$，这就可当作局部问题考虑，因而不妨设$S_0=0\times A\subset\mathrm{R}\times\mathrm{R}^{m-1}$，$S_1$是$\partial/\partial x^1$的横截面．于是沿$x^1$-轴方向的

坐标线建立的对应 $h:S_0\to S_1$ 是所需的微分同胚．若 $x_0\neq x_1$，依证明第一段的记号，不妨设 $x_0,x_1\in U$（因 γ 可由有限个图覆盖），$S_0=\varphi^{-1}(0\times A)$，$x_1=\theta(s,x_0)$．于是 $\theta_s:S_0\to S_2=\theta_s(S_0)$ 是微分同胚，S_2 是 X 在 x_1 处的横截面，$f_2=\theta_s f_0\theta_s^{-1}$ 是与 f_1 等价的 Poincaré 映射，从而 f_0 与 f_1 等价． □

5.8.3 中的 Poincaré 映射 $f:S\to S$ 有很简单的几何意义：取定 $x\in V_0$，当 t 从 0 增大时，动点 $\theta_x(t)$ 从 x 出发沿积分曲线绕一圈后在点 $f(x)$ 返回 S，因此也称 f 为“第一次返回映射”．令 $f^n=f\circ f\circ\cdots\circ f$，则序列 $\{f^n(x)\}$ 刻划了 θ 在 γ 邻近的渐近性质．

5.8.4 定义 任给 $x\in\gamma$，取 X 在 x 处的 Poincaré 映射 f，称线性映射 f_{*x} 的特征值为 X 在 γ 上的特征乘数（由 5.8.3，这与 x,f 的选择无关）．若 γ 的特征乘数之模全异于 1，则说 γ 是双曲的．给定 $x_0\in M$，若对任给 $x\in\gamma$ 及 γ 在 x 处的 Poincaré 映射 f，存在 $t_0\in\mathbb{R}$，使得 $\lim\limits_n f^n(\theta(t_0,x_0))=x$，则说 $\theta_{x_0}(t)$ 旋绕地渐近于 γ（与5.8.1对照）．

以下是一个与 5.8.2 相对应的结果．

5.8.5 定理 若 γ 的特征乘数全在单位圆内，则 γ 依以下意义是渐近稳定的：存在 γ 的邻域 W，任给 $x\in W$，$\theta_x(t)$ 旋绕地渐近于 γ．

证 任给 $x_0\in\gamma$，设 x_0 处的图 (U,φ)，横截面 S，Poincaré 映射 f 及集 V_0 均如 5.8.3．今证 $\lim\limits_n f^n(x)=x_0$，$x\in V_0$（这将推出定理结论，因 γ 可用有限个如上的图覆盖），而这归于证明以下局部结果：若 f 是定义在 $0\in\mathbb{R}^k$ 邻近的 $\mathbb{R}^k$-值 C^∞ 映射，$f(0)=0$，$A=f'(0)$ 的特征值全在单位圆内，则当 $x\in\mathbb{R}^k$，$|x|$ 充分小时 $\lim\limits_n f^n(x)=0$，$f^n=f\circ f\circ\cdots\circ f$．令 $f(x)=Ax+R(x)$．如同证 5.8.2 一样，可指明存在 $\mathbb{R}^k$ 的范数 $\|\cdot\|$，

使得$\|Ax\|\leqslant r\|x\|(\forall x\in\mathrm{R}^k)$，$r<1$是常数．当$\|x\|$充分小时，$\|R(x)\|\leqslant\frac{1-r}{2}\|x\|$，从而$\|f(x)\|\leqslant\frac{1+r}{2}\|x\|$．于是可归纳地得出$\|f^n(x)\|\leqslant\left(\frac{1+r}{2}\right)^n\|x\|$，这推出$\lim\limits_n f^n(x)=0$． □

如同对奇点一样，可自然地定义γ的入集$\mathrm{In}(\gamma)$与出集$\mathrm{Out}(\gamma)$．在5.8.5的条件下，$\mathrm{In}(\gamma)$包含了γ的某个邻域．若γ是双曲的，则可指明：$\mathrm{In}(\gamma)$与$\mathrm{Out}(\gamma)$是M的两个浸入子流形，它们沿γ横截相交（参考5.3.5）．

参考文献：[2]，[6]，[37]，[45]，[69]．

习　题

1．若$0<\tau_n\to 0$，$\theta_x(\tau_n)=x$，则x是奇点．

2．设$X(x)=Ax$，$x\in\mathrm{R}^n$，$A\in M_n(\mathrm{R})$．若$x=0$是X的双曲奇点，则$\mathrm{In}(0)$与$\mathrm{Out}(0)$是R^n的互补子空间．

3．设γ是$X\in\mathscr{X}(M)$的闭轨道，$a\in\gamma$，τ是最小正周期，则$d\theta_\tau:M_a\to M_a$的特征值由γ的特征乘数及1组成．

4．在微分同胚变换下，向量场的奇点[闭轨道]变为奇点[闭轨道]，且特征指数[乘数]不变．

§9　Frobenius定理

向量场理论有一个高维拓广，即可积分布的理论．下面沿用§6，§7两节的术语与记号．

5.9.1 定义　称切丛TM的任一n维子丛E为M上的n维分布．若(N,φ)是M的浸入子流形，$\forall y\in N$，$\varphi_*N_y=E_{\varphi(y)}$，$x\in\varphi(N)$，则称$(N,\varphi)$为$E$过$x$的积分流形．过每点$x\in M$有积分流形的分布称为可积分布．

若$X\in\mathscr{X}(M)$无奇点，则X生成M上一个1维分布E（5.6.10之推论），X的任何积分曲线$\varphi(t)(t\in I$，适当限定

I)是E的积分流形．但高维分布并非总是可积的．为建立下面的可积条件，引入如下术语：设E是M上一分布，若对任给开集$U\subset M$及$X,Y\in\Gamma(U,E)$，恒有$[X,Y]\in\Gamma(U,E)$，则说E是**一对合分布**．

5.9.2 Frobenius 定理 设E是M上一n维分布．则以下条件互相等价：(i) E是可积的；(ii) E是对合的；(iii) 每点$x_0\in M$含于某个坐标图(U,x^i)，使得$\{\partial/\partial x^i\}_{i=1}^n$是$E$在$U$内的局部基．

证 若(U,x^i)如条件(iii)，则对适当的常数c^i，

$$x^i=c^i,\quad i=n+1,\cdots,m \tag{1}$$

确定E在U内的积分流形．可见(iii)⇒(i)．设E可积，$U\subset M$是开集，$X,Y\in\Gamma(U,E)$．任给$x\in U$，取E过x的积分流形(N,i)，可设$i: N\subset U$是嵌入(必要时适当缩小N)，则依5.7.9之推论有：

$$[X,Y]_x=([X,Y]|N)_x=[X|N,Y|N]_x\in N_x=E_x.$$

由此推出$[X,Y]\in\Gamma(U,E)$，可见(i)⇒(ii)．难点是证(ii)⇒(iii)，这由对n用归纳法来完成．

$n=1$的情况直接从5.7.5推出．下面设定理已对$n-1$维分布($n>1$)证明．取定$x_0\in M$、x_0处的坐标系(V,ψ,y^i)及E在V内的局部基$\{X_i\}_{i=1}^n$，可设$\psi(x_0)=0$，$X_1=\partial/\partial y^1$．令$Y_1=X_1$，$Y_i=X_i-X_i(y^1)X_1\ (2\leqslant i\leqslant n)$，则$\{Y_i\}_{i=1}^n$亦是$E$在$V$内的局部基．$E$是对合的推出$[Y_i,Y_j]=\Sigma_1^n c_{ij}^k Y_k$．因当$2\leqslant i,j\leqslant n$时$c_{ij}^1=[Y_i,Y_j](y^1)=0$，故

$$[Y_i,Y_j]=\sum_{k=2}^n c_{ij}^k Y_k,\quad i,j=2,\cdots,n. \tag{2}$$

令N是y^1坐标为零的点组成的子流形．(2)表明$\{Y_i|N\}_{i=2}^n$生成N上一$(n-1)$维对合分布F．依归纳假设，有x_0处的坐标系(U,x^i)，$U\subset V$，$x^1=y^1$，$\{\partial/\partial x^i\}_{i=2}^n$是$F$的局部基．设

$Y_i = \sum_{j=2}^{m} b_i^j \frac{\partial}{\partial x^j} (2 \leqslant i \leqslant n)$. 固定 $j > n$, 当 $2 \leqslant i \leqslant n$ 时,

$$\frac{\partial}{\partial x^1} b_i^j = Y_1(b_i^j) = [Y_1, Y_i](x^j) = \sum_{k=2}^{n} c_{1i}^k b_k^j.$$

可见 $b_2^j, \cdots, b_n^j$ 作为 x^1 的函数满足齐次线性方程组:

$$\frac{du_i}{dx^1} = \sum_{k=2}^{n} c_{1i}^k u_k, \quad i = 2, \cdots, n. \tag{3}$$

因 $\{Y_i|N\}_{i=2}^n$ 可由 $\{\partial/\partial x^i\}_{i=2}^n$ 线性表出, 故 $b_i^j|_{x^1=0} = 0$, 因此 $b_i^j = 0 (2 \leqslant i \leqslant n < j \leqslant m)$, 这表明 $\{\partial/\partial x^i\}_1^n$ 是 E 的局部基. □

试看一个应用5.9.2的简单例子. 考虑关于未知函数 $u(x^1, \cdots, x^m)$ 的1阶偏微分方程组

$$X_i^j \frac{\partial u}{\partial x^j} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{4}$$

其中 $X_i^j \in C^\infty(U) (1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m)$, $U \subset \mathrm{R}^m$ 是开集. 令 $X_i = X_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, 若 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 在 U 内逐点线性无关, 且 $[X_i, X_j] = \sum_k c_{ij}^k X_k$, $c_{ij}^k \in C^\infty(U) (1 \leqslant i, j, k \leqslant n)$, 则 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 生成 U 内一 n 维对合分布 E. 依5.9.2, U 内每点处有一坐标系 (y^i), $\{\partial/\partial y^i\}_1^n$ 是 E 的局部基, 从而 $X_i(y^j) = 0 (1 \leqslant i \leqslant n < j \leqslant m)$, 于是 $u^j = y^j(x^1, \cdots, x^m) (n < j \leqslant m)$ 是(4)的 $m-n$ 个解.

以下设 $E \subset TM$ 是给定的 n 维可积分布. 依5.9.2, 任给 $x_0 \in M$, 存在坐标系 (U, φ, x^i), 使得 $\varphi(x_0) = 0$, φU 是 m 维方体 $(-1, 1)^m$, 当 $|c^i| < 1 (n < i \leqslant m)$ 时, 方程组(1)决定 E 在 U 内的积分流形. 因此从局部看来, E 的积分流形近似于一族"平行层面", 每个形如(1)的积分流形称为一个层. 为行文方便, 姑且称上述的坐标系 (U, φ, x^i) 为关于 E 的**规范坐标系**. 下面考虑将局部的层"连接"成整体的连通积分流形. 首先证

明一个预备结果：

5.9.3 引理 设(U,φ)是关于E的规范坐标系，(N,g)是E在U内（这意味着$g(N)\subset U$)的一连通积分流形，则$g(N)$必含于一单个的层.

证 设$p: \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^{m-n}\to\mathbf{R}^{m-n}$是投影. 因$(p\varphi g)_*=p_*\varphi_*g_*=0$，而$N$连通，故$p\varphi g=\text{const}$. □

5.9.4 定理 任给$x_0\in M$，存在E的唯一连通积分流形A，它包含E的任何过x_0的连通积分流形（这样的A称为E过x_0的**极大积分流形**）.

证 若$\beta(t)$是M上分段光滑的连续曲线，当$\dot\beta(t)$存在时$\dot\beta(t)\in E_{\beta(t)}$，则称$\beta(t)$为$E$的"分段光滑积分曲线". 取定$x_0\in M$，令$A=\{x\in M|$ 存在E的从x_0到x的分段光滑积分曲线$\}$. 取可数个关于E的规范坐标系$(U_k,x_k^i)(k\geqslant 0)$覆盖$M$，设$x_0\in U_0$. 若$S$是某个$U_k$中形如(1)的层，$A\cap S\neq\varnothing$，则显然$S\subset A$. 因此$A$由一些形如(1)的层组成，将$A$中诸层的开子集作为基开集在$A$中导入拓扑(1.1.7)，$A$依此拓扑显然是一连通的$T_2$空间.

任给$k,j\geqslant 0$,设$S\subset U_j$是一个层,$S\cap U_k\neq\varnothing$,则$S\cap U_k$至多有可数个分支，每个分支含于U_k中某一层(5.9.3)，因此S至多交于U_k的可数个层. 因仅有可数种有限组合$U_0,\cdots,U_j,\cdots,U_k$，使得相邻两集相交，故$A$至多含$U_k$的可数个层. 这推出$A$是第二可数的.

若$S\subset A\cap U_k$是一个形如(1)的层，则以$(S;\ x_k^1,\cdots,x_k^n)$作为A的一个坐标图；由所有这种坐标图组成的图册在A上定义一微分结构. 设$i: A\subset M$，则直接看出(A,i)是E过x_0的连通积分流形.

设(B,h)是E过x_0的另一连通积分流形. 任给$x\in h(B)$，在B中取从$h^{-1}(x_0)$到$h^{-1}(x)$的分段光滑连续曲线β（其存在

性是明显的)，则 $h\circ\beta$ 是 E 的从 x_0 到 x 的分段光滑积分曲线，于是 $x\in A$，从而 $h(B)\subset A$. 这就证得 A 的极大性.

若 (B,h) 亦是 E 过 x_0 的极大积分流形，则 $A=h(B)$. 令 $g:B\to A$，$b\longmapsto h(b)$，则 $i\circ g=h$. 由下面补证的引理5.9.5，$g\in C^\infty$；同理 $g^{-1}\in C^\infty$，故 $g\in \mathrm{Diff}(B,A)$，这表明 (A,i) 与 (B,h) 等价(5.2.5). □

5.9.5 引理 设 (A,ψ) 是可积分布 E 的一积分流形，$g:N\to A$，$f=\psi\circ g\in C^\infty(N,M)$，则 $g\in C^\infty(N,A)$.

证 由5.2.7，只需证 g 连续. 不妨设 $\psi=i:A\subset M$. 任取 $b\in N$，令 $a=g(b)$. 取 M 关于 E 的一规范坐标系 (U,φ,x^i)，使得 $\varphi(a)=0$. 不妨设 U 内含 a 的层 S 含于 A，于是 S 是 a 在 A 中的邻域. 因 $f^{-1}U$ 是 b 的开邻域，故 $f^{-1}U$ 的含 b 的分支 V 亦是 b 的开邻域. 今证 $gV\subset S$ (由此推出 g 连续). 连通集 $f(V)=g(V)$ 必含于 $A\cap U$ 的某个分支 P，P 至多交于 U 的可数个层(参看5.9.4中关于 A 的第二可数性的证明). 设 $p:\mathrm{R}^n\times\mathrm{R}^{m-n}\to\mathrm{R}^{m-n}$ 是投影，则 $p\varphi(P)$ 是 R^{m-n} 的可数连通子集，它只能是单点集. 这表明 $g(V)\subset P\subset S$. □

参考文献：[2]，[12]，[45]，[57]，[83].

习 题

1. 设 $f\in C^\infty(M,N)$ 是一浸淹，则 $\mathrm{Ker}f_*\subset TM$ 是一可积分布；任给 $x_0\in M$，$f^{-1}f(x_0)$ 是 $\mathrm{Ker}f_*$ 的积分流形.

2. 设 $f^i_j\in C^\infty(U)$ $(1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n)$，$U\subset\mathrm{R}^{n+m}$ 是一开集. 关于未知函数 $y^i(x^1,\cdots,x^n)$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ 的偏微分方程组

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^j}=f^i_j(x^1,\cdots,x^n,\ y^1,\cdots,y^m),\quad 1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n$$

可积的充要条件是

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(f^k_j)-\frac{\partial}{\partial x^j}(f^k_i)+f^l_i\frac{\partial}{\partial y^l}(f^k_j)-f^l_j\frac{\partial}{\partial y^l}(f^k_i)=0,$$

$$k=1,2,\cdots,m,\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

Frobenius 定理可从以上结论推出.

第六章　微 分 形 式

本章从流形的切丛出发，导入各阶张量丛，进而研究作为张量丛截面的张量场，特别是微分形式．流形上的微积分学，在很大程度上正是对于微分形式的微分法与积分法．

§1　张量代数

给定K（=R或C）上的n维向量空间V，V的代数对偶V^*亦是K上的n维向量空间．取定V的一组基$\{e_i\}$，依$e^i(e_j)=\delta^i_j(1\leqslant i,j\leqslant n)$定义出$V^*$的一组基$\{e^i\}$，称为$\{e_i\}$的**对偶基**．任给$x\in V$，$\theta\in V^*$，有

$$x=x^ie_i=e^i(x)e_i;\quad \theta=\theta_ie^i=\theta(e_i)e^i, \tag{1}$$

因此$\theta(x)=x^i\theta_i$（写作$\langle x,\ \theta\rangle$或$\langle\theta,\ x\rangle$）．依自然的同构

$$V\to V^{**},\quad x\longmapsto(\theta\longmapsto\langle x,\ \theta\rangle), \tag{2}$$

常将V与V^{**}视为等同．

6.1.1　定义　给定K上的n_i维向量空间$V_i(1\leqslant i\leqslant p)$，称$n_1\cdots n_p$维向量空间$L(V_1^*,\ \cdots,\ V_p^*;\ \mathrm{K})$（记号依§1·6）为$\{V_i\}$的张量积，记作$\otimes V_i$或$V_1\otimes\cdots\otimes V_p$．令

$$T^q_pV=\overbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}^{p个}\otimes\overbrace{V\otimes\cdots\otimes V}^{q个}, \tag{3}$$

约定$T^0_0V=\mathrm{K}$，称每个$\omega\in T^q_pV$为V上的(p,q)阶张量，p,q分别为ω的协变阶与逆变阶；称$(p,0)$ $[(0,q)]$阶张量为p阶协变$[q$阶逆变$]$张量．

6.1.2 定义 任给$\omega\in T^q_pV$，$\sigma\in T^s_rV$，ω与σ的张量积$\omega\otimes\sigma$是一个$(p+r,\ q+s)$阶张量，它决定于

$$(\omega\otimes\sigma)(x_1,\cdots,x_p,\ y_1,\cdots,y_r,\ \theta^1,\cdots,\theta^q,\ \beta^1,\cdots\beta^s)$$
$$=\omega(x_1,\cdots,x_p,\ \theta^1,\cdots,\theta^q)\sigma(y_1,\cdots,y_r,\ \beta^1,\cdots,\beta^s),\qquad(4)$$

其中x_i，$y_j\in V,\theta^k,\beta^l\in V^*$. $\otimes$依自然的方式扩张为$T(V)=\bigoplus\limits_{p,\ q\geqslant 0}T^q_pV$上的乘法，使$T(V)$成为一个K上的代数，称为$V$上的张量代数．每个$\omega\in T^q_pV$有分解式：

$$\omega=\omega^J_Ie^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_p}\otimes e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_q},\qquad(5)$$

其中
$$\omega^J_I=\omega^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_p}=\omega(e_{i_1},\cdots,e_{i_p},e^{j_1},\cdots,e^{j_q})\qquad(6)$$

称为ω关于基$\{e_i\}$的分量或坐标(只要不致混淆，今后总将指标组$\{i_1,\cdots,i_p\}$缩写为I，I的"长"p由上下文确定)．

从(4)(6)看出，张量乘法归于分量相乘：

$$(\omega\otimes\sigma)^{JL}_{IK}=\omega^J_I\sigma^L_K,\quad\omega\in T^q_pV,\quad\sigma\in T^s_rV.\qquad(7)$$

若$\{\bar e_i\}$是V的另一组基，$\{\bar e^i\}$是其对偶基，

$$\bar e_i=a^j_ie_j,\quad\bar e^i=b^i_je^j,\quad i=1,2,\cdots,n,\qquad(8)$$

则$a^k_ib^j_k=\delta^j_i$，可见(b^i_j)由(a^j_i)唯一决定．由(6)(8)推出：

$$\bar\omega^J_I=\omega(\bar e_{i_1},\cdots,\bar e_{i_p},\bar e^{j_1},\cdots,\bar e^{j_q})=a^{k_1}_{i_1}\cdots a^{k_p}_{i_p}b^{j_1}_{l_1}\cdots b^{j_q}_{l_q}\omega^L_K,\qquad(9)$$

$\omega\in T^q_pV$．**坐标变换公式**(9)对于张量概念是本质的：若V的每组基$\{e_i\}$对应一个$(\omega^J_I)\in\mathrm{K}^{n^{p+q}}$，且当基依(8)变换时$\omega^J_I$依(9)变换，则$\omega^J_I$必为某个$\omega\in T^q_pV$的分量，通常就说"$\omega^J_I$是一张量"．

6.1.3 定理 设$\omega\in T^q_pV(p,q\geqslant 1)$，令$\sigma^J_I=\omega^{Jk}_{Ik}$，则$\sigma^J_I$是一个$(p-1,\ q-1)$阶张量，称为$\omega$的短缩．

证 为简便计，设$p=q=2$．依(9)算出

$$\bar\sigma^j_i=\bar\omega^{jk}_{ik}=a^\alpha_ia^\beta_kb^j_sb^k_t\omega^{st}_{\alpha\beta}=a^\alpha_ib^j_s\sigma^s_\alpha,$$

可见σ^i_j符合张量的坐标变换规则，从而是一张量． □

6.1.3中"收缩指标" k 置于最后只是为了书写方便．一般规则是：令 ω^i_j 中任一对上下指标相等（这意味着对它求和），就得到一个$(p-1, q-1)$阶张量．

协变（或逆变）张量的对称性与反称性有自明的意义（参看§1.6）．称

$$A^p(V)=\{\omega\in T^p_0V \mid \omega\text{是反称的}\} \qquad (10)$$

为V的**p次外幂**，约定$A^0(V)=\mathrm{K}$．称每个$\omega\in A^p(V)$[$\omega\in A^p(V^*)$]为V上的**p-向量**[**p-形式**]．

6.1.4 定义 任给$\omega\in A^p(V^*)$，$\sigma\in A^q(V^*)$，ω与σ的外积$\omega\wedge\sigma$是一个$(p+q)$-形式，它归纳地定义于下：

1° 对任一组有序指标$I=\{i_1,\cdots,i_p\}(p\geqslant 1)$，规定

$$e^I=e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_p}=\delta^I_J e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_p}, \qquad (11)$$

其中δ^I_J是**广义 Kronecker 记号**，当$i_1,\cdots,i_p$互异，J是I的偶[奇]排列时，$\delta^I_J=1$ [$\delta^I_J=-1$]，其它情况下$\delta^I_J=0$．

2° 规定 $e^I\wedge e^J=e^{IJ}$．

3° 若λ_i，$\mu_j\in\mathrm{K}$，$\omega^i\wedge\sigma^j(1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant k)$已有定义，则令

$$(\lambda_i\omega^i)\wedge(\mu_j\sigma^j)=\lambda_i\mu_j\omega^i\wedge\sigma^j.$$

以下结果表明$\omega\wedge\sigma(\omega\in A^p(V^*), \sigma\in A^q(V^*))$恒可定义．

6.1.5 定理 $A^p(V^*)(1\leqslant p\leqslant n)$ 是以$\{e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_p} \mid 1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n\}$为基的$\binom{n}{p}$维向量空间；每个$\omega\in A^p(V^*)$有分解式：

$$\omega=\sum_{i_1<\cdots<i_p}\omega_{i_1\cdots i_p}e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_p}=\frac{1}{p!}\omega_I e^I. \qquad (12)$$

证 记(12)之右端为σ，则$\sigma\in A^p(V^*)$，直接计算表明

$\sigma_I=\omega_I=\omega(e_{i_1},\cdots,e_{i_p})(i_1<\cdots<i_p)$.于是从$\omega$与$\sigma$的反称性推出$\omega=\sigma$．分解式(12)显然是唯一的． □

不难验证外积定义不依赖于基$\{e_i\}$的选择．$\wedge$可自然地扩张为$A(V^*)=\bigoplus\limits_{p\geq 0}A^p(V^*)$上的乘法，使$A(V^*)$成为一个K上的代数，称为$V$上的外代数．外乘法$\wedge$在下述意义上是反交换的：

$$\omega\wedge\sigma=(-1)^{pq}\sigma\wedge\omega,\quad \omega\in A^p(V^*),\quad \sigma\in A^q(V^*). \tag{13}$$

以上所述自然地过渡到外代数$A(V)=A(V^{**})$.

当$I=\{i_1,\cdots,i_p\}$时令$e_I=e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}$。通过"配对"

$$\langle e_I,\ e^J\rangle=\delta_I^J, \tag{14}$$

$A^p(V)$与$A^p(V^*)$互成对偶，即$A^p(V^*)=(A^p(V))^*$．类似地有$T_p^qV=(T_q^pV)^*$.

现在考虑线性映射的张量积．

6.1.6 定义 设$f\in L(V,W)$，$f_i\in L(V_i,W_i)$，V、W，V_i，$W_i(1\leqslant i\leqslant p)$是K上的有限维向量空间．称由恒等式

$$\langle x,f^*(\theta)\rangle=\langle f(x),\theta\rangle,\quad x\in V,\quad \theta\in W^* \tag{15}$$

决定的$f^*\in L(W^*,V^*)$为f的对偶映射.$\{f_i\}$的张量积是一个线性映射$f_1\otimes\cdots\otimes f_p:\otimes V_i\longrightarrow\otimes W_i$，它决定于

$$(f_1\otimes\cdots\otimes f_p)(\omega)(\theta^1,\cdots,\theta^p)=\omega(f_1^*\theta^1,\cdots,f_p^*\theta^p), \tag{16}$$

其中$\omega\in\otimes V_i$，$\theta^i\in W_i^*$．称$f^*\otimes\cdots\otimes f^*:T_p^0W\to T_p^0V$为$f$决定的拉回，通常就记作$f^*$．若$f:V\cong W$，则定义拉回

$$\underbrace{f^*\otimes\cdots\otimes f^*}_{p\text{个}}\otimes\overbrace{f^{-1}\otimes\cdots\otimes f^{-1}}^{q\text{个}}:T_p^qW\to T_p^qV, \tag{17}$$

通常也将(17)记作f^*，它可直接定义为：

$$(f^*\omega)(x_1,\cdots,x_p,\theta^1,\cdots,\theta^q)$$
$$=\omega(f(x_1),\cdots,f(x_p),(f^{-1})^*\theta^1,\cdots,(f^{-1})^*\theta^q),\tag{18}$$

其中$\omega\in T^q_pW$, $x_i\in V$, $\theta^j\in V^*$。称$f_*=(f^{-1})^*$为推前。

从定义直接推出f^*及f_*有如下性质：

6.1.7 定理 设$f\in L(V,W)$，$g\in L(W,U)$。则$f^*: T^0_pW\to T^0_pV(p\geqslant 0)$自然地扩张为一个代数同态（仍记作$f^*$）：$\bigoplus T^0_pW\to\bigoplus T^0_pV$（$\bigoplus T^0_pW$看作$T(W)$的子代数）；$f^*A(W^*)\subset A(V^*)$，且$f^*: A(W^*)\to A(V^*)$是外代数同态；$(g\circ f)^*=f^*\circ g^*: T^0_pU\to T^0_pV$。若$g,f$是同构，则$(g\circ f)_*=g_*\circ f_*: T^q_pV\to T^q_pU$。

若$\{e_i\}$与$\{\varepsilon_j\}$分别为V与W的基，$\{e^i\}$与$\{\varepsilon^j\}$是相应的对偶基，$f\in L(V,W)$，$f(e_i)=a^j_i\varepsilon_j$，$f^*(\varepsilon^j)=b^j_ie^i$，则

$$b^j_i=\langle e_i,\ f^*\varepsilon^j\rangle=\langle f(e_i),\ \varepsilon^j\rangle=a^j_i.\tag{19}$$

最后指出一个常用的同构。设V,W是有限维实向量空间，则依2.2.2与6.1.1有

$$L(V,W)=L(V,L(W^*,\mathrm{R}))\cong L(V,W^*;\mathrm{R})=V^*\otimes W.\tag{20}$$

特别，
$$L(V,V^*)\cong V^*\otimes V^*=T^0_2V.\tag{21}$$

任给$\omega\in T^0_2V$，设在同构(21)之下ω对应$\tilde{\omega}$，则成立$(\tilde{\omega}x)(y)=\omega(x,y)(x,y\in V)$；当$\tilde{\omega}: V\cong V^*$时说$\omega$是非异的。设$\{e_i\}$是$V$的基，$\tilde{\omega}e_i=a_{ij}e^j$，则$\omega_{ij}=(\tilde{\omega}e_i)(e_j)=a_{ij}$，可见$\omega$非异$\Longleftrightarrow(\omega_{ij})$是非异方阵。

将C看作实向量空间，约定

$$V^{\mathrm{C}}=V\otimes\mathrm{C}(\cong L(V^*,\ \mathrm{C})),\tag{22}$$

称V^{C}为V的复化，它可形式地写作$V+iV$。于是$(V^*)^{\mathrm{C}}=V^*+iV^*$，它是$V$上复值实线性泛函之全体。

参考文献：[2]，[12]，[20]，[45]，[52]，[83]。

习　题

1. δ^J_I 是一 (p,p) 阶张量，$I=\{i_1,\cdots,i_p\}$，$J=\{j_1,\cdots,j_p\}$.

2. 设 $x_i=x^j_i e_j$ $(1\leqslant i\leqslant n)$，则 $(e^1\wedge\cdots\wedge e^n)(x_1,\cdots,x_n)=\det(x^j_i)$.

3. 除常数因子的差别外，det是R^n上仅有的n-形式.

§2　张量丛与张量场

我们从一个一般的构成法引出张量丛概念．以下约定指标变程：$1\leqslant i\leqslant p$，$p+1\leqslant j\leqslant p+q$，$1\leqslant k\leqslant p+q(p+q>0)$.

6.2.1 定义　一个(p,q)阶张量函子是一个如下的对应规则Ω：(i)每组有限维实向量空间$\{V_k\}$对应一有限维实向量空间$\Omega\{V_k\}$；(ii)任给$A_i\in L(W_i,V_i)$，$A_j\in L(V_j,W_j)$，$\{A_k\}$对应一个$\Omega\{A_k\}\in L(\Omega\{V_k\},\Omega\{W_k\})$，使得$\Omega\{I_{V_k}\}=\mathrm{id}$，$\Omega(\{B_k\}\circ\{A_k\})=\Omega\{B_k\}\circ\Omega\{A_k\}$，其中

$$\{B_k\}\circ\{A_k\}=\{\cdots,A_i\circ B_i,\cdots,B_j\circ A_j,\cdots\};\qquad(1)$$

(iii)$\{A_k\}\longmapsto\Omega\{A_k\}$为$C^\infty$映射.

6.2.2 定理　设Ω是一(p,q)阶张量函子，E^k是M上的n_k维向量丛（下面只考虑实向量丛），$\mathrm{R}^n=\Omega\{\mathrm{R}^{n_k}\}$，$E_x=\Omega\{E^k_x\}$，$E=\bigcup\limits_{x\in M}E_x$，$\pi(E_x)=x$．任给$E^k$的向量丛图$(U,\varphi^k)$，令$\boldsymbol{\varphi}^i_x=(\varphi^i_x)^{-1}$，$\boldsymbol{\varphi}^j_x=\varphi^j_x$，$\varphi_x=\Omega\{\boldsymbol{\varphi}^k_x\}(x\in U)$；定义

$$\varphi:\pi^{-1}U\to U\times\mathrm{R}^n,\ \xi_x\longmapsto(x,\varphi_x(\xi_x)).\qquad(2)$$

则以所有如上所述的(U,φ)作为向量丛图确定E为M上的n维向量丛，记作$\Omega\{E^k\}$.

证　因每个$\boldsymbol{\varphi}^k_x$为线性同构，故6.2.1之(ii)推出φ_x亦为线性同构．若(V,ψ^k)亦为E^k的向量丛图，仿(2)定义ψ，$x\in$

$U\cap V$，则依6.2.1(ii)及(1)有

$$\psi_x\varphi_x^{-1}=\Omega\{\cdots,\varphi_x^j(\psi_x^j)^{-1},\cdots,\psi_x^j(\varphi_x^j)^{-1},\cdots\},\quad(3)$$

依6·2·1之(iii)，$x\longmapsto\psi_x\varphi_x^{-1}$是$C^\infty$映射．于是定理结论由5.6.2推出． □

对Ω与E^k作适当选择，就得到各种具体构造．如令$\Omega\{V_j\}=V_1\times\cdots\times V_q$，$\Omega\{A_j\}=A_1\times\cdots\times A_q$，则$\Omega$是一（0，$q$）阶张量函子．任给$M$上的向量从$E^1,\cdots,E^q$，依6.2.2构成的$\Omega\{E^j\}$就是直和$E^1\oplus\cdots\oplus E^q$（参看5.6.3）．将上面的×号换成$\otimes$，得到另一个（0，$q$）阶张量函子$\Omega'$，相应的$\Omega'\{E^j\}$写作$E^1\otimes\cdots\otimes E^q$，称为张量积．

其次，令$\Omega\{V,W\}=L(V,W)$；任给$f\in L(V_1,V)$，$g\in L(W,W_1)$，令$\Omega\{f,g\}:L(V,W)\to L(V_1,W_1)$，$h\longmapsto g\circ h\circ f$，则$\Omega$是一个（1,1）阶张量函子．任给$M$上的向量从$E,F$，以$L(E,F)$记向量从$\Omega\{E,F\}$，它以$L(E_x,F_x)(x\in M)$为其纤维．特别得到向量从$E^*=L(E,M\times\mathrm{R})$，称它为$E$的**对偶从**．

6.2.3 定义 设E是M上的n维向量从．称

$$T_p^q(E)=\overbrace{E^*\otimes\cdots\otimes E^*}^{p\text{个}}\otimes\overbrace{E\otimes\cdots\otimes E}^{q\text{个}}\quad(4)$$

为E上的（p,q）阶张量从；其次，约定$T_0^0(E)=M\times\mathrm{R}$．称$T_p^q(TM)$为$M$上的（$p,q$）阶张量从，简记作$T_p^qM$；称$(TM)^*$为$M$的余切从，简记作$T^*M$．

令$T_p^q\mathrm{R}^n=\mathrm{R}^{n^{p+q}}$，$\pi:T_p^q(E)\to M$是投影．任给$E$的向量从图$(U,\varphi)$，$x\in U$，$\varphi_{x*}:T_p^qE_x\to T_p^q\mathrm{R}^n$依6.1.6，令

$$\Phi:\pi^{-1}U\to U\times\mathrm{R}^{n^{p+q}},\ \xi_x\longmapsto(x,\ \varphi_{x*}(\xi_x)),\quad(5)$$

则从(2)(4)看出（U，Φ）正是$T_p^q(E)$的向量从图．

6.2.4 定理 设$\{\sigma_1,\cdots,\sigma_n\}\subset\Gamma(U,F)$是$E$的局部基，$\forall x\in U$：$\{\sigma^i(x)\}$是$\{\sigma_i(x)\}$的对偶基．则

$$\{\sigma^{i_1}\otimes\cdots\otimes\sigma^{i_p}\otimes\sigma_{j_1}\otimes\cdots\otimes\sigma_{j_q}|$$
$$i_1,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_q=1,2,\cdots,n\} \qquad (6)$$

是$T^q_p(E)$在U内的一组局部基.

证 设φ如§5.6(2), $\{e_i\}$是R^n的标准基, $\{e^i\}$是$\{e_i\}$的对偶基. 因$\{e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_p}\otimes e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_q}|\ 1\leqslant i_1,\cdots,i_p,\ j_1,\cdots,j_q\leqslant n\}$是$T^q_p\mathrm{R}^n$的标准基, 任给$x\in U$,

$$\varphi_{x*}(\sigma^{i_1}\otimes\cdots\sigma^{i_p}\otimes\sigma_{j_1}\otimes\cdots\otimes\sigma_{j_q})_x$$
$$=e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_p}\otimes e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_q},$$

故所要结论从5.6.6推出. □

推论 任给M的坐标系$(U,\ x^i)$, 以$\{dx^i\}$记$\{\partial/\partial x^i\}$的对偶基, 则$T^q_pM$在$U$内有一组局部基:

$$\left\{dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_p}\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j_q}}\right|$$
$$\left.1\leqslant i_1,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_q\leqslant m\right\}. \qquad (7)$$

任给E的局部基$\{\sigma_1,\cdots,\sigma_n\}\subset\Gamma(U,E)$,

$$\{\sigma_{i_1}\wedge\cdots\wedge\sigma_{i_p}|\ 1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n\} \qquad (8)$$

含于$\Gamma(U,\ T^p_0(E))$, 且(8)逐点为$A^p(E_x)(x\in U)$的基. 由5.6.10, $A^p(E)=\bigcup_{x\in M}A^p(E_x)$是$T^p_0(E)$的子丛, 它有形如(8)的局部基. 称$A^p(E)$为$E$的**$p$次外幂**.

6.2.5 定义 称任何$\omega\in\Gamma^r(T^q_pM)$ $[\omega\in\Gamma^r(A^p(T^*M))]$为$M$上的$C^r$类的$(p,q)$阶张量场 [$C^r$类的$p$阶微分形式或$p$-形式]. 令$\mathscr{T}^q_p(M)=\Gamma(T^q_pM)$, $\mathscr{T}(M)=\bigoplus_{p,q\geqslant0}\mathscr{T}^q_p(M)$; $A^p(M)=\Gamma(A^p(T^*M))$, $A(M)=\bigoplus_{p\geqslant0}A^p(M)$. $\mathscr{T}(M)$ $[A(M)]$依自然的逐点运算成一实代数, 称为M上的**张量代数**[**外代数**].

注意$\mathscr{T}^0_0(M)=A^0(M)=C^\infty(M)$，$\mathscr{T}^1_0(M)=\mathscr{X}(M)$. 若$\omega\in\mathscr{T}^q_p(M)$，$\sigma\in A^p(M)$，$(U,x^i)$ 是M上任一坐标系，则依(7)(8) 有

$$\omega|U=\omega^J_I dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_p}\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j_q}};\tag{9}$$

$$\sigma|U=\sum_{i_1<\cdots<i_p}\sigma_I dx^I=\frac{1}{p!}\sigma_I dx^I,\tag{10}$$

其中 $I=\{i_1,\cdots,i_p\}$，$J=\{j_1,\cdots,j_q\}$，

$$dx^I=dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}.\tag{11}$$

若$\bar\omega^J_I$是ω关于坐标系$(\bar x^i)$的分量，则依§1(9) 及§5.3(4)有

$$\bar\omega^J_I=\frac{\partial x^{k_1}}{\partial\bar x^{i_1}}\cdots\frac{\partial x^{k_p}}{\partial\bar x^{i_p}}\frac{\partial\bar x^{j_1}}{\partial x^{l_1}}\cdots\frac{\partial\bar x^{j_q}}{\partial x^{l_q}}\omega^L_K.\tag{12}$$

通常只要写出一个形如(9)或(10)的表达式，就意味着(x^i)是M上某个坐标系，而无需明确提到这一点.

6.2.6 定义 设$f\in C^\infty(M,N)$. 任给$x\in M$，$y=f(x)$，映射$f^*_x=(df_x)^*:T^0_pN_y\to T^0_pM_x$ 依6.1.6. 任给$\omega\in\mathscr{T}^0_p(N)$，由

$$(f^*\omega)_x=f^*_x\omega_y,\quad x\in M,\quad y=f(x)\tag{13}$$

定义出$f^*\omega\in\mathscr{T}^0_p(M)$；当$g\in C^\infty(N)$时规定$f^*(g)=g\circ f$. 如此得到的映射$f^*:\mathscr{T}^0_p(N)\to\mathscr{T}^0_p(M)(p\geq 0)$称为$f$的导出映射或拉回. 若$f:M\subsetneq N$，$\omega\in\mathscr{T}^0_p(N)$，则称$f^*\omega$为$\omega$在$M$上的限制，记作$\omega|M$或就写作$\omega$. 若$f\in\mathrm{Diff}(M,N)$，则可仿照(13)定义出$f^*:\mathscr{T}^q_p(N)\to\mathscr{T}^q_p(M)$；令$f_*=(f^{-1})^*$.

6.1.7的结论自然地推广到"整体的"f^*.

若$f\in C^\infty(M,N)$有局部表示$(x^1,\cdots,x^m)\longmapsto(y^1,\cdots,y^n)$，则依§5.3(7)及上节(19)有公式：

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\ \frac{\partial}{\partial y^j};\ \ f^*(dy^j)=\frac{\partial y^j}{\partial x^i}dx^i. \tag{14}$$

特别令$f=1_M$，得到坐标变换公式：

$$\frac{\partial}{\partial x^i}=\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\ \frac{\partial}{\partial y^j};\ \ dy^j=\frac{\partial y^j}{\partial x^i}dx^i. \tag{15}$$

注意(15)的第二式形式上正是“全微分公式”.

设E，F是M上的向量丛，$A:\Gamma(E)\to\Gamma(F)$是一线性映射．若$\forall f\in C^\infty(M)$，$u\in\Gamma(E)$：$A(fu)=fAu$，则称A是$C^\infty(M)$-线性的；若对任给开集$U\subset M$，$u,v\in\Gamma(E)$，当$u|U=v|U$时$(Au)|U=(Av)|U$，则称A是**局部的**；若$\forall x\in M,u\in\Gamma(E)$，$(Au)(x)$完全决定于$u(x)$，则说$A$是“点式的”．以上术语自然推广到多个变元的映射．

6.2.7 定理 设$E,E^1,\cdots,E^p$是M上的量丛，映射向$A:\Gamma(E^1)\times\cdots\times\Gamma(E^p)\to\Gamma(E)$分别对各变元是$C^\infty(M)$-线性的，则它是点式的，即$A(u_1,\cdots,u_p)(x)$决定于$u_i(x)(1\leqslant i\leqslant p$，$x\in M)$．

证 不妨设$p=2$．首先证A是局部的．设$u_i,u_i'\in\Gamma(E^i)$，$u_i|U=u_i'|U$，$i=1,2$，$U\subset M$是一开集．任给$x\in U$，取$f\in C^\infty(M)$：$\{x\}\prec f\prec U$，于是从$fu_i=fu_i'(i=1,2)$推出

$$\begin{aligned}A(u_1,\ u_2)(x)&=A(fu_1,\ fu_2)(x)\\&=A(fu_1',\ fu_2')(x)=A(u_1',\ u_2')(x).\end{aligned}$$

其次证：任给开集$U\subset M$，A决定它在“U上的限制”$A|U:\Gamma(U,E^1)\times\Gamma(U,E^2)\to\Gamma(U,E)$，$A|U$对每个变元是$C^\infty(U)$-线性的，且$A(u_1,\ u_2)|U=(A|U)(u_1|U,\ u_2|U)(u_i\in\Gamma(E^i)$，$i=1,2)$．事实上，任给$v_i\in\Gamma(U,E^i)(i=1,2)$；$x\in U$，存在$u_i\in\Gamma(E^i)$及$x$的邻域$V$：$u_i|V=v_i|V$，$i=1,2$（5.6.7）．定义$(A|U)(v_1,v_2)(x)=A(u_1,u_2)(x)$，由$A$的局部性，此定义不依赖于$u_i$的选择．直接看出$A|U$具有所要求

的性质.

现在取定$x\in M$，设$\{u_i\}$与$\{v_j\}$分别为E^1与E^2在x的某邻域U内的局部基．任给$u\in\Gamma(E^1), v\in\Gamma(E^2)$，设$u|U=\lambda^i u_i$，$v|U=\mu^j v_j$，则已证结论推出

$$A(u,v)(x)=\lambda^i(x)\mu^j(x)(A|U)(u_i,v_j)(x),$$

可见$A(u,v)(x)$由$u(x)$，$v(x)$完全决定. □

推论 $\omega\in\mathscr{T}^q_p(M)(p+q>0)\Longleftrightarrow$存在映射

$$\varpi:\overbrace{\mathscr{X}(M)\times\cdots\times\mathscr{X}(M)}^{p个}\times\overbrace{\Lambda^1(M)\times\cdots\times\Lambda^1(M)}^{q个}\to C^\infty(M),$$

ϖ对各变元是$C^\infty(M)$-线性的，对任给$X_1,\cdots,X_p\in\mathscr{X}(M)$，$\theta^1,\cdots,\theta^q\in\Lambda^1(M)$，$x\in M$：$\varpi(X_1,\cdots,X_p,\theta^1,\cdots,\theta^q)(x)=\omega(X_{1x},\cdots,X_{px},\theta^1_x,\cdots,\theta^q_x)$.

上述的ϖ今后与ω不加区别，且就写作ω.

任给M上的n维实向量丛E，定义其复化为

$$E^{\mathrm{C}}=E\otimes(M\times\mathrm{C}) \tag{16}$$

（参看§1(22)），其中$M\times\mathrm{C}$看作2维实向量丛．E^{C}可看作n维复向量丛，E的局部基可作为复向量丛E^{C}的局部基，因此$\Gamma(E)$与$\Gamma(E^{\mathrm{C}})$的差别不过是$u\in\Gamma(E^{\mathrm{C}})$的局部表示使用复系数而已．特别，若令

$$\Lambda^p_{\mathrm{C}}(T^*M)=(\Lambda^p(T^*M))^{\mathrm{C}},\quad \Lambda^p_{\mathrm{C}}(M)=\Gamma(\Lambda^p_{\mathrm{C}}(T^*M)), \tag{17}$$

则可将$\omega\in\Lambda^p_{\mathrm{C}}(M)$解释为"复系数$p$阶微分形式"，即

$$\omega=\frac{1}{p!}\omega_I dx^I,$$

ω_I是复值C^∞函数．对于$\mathscr{T}^0_p(M)$亦可作类似扩张．本章中有关微分形式与张量场的种种概念与结果在适当形式下自然地推广到"复系数"的情况，今后将直接认可这种推广而不另作说明.

参考文献：[2]，[12]，[22]，[44]，[45]，[57]，[83]．

习题

1．任给$f\in C^\infty(M)$，$df\in A^1(M)$，在局部坐标下$df=\partial_i f dx^i$；若$df(x)=0$，则$H(x)=\partial_i\partial_j f(x)dx^i\otimes dx^j$是$M_x$上的2阶对称张量，但$H$未必为$M$上的张量场．

2．若$f\in C^\infty(M,N)$有局部表示$(x^1,\cdots,x^m)\longmapsto(y^1,\cdots,y^n)$，则

$$f^*dy^I=\frac{1}{p!}\frac{D(y^{i_1},\cdots,y^{i_p})}{D(x^{j_1},\cdots,x^{j_p})}dx^J,$$

其中$I=\{i_1,\cdots,i_p\}$，$J=\{j_1,\cdots,j_p\}$．

§3　外微分与Lie导数

本节考察定义于$\Lambda(M)$与$\mathscr{T}(M)$上的几个重要微分算子，它们如同通常的导数一样满足某种“Leibniz 规则”（见下面的(1)(2)(3))，因而亦称为“导数”．

6.3.1 定义　若一线性算子$A:\Lambda(M)\to\Lambda(M)$满足$A\Lambda^p(M)\subset\Lambda^{p+s}(M)$，且对任给$\omega\in\Lambda^p(M)$，$\sigma\in\Lambda(M)$有

$$A(\omega\wedge\sigma)=A\omega\wedge\sigma+\varepsilon\omega\wedge A\sigma,\tag{1}$$

$\varepsilon=1\,[\varepsilon=(-1)^p]$，则称$A$为（$M$上的）$s$阶导数[反导数]．若一线性算子$A:\mathscr{T}(M)\to\mathscr{T}(M)$满足$A\mathscr{T}^q_p(M)\subset\mathscr{T}^q_p(M)$，

$$A(\omega\otimes\sigma)=A\omega\otimes\sigma+\omega\otimes A\sigma,\quad\omega,\sigma\in\mathscr{T}(M);\tag{2}$$

$$A(\langle X,\theta\rangle)=\langle AX,\theta\rangle+\langle X,A\theta\rangle,\tag{3}$$

$$X\in\mathscr{X}(M),\quad\theta\in\Lambda^1(M),$$

则称A为(M上的)一个张量导数．

6.3.2 定理　设A是M上一导数．则(i) A是局部的；(ii) 任给开集$U\subset M$，存在唯一导数$A|U:\Lambda(U)\to\Lambda(U)$（称为$A$在$U$上的限制），使得$\forall\omega\in\Lambda(M)$：$(A|U)(\omega|U)=(A\omega)|U$；(iii) A完全由$A|\Lambda^i(M)(i=0,1)$确定．

对于反导数与张量导数亦有类似结论.

证 证法类似于6.2.7. 结论 (i) 基于等式 $A(f\omega)=Af\wedge\omega+fA\omega(f\in C^\infty(M),\ \omega\in\Lambda(M))$. 对于 (ii) ，定义

$$(A|U)(\omega)(x)=(A\omega')(x),\ \omega\in\Lambda(U),\ x\in U,$$

其中 $\omega'\in\Lambda(M)$，ω'与ω在x邻近相等. 若 $(A|U)\ (\sigma)(x)=(A\sigma')(x)$，$\sigma\in\Lambda(U)$，$\sigma'\in\Lambda(M)$，则

$$\begin{aligned}(A|U)(\omega\wedge\sigma)(x)&=A(\omega'\wedge\sigma')(x)\\&=(A\omega')_x\wedge\sigma'_x+\omega'_x\wedge(A\sigma')_x\\&=((A|U)\omega\wedge\sigma+\omega\wedge(A|U)\sigma)_x,\end{aligned}$$

可见$A|U$是一导数，它显然是满足(ii)的唯一导数. 下面仍记$A|U$为A. 若(U,x^i)是M上一坐标系，$\omega\in A^p(M)$，则只要$A(dx^i)$ 与$A\omega_I(I=\{i_1,\cdots,i_p\})$ 已确定，即可依

$$(A\omega)|U=\frac{1}{p!}A(\omega_I dx^I)$$

(参看§2(10))及公式(1)算出$(A\omega)|U$，这就证明了结论(iii). □

6.3.2 表明，M上一导数 [反导数，张量导数] A完全由$A(dx^i)$ 与$Af(f\in C^\infty(M))$ 的算式确定；对于张量导数A，$A(dx^i)$与$A\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$可由(3)互相确定.

6.3.3 定理 存在唯一的1阶反导数$d:\Lambda(M)\to\Lambda(M)$，使得$d^2=0$，$df(f\in C^\infty(M))$即$f$的微分(参看§2习题 1).称这样的$d$为$M$上的**外微分算子**.

证 若所述的d存在，则由$d(dx^i)=d^2x^i=0$及6.3.2推出d唯一确定. 利用(1)及$d^2=0$可归纳地推出：

$$d(fdx^I)=df\wedge dx^I,\ f\in A^0(M). \tag{4}$$

反之，任给M的坐标系 (U,x^i)，依(4)定义出线性算子$d:\Lambda(U)\to\Lambda(U)$，它满足$dA^p(U)\subset A^{p+1}(U)$，$p\geqslant0$. 任给

$\omega=fdx^I$, $\sigma=gdx^J$, $f,g\in C^\infty(U)$, $I=\{i_1,\cdots,i_p\}$, $J=\{j_1,\cdots,j_q\}$,

$$d(\omega\wedge\sigma)=(gdf+fdg)\wedge dx^I\wedge dx^J$$
$$=d\omega\wedge\sigma+(-1)^p\omega\wedge d\sigma;$$

$$d^2\omega=d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^I\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}dx^j\wedge dx^i\wedge dx^I$$

$$=-\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}dx^j\wedge dx^i\wedge dx^I=0,$$

可见 d 是 U 内的外微分算子，记为d_U. 由已证唯一性结论，如此定义的d_U, d_V必在$U\cap V$上一致($U,V\subset M$是开集). 于是有整体的 $d:\Lambda(M)\to\Lambda(M)$, 使得如上的 d_U是 d 在 U 内的限制, d 就是M上的外微分算子. □

6.3.3的证法具有典型性，下面遇到类似情况时(见6.3.6, 6.5.3, 6.6.2), 将不再详述同类的证明细节.

6.3.4 定理 若 $h\in C^\infty(M,N)$, 则 $dh^*=h^*d:\Lambda(N)\to\Lambda(M)$.

证 首先，对任给$f\in C^\infty(N)$, $X\in\mathscr{X}(M)$有

$$dh^*(f)(X)=d(fh)(X)=dfdh(X)=(h^*df)(X),$$

这推出$dh^*(f)=h^*df$. 进而对$\omega\wedge df\in\Lambda^p(N)$归纳地有:

$$dh^*(\omega\wedge df)=d(h^*\omega\wedge dh^*f)=dh^*\omega\wedge dh^*f$$
$$=h^*(d\omega\wedge df)=h^*d(\omega\wedge df).$$ □

取定$X\in\mathscr{X}(M)$, 对任给$\omega\in\mathscr{T}_p^q(M)(p\geqslant1)$, 由等式

$$(i_X\omega)(X_2,\cdots,X_p,\ \theta^1,\cdots,\theta^q)$$
$$=\omega(X,X_2,\cdots,X_p,\theta^1,\cdots,\theta^q), \qquad (5)$$
$$X_2,\cdots,X_p\in\mathscr{X}(M),\ \theta^1,\cdots,\theta^q\in\Lambda^1(M)$$

定义出$i_X\omega\in\mathscr{T}_{p-1}^q(M)$; 约定 $i_Xf=0(f\in C^\infty(M))$. 直接看出$i_X\Lambda^p(M)\subset\Lambda^{p-1}(M)$. $\omega\longmapsto i_X\omega$实际上是一短缩 (6.1.3), 因(5)推出:

$$(i_X\omega)_I^J = X^k \omega_{kI}^{\;J}. \tag{6}$$

6.3.5 定理 "内积算子" $i_X: \Lambda(M)\to\Lambda(M)$ 是满足条件$i_X f=0$, $i_X df = X(f)(f\in C^\infty(M))$ 的唯一的 -1 阶反导数.

证 唯一性直接从6.3.2推出. 今验证

$$i_X(\omega\wedge\sigma) = i_X\omega\wedge\sigma + (-1)^p\omega\wedge i_X\sigma, \tag{7}$$
$$\omega\in\Lambda^p(M),\ \sigma\in\Lambda(M).$$

$p=0$时（7）显然成立. $p=1$时可利用（6）直接验证（7）（可设$\omega=dx^1$, $\sigma=dx^J$, $J\subset\{2,\cdots,m\}$）. 其次设$\omega=\theta\wedge\omega'\in\Lambda^p(M)$, $\theta\in\Lambda^1(M)$, 则作归纳假设后推出

$$\begin{aligned}
i_X(\omega\wedge\sigma) &= i_X\theta\wedge\omega'\wedge\sigma - \theta\wedge i_X(\omega'\wedge\sigma)\\
&= i_X\theta\wedge\omega'\wedge\sigma - \theta\wedge i_X\omega'\wedge\sigma + (-1)^p\theta\wedge\omega'\wedge i_X\sigma\\
&= i_X\omega\wedge\sigma + (-1)^p\omega\wedge i_X\sigma.
\end{aligned}$$

□

6.3.6 定理 每个$X\in\mathscr{X}(M)$决定M上唯一张量导数L_X, 使得$L_X(f)=X(f)$, $L_X df = dL_X(f)(f\in C^\infty(M))$,且映射$(X,\omega)\longmapsto L_X\omega$是局部的. L_X称为**Lie导数**.

证 若所述L_X存在, $X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, 则

$$L_X(dx^i) = dX(x^i) = dX^i = \partial_j X^i dx^j. \tag{8}$$

由6.3.2, L_X唯一确定. 由(3)(8)推出:

$$\begin{aligned}
L_X\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) &= \left\langle L_X\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right),\ dx^j\right\rangle\frac{\partial}{\partial x^j}\\
&= -\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\ L_X(dx^j)\right\rangle\frac{\partial}{\partial x^j}\\
&= -\partial_i X^j\frac{\partial}{\partial x^j}.
\end{aligned} \tag{9}$$

反之, 利用 (8)(9)(2) 及$L_X(f)=X(f)$, 可局部地定义

L_X，然后如6.3.3一样完成证明. □

Lie 积$[X,Y]$可解释为 Lie 导数，依(9)及§5.7(5)有

$$L_X Y = X(Y^i)\frac{\partial}{\partial x^i} + Y^i L_X\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

$$= [X(Y^i) - Y(X^i)]\frac{\partial}{\partial x^i} = [X,Y].$$

$L_X\omega$ 可解释为"ω 沿X的方向导数". 这一观点从以下结果看来更为明显.

6.3.7 定理 设θ是$X\in\mathscr{X}(M)$的流，$\omega\in\mathscr{T}(M)$，则

$$L_X\omega = \frac{d}{dt}(\theta_t^*\omega)|_{t=0}, \tag{10}$$

从而

$$\theta_t^* L_X\omega = \frac{d}{ds}(\theta_{t+s}^*\omega)|_{s=0} = \frac{d}{dt}(\theta_t^*\omega). \tag{11}$$

证 令 $A\omega = \frac{d}{dt}(\theta_t^*\omega)|_{t=0}$，则$A$满足(2)，且

$$(Af)(x) = \frac{d}{dt}f(\theta(t,x))|_{t=0} = (Xf)(x),$$

$$f\in C^\infty(M);$$

$$(Adx^i)(x) = \frac{d}{dt}[\partial_j\theta^i(t,x)dx^j]|_{t=0}$$

$$= \partial_j\left[\frac{d}{dt}\theta^i(t,x)|_{t=0}\right]dx^j = \partial_j X^i(x)dx^j$$

$$= (L_X dx^i)(x),$$

其中 $\theta^i(t,x)$ 是$\theta(t,x)$ 关于坐标系 (x^i) 的分量. 类似地有

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = L_X\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right),$$

于是必有 $A = L_X$. □

推论 $L_X\omega=0\Longleftrightarrow\omega$沿$X$不变，即$\theta_t^*\omega=\omega$.

(10)可作为Lie导数的定义；用它导出Lie导数的某些性质也有其方便．例如，任给$\omega,\sigma\in\Lambda(M)$，

$$L_X(\omega\wedge\sigma)=\frac{d}{dt}[(\theta_t^*\omega)\wedge(\theta_t^*\sigma)]|_{t=0}$$

$$=L_X\omega\wedge\sigma+\omega\wedge L_X\sigma,$$

可见$L_X:\Lambda(M)\to\Lambda(M)$是一"0阶导数".

公式(3)有一个很一般的推广.

6.3.8 定理 若$A:\mathscr{T}(M)\to\mathscr{T}(M)$是一张量导数，则对任给$\omega\in\mathscr{T}_p^q(M)$，$X_1,\cdots,X_p\in\mathscr{X}(M)$，$\theta^1,\cdots,\theta^q\in\Lambda^1(M)$，成立

$$\begin{aligned}(A\omega)(X_1,\cdots,X_p,\theta^1,\cdots,\theta^q)&=A(\omega(X_1,\cdots,X_p,\theta^1,\cdots,\theta^q))\\&-\sum_i\omega(X_1,\cdots,AX_i,\cdots,X_p,\theta^1,\cdots,\theta^q)\\&-\sum_j\omega(X_1,\cdots,X_p,\theta^1,\cdots,A\theta^j,\cdots,\theta^q).\end{aligned}\tag{12}$$

证 令$(B\omega)(X_1,\cdots,X_p,\theta^1,\cdots,\theta^q)$为(12)之右端，$Bf=Af(f\in C^\infty(M))$．则可验证$B$满足(2)，且对任给$X\in\mathscr{X}(M)$，$\theta\in\Lambda^1(M)$有

$$(BX)(\theta)=A(\langle X,\theta\rangle)-\langle X,A\theta\rangle=(AX)(\theta);$$

$$(B\theta)(X)=A(\langle X,\theta\rangle)-\langle AX,\theta\rangle=(A\theta)(X),$$

可见$AX=BX$，$A\theta=B\theta$．由此推出$A=B$． □

推论 若$X,X_1,\cdots,X_p\in\mathscr{X}(M)$，$\theta^1,\cdots,\theta^q\in\Lambda^1(M)$，$\omega\in\mathscr{T}_p^q(M)$，则

$$\begin{aligned}&X(\omega(X_1,\cdots,X_p,\theta^1,\cdots,\theta^q))\\&=(L_X\omega)(X_1,\cdots,X_p,\theta^1,\cdots,\theta^q)\\&\quad+\sum_i\omega(X_1,\cdots,L_XX_i,\cdots,X_p,\theta^1,\cdots,\theta^q)\\&\quad+\sum_j\omega(X_1,\cdots,X_p,\theta^1,\cdots,L_X\theta^j,\cdots,\theta^q).\end{aligned}\tag{13}$$

现将有关算子 d , i_X, L_X 的主要公式列举如下.

6.3.9 定理 设 $X, X_0, \cdots, X_p, Y \in \mathscr{X}(M), \omega \in A^p(M)$, 则

1° $L_X = i_X d + d i_X$ (Cartan公式); (14)

2° $[d, L_X] = 0$, $[L_X, i_X] = 0$; (15)

3° $[L_X, i_Y] = i_{[X,Y]}$; $[L_X, L_Y] = L_{[X,Y]}$, (16)

(14)—(16) 中的算子作用于 $A(M)$, $[A, B] = AB - BA$;

4°
$$(d\omega)(X_0, \cdots, X_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i X_i(\omega(X_0, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_p)) + \sum_{0 \le i < j \le p} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, \hat{X}_j, \cdots, X_p); \quad (17)$$

特别,
$$(d\omega)(X_0, X_1) = X_0(\omega(X_1)) - X_1(\omega(X_0)) - \omega([X_0, X_1]). \quad (18)$$

证 易见 $A = i_X d + d i_X$ 是一0阶导数, $A(f) = X(f)$, $A(df) = L_X df (f \in C^\infty(M))$, 于是 $A = L_X$(6.3.2). (14) 直接推出(15). 类似地, $B = [L_X, i_Y]$ 是 -1 阶反导数, $B(f) = 0$, $B(df) = i_{[X,Y]}(df) (f \in C^\infty(M))$, 故 $B = i_{[X,Y]}$; 结合(14) 推出 $[L_X, L_Y] = L_{[X,Y]}$.

(17)在 $p = 0$ 时显然成立, 若 $p > 0$, 则它由
$$(d\omega)(X_0, \cdots, X_p) = (L_{X_0}\omega - d i_{X_0}\omega)(X_1, \cdots, X_p)$$
及(13)依归纳法得证. □

参考文献: [2], [12], [22], [45], [57], [83], [84].

习 题

1. $L_{fX}\omega = f L_X \omega + df \wedge i_X \omega$, $f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathscr{X}(M)$, $\omega \in A(M)$.

2. 设 X 生成流 θ, $\omega \in A(M)$, $d\omega = 0$, $d i_X \omega = 0$, 则 $\theta_t^* \omega = \omega$.

3. 设 $f \in C^\infty(M, N)$，$X \in \mathscr{X}(M)$，$Y \in \mathscr{X}(N)$，$X \stackrel{f}{\sim} Y$，$\omega \in \Lambda(N)$. 则 $i_X f^* \omega = f^* i_Y \omega$，$L_X f^* \omega = f^* L_Y \omega$.

4. $L_X i_Y - L_Y i_X - i_{[X, Y]} = [d, i_X i_Y]$，$X, Y \in \mathscr{X}(M)$.

§4 微分理想

利用微分形式与外微分概念，可给 Frobenius 定理一个新的表述，后者在应用上通常更为方便.

6.4.1 定义 设$I \subset \Lambda(M)$ 是一理想（本节所说的理想概指外代数 $\Lambda(M)$ 中的双边理想）. 若存在一个族 $\{(U_\alpha;\ \theta_\alpha^1, \cdots, \theta_\alpha^k)\}$，满足：(i) $\{U_\alpha\}$ 是 M 的开覆盖，$\{\theta_\alpha^i\} \subset \Lambda^1(U_\alpha)$ 逐点线性无关；(ii) $\forall \omega \in \Lambda(M)$：$\omega \in I \Longleftrightarrow \forall \alpha$，$\omega|U_\alpha = \sum_{i=1}^k \sigma_\alpha^i \wedge \theta_\alpha^i$，$\sigma_\alpha^i \in \Lambda(U_\alpha)$；(iii) 在$U_\alpha \cap U_\beta$上$\theta_\beta^i = \sum_{j=1}^k a_j^i \theta_\alpha^j$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$，则称 I 为M上(局部地)由 1- 形式生成的 k 秩理想，称 $\{\theta_\alpha^i\}$ 为 I 的局部基；当$dI \subset I$时称 I 为微分理想.

1-形式生成的理想[微分理想]与5.9.1意义下的分布[可积分布]之间有一个完全的对应关系.

6.4.2 定理 任给 n 维分布$E \subset TM$，令

$$I^p(E) = \{\omega \in \Lambda^p(M) |\ X_1, \cdots, X_p \in E \Rightarrow \omega(X_1, \cdots, X_p) = 0\}, \tag{1}$$

则$I(E) = \bigoplus_{p>0} I^p(E)$ 是一个由1-形式生成的 $m-n$ 秩理想. 反之，任给由1-形式生成的k秩理想$I \subset \Lambda(M)$，存在唯一 $m-k$ 维分布 $E \subset TM$：$I = I(E)$.

证 设$E \subset TM$是一 n 维分布. 取一个族$\{(U_\alpha;\ X_1^\alpha, \cdots, X_n^\alpha)\}$；$\{X_i^\alpha\}_{i=1}^n$是$E$在$U_\alpha$内的局部基，$M = \bigcup U_\alpha$(5.6.10). 不妨设每个$\{X_i^\alpha\}_{i=1}^n$已“延长”为$TM$在$U_\alpha$内的局部基$\{X_i^\alpha\}_{i=1}^m$. 设$\{\theta_\alpha^i\}_{i=1}^m$是$\{X_i^\alpha\}_{i=1}^m$的对偶基，今指明$\{(U_\alpha;\ \theta_\alpha^{n+1}, \cdots, \theta_\alpha^m)\}$满足 6.4.1之 (ii)(iii)((i) 已自明). 任给$\omega \in$

$\Lambda(M)$，$\omega|U_\alpha$可表成：

$$\omega|U_\alpha=\sum C^\alpha_{i_1\cdots i_p}\theta^{i_1}_\alpha\wedge\cdots\wedge\theta^{i_p}_\alpha, \qquad (2)$$

(2) 右端对所有 $\{i_1,\cdots,i_p\}\subset\{1,2,\cdots,m\}$ 求和. 由 (1)，$\omega\in I(E)\Longleftrightarrow\forall\alpha$：当 $\{i_1,\cdots,i_p\}\subset\{1,2,\cdots,n\}$ 时 $C^\alpha_{i_1\cdots i_p}=0\Longleftrightarrow\forall\alpha$：

$$\omega|U_\alpha=\sum_{i=n+1}^{m}\sigma^i_\alpha\wedge\theta^i_\alpha,\quad \sigma^i_\alpha\in\Lambda(U_\alpha). \qquad (3)$$

(3) 也表明 $I(E)$ 是一理想. 设在 $U_\alpha\cap U_\beta$ 上 $X^\alpha_i=a^j_iX^\beta_j(1\leqslant i\leqslant m)$. 因 $\{X^\alpha_i\}^n_{i=1}$ 与 $\{X^\beta_i\}^n_{i=1}$ 都是 E 在 $U_\alpha\cap U_\beta$ 内的局部基，故当 $i\leqslant n$，$j>n$ 时 $a^j_i=0$. 过渡到对偶得 $\theta^i_\beta=\sum^m_{j=n+1}a^i_j\theta^j_\alpha(n<i\leqslant m)$，这就证明了 $I(E)$ 是一个由1-形式生成的理想.

其次，设 I 与 $(U_\alpha;\ \theta^1_\alpha,\cdots,\theta^k_\alpha)\}$ 有如 6.4.1. 以 F 记 T^*M 的 k 维子丛，它以 $\{\theta^i_\alpha\}^k_{i=1}$ 为局部基. 不妨设每个 $\{\theta^i_\alpha\}^k_{i=1}$ 已补足成 T^*M 的局部基 $\{\theta^i_\alpha\}^m_{i=1}$，以 $\{X^\alpha_i\}^m_{i=1}$ 记其对偶基. 则以 $\{X^\alpha_i\}^m_{i=k+1}$ 为局部基生成一 $n(=m-k)$ 维分布 E，它满足：$X\in E_x\Longleftrightarrow\forall\theta\in F_x$：$\langle X,\ \theta\rangle=0$. 由此立即看出 $I(E)=I$，且 E 由这一条件唯一确定. □

下面就是基于微分理想的Frobenius 定理.

6.4.3 定理 设 $E\subset TM$ 是一 n 维分布，记号 $I(E)$ 及 $(U_\alpha;\ \theta^{n+1}_\alpha,\cdots,\theta^m_\alpha)$ 的意义如 6.4.2. 则以下条件互相等价：

1° E 是对合的；

2° $I(E)$ 是一微分理想；

3° $\forall\alpha$：$d\theta^i_\alpha=\sum\limits_{j=n+1}^{m}\sigma^i_{\alpha j}\wedge\theta^j_\alpha$,

$$\sigma^i_{\alpha j}\in\Lambda^1(U_\alpha),\quad n<i\leqslant m;$$

4° $\forall\alpha$：$d\theta^i_\alpha\wedge\theta^{n+1}_\alpha\wedge\cdots\wedge\theta^m_\alpha=0\ (n<i\leqslant m)$；

5° $\forall\alpha$：$d(\theta^{n+1}_\alpha\wedge\cdots\wedge\theta^m_\alpha)=\theta_\alpha\wedge\theta^{n+1}_\alpha\wedge\cdots\wedge\theta^m_\alpha$,

$$\theta_\alpha\in\Lambda^1(U_\alpha);$$

6° 存在M的图册$\{(U_\alpha, x_\alpha^i)\}$，使得$\{dx_\alpha^i\}_{i=n+1}^m$是$I(E)$在$U_\alpha$内的局部基。

证 2°⇒3°。为书写简便，下面将U_α，θ_α^i写作U，θ^i。可以认为$\theta^i \in I(E)(n<i\leqslant m)$，故当$dI(E)\subset I(E)$时，依(3)有$d\theta^i=\sum_{j=n+1}^m \sigma_j^i \wedge \theta^j (n<i\leqslant m)$。

4°⇒5°。令$\omega=\theta^{n+1}\wedge\cdots\wedge\theta^m$。设$\{\theta^i\}_{i=1}^m$是$T^*M$的局部基，于是$d\theta^i=\sum_{k,l=1}^m a_{kl}^i \theta^k\wedge\theta^l$。4°推出当$n<i\leqslant m$，$1\leqslant k$，$l\leqslant n$时$a_{kl}^i=0$，因此5°从下式看出：

$$d\omega=\sum_{i=n+1}^m(-1)^{n+1-i}\theta^{n+1}\wedge\cdots\wedge d\theta^i\wedge\cdots\wedge\theta^m$$

$$=\sum_{i=n+1}^m\sum_{k,l=1}^m a_{kl}^i\theta^k\wedge\theta^l\wedge\theta^{n+1}\wedge\cdots\wedge\hat{\theta}^i\wedge\cdots\wedge\theta^m. \tag{4}$$

5°⇒2°。假定5°，若$dI(E)\not\subset I(E)$，则有某个$d\theta^i \bar{\in} I(E)$ $n<i\leqslant m$。依(4)中的记号，当$k,l>n$时$a_{kl}^i=0$，于是从(4)看出，$d\omega$不能表成$\theta\wedge\omega$，得出矛盾。

2°⇒1°。设$dI(E)\subset I(E)$，$X,Y\in\Gamma(M,E)$，则对任给$\omega\in I(E)\cap A^1(M)$，依(1)及上节(18)有$\omega([X,Y])=0$，这推出$[X,Y]\in\Gamma(M,E)$，$E$是对合的。

显然有1°⇒6°⇒3°⇒4°，于是定理证毕。 □

设$\{\theta^1,\cdots,\theta^k\}\subset A^1(M)$逐点线性无关，于是它生成一$k$秩理想$I$。若$I$（依6.4.2）对应的分布$E$可积，则称方程组$\{\theta^i=0, 1\leqslant i\leqslant k\}$（所谓Pfaff组）可积，称$E$的任何[极大]积分流形$N$为$I$或Pfaff组$\{\theta^i=0\}$的[极大]积分流形；当$N$是$I$的积分流形时必定有$\theta^i|N=0$ $(1\leqslant i\leqslant k)$。设$E$可积，依6.4.3之6°，局部地总可取坐标系$(x^i)$，使得$dx^i=\sum_{j=1}^k\mu_j^i\theta^j$ $(1\leqslant i\leqslant k)$，称$\mu_j^i$ $(1\leqslant i, j\leqslant k)$为方程组$\{\theta^i=0\}$的**积分因子**。注意$\theta^i=0(i=1, \cdots, k)\Longleftrightarrow x^i=\text{const}$ $(i=1, \cdots, k)$。

特别，若 $\theta\in\Lambda^1(M)$ 无处为零，则方程 $\theta=0$ 可积 $\Longleftrightarrow\theta\wedge d\theta=0\Longleftrightarrow$ 局部地 $dx^1=\mu\theta$，(x^i) 是 M 的某个坐标系，$\mu\neq 0$ 是积分因子．若 $\theta=\theta_i dx^i$，(x^i) 是 R^3 的自然坐标，则条件 $\theta\wedge d\theta=0$ 相当于 $X\cdot\mathrm{rot}\,X=0$，其中 $X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$，$X^i=\theta_i$（参看§6(20)）．

6.4.4 例　考虑方程组(参看§5.9习题2)：

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^j}=f^i_j(x^1,\cdots,x^n,\ y^1,\cdots,y^m),\tag{5}$$

$$1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n,$$

其中 $f^i_j\in C^\infty(U)$，$U\subset\mathrm{R}^{n+m}$ 是开集．(5) 等价于Pfaff组

$$\theta^i=dy^i-f^i_j dx^j=0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m.\tag{6}$$

由6.4.3，(6)可积的充要条件是

$$d\theta^i=\sigma^i_j\wedge\theta^j,\ \sigma^i_j\in\Lambda^1(U),\ 1\leqslant i\leqslant m.\tag{7}$$

依(6)经直接计算得

$$\begin{aligned}d\theta^i&=-df^i_j\wedge dx^j\\&=\left[\frac{\partial}{\partial x^k}(f^i_j)+f^l_k\frac{\partial}{\partial y^l}(f^i_j)\right]dx^j\wedge dx^k\\&\quad+\frac{\partial}{\partial y^l}(f^i_j)dx^j\wedge\theta^l.\end{aligned}$$

与(7)对照看出，(6)（从而(5)）可积的充要条件是：

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(f^i_j)-\frac{\partial}{\partial x^j}(f^i_k)+f^l_k\frac{\partial}{\partial y^l}(f^i_j)-f^l_j\frac{\partial}{\partial y^l}(f^i_k)=0,$$
$$i=1,2,\cdots,m,\ \ k,j=1,2,\cdots,n.\tag{8}$$

注　经典意义上的Frobenius定理，原就是给出可积性条件(8)．

最后建立一个较特殊的结果以备下章使用．

6.4.5 定理 设 $p: M\times N\to M$ 与 $q: M\times N\to N$ 是投影，$\{\theta^1,\cdots,\theta^n\}$ 是 T^*N 的一组整体基．

1° 若 $f\in C^\infty(M,N)$，I 是 $M\times N$ 上由 $\{(p^*f^*-q^*)\theta^i\}$ 生成的理想，则 f 的图形 Γ_f 是 I 的积分流形．

2° 若 $\{\alpha^1,\cdots,\alpha^n\}\subset A^1(M)$，$\{\beta^i=p^*\alpha^i-q^*\theta^i\}$ 生成 $M\times N$ 上一微分理想 J，$(x_0,y_0)\in M\times N$，则存在 x_0 的邻域 U 及 $f\in C^\infty(U,N)$，使得 $f(x_0)=y_0$，$f^*\theta^i=\alpha^i|U$．当 U 连通时，满足以上要求的 f 是唯一的．

证 1° Γ_f 可等同于 $M\times N$ 的子流形 (M,g)，其中 g 是嵌入 $M\to M\times N$，$x\longmapsto(x,f(x))$．从 $g^*(p^*f^*-q^*)=(fpg-qg)^*=0$ 推出 Γ_f 是 I 的积分流形．

2° 设 E 是 J 对应的对合分布．取 E 过 (x_0,y_0) 的积分流形 A．任给 $a\in A$，$Z\in A_a$，$p_*Z=0\Rightarrow\theta^i(q_*Z)=(q^*\theta^i)(Z)=(p^*\alpha^i-\beta^i)(Z)=0\,(1\leqslant i\leqslant n)\Rightarrow q_*Z=0$，可见 $p_*|A_a$ 是单射，从而 $p|A: A\to M$ 为局部微分同胚．取 x_0 的邻域 U 及 (x_0,y_0) 在 A 中的邻域 W，使 $p|W: W\cong U$，则 $f=q\circ(p|W)^{-1}\in C^\infty(U,N)$，$f(x_0)=y_0$．任给 $X\in\mathscr{X}(U)$，

$$\begin{aligned}(f^*\theta^i)(X)&=(p|W)_*(q^*\theta^i)(X)\\&=(p|W)_*(p^*\alpha^i-\beta^i)(X)\\&=\alpha^i(X),\end{aligned}$$

可见 $f^*\theta^i=\alpha^i|U\,(1\leqslant i\leqslant n)$．若 U 连通，$f_1\in C^\infty(U,N)$ 亦满足 $f_1(x_0)=y_0$，$f_1^*\theta^i=\alpha^i|U$，则由 1°，(U,g) 与 (U,g_1) 都是 J 过 (x_0,y_0) 的积分流形，其中 $g(x)=(x,f(x))$，$g_1(x)=(x,f_1(x))\,(x\in U)$．令 $V=\{x\in U\mid g(x)=g_1(x)\}$，则 V 是 U 的非空闭子集．由积分流形的局部唯一性(参看5.9.2)，V 在 U 中亦是开的，因此 $V=U$，$f=f_1$． □

参考文献：[2]，[20]，[45]，[83]．

习 题

1. 设 $\omega=dz-pdx-qdy$，$z=f(x,y)$满足 $F(x,y,z,p,q)=0$，$\omega=0$，则$dF=0$，$d\omega=0$.

2. 设 $\{\theta^1,\cdots,\theta^k\}\subset\Lambda^1(M)$ 逐点线性无关，$\{\omega^1,\cdots,\omega^k\}\subset\Lambda^1(M)$，$\sum\theta^i\wedge\omega^i=0$. 则 $\omega^i=\sum_j a^i_j\theta^j$，$a^i_j=a^j_i\in C^\infty(M)$，$1\leqslant i,j\leqslant k$（Cartan 引理）.

§5 伪 Riemann 流形

迄今所讨论的流形都是不考虑度量的，因此它们与 Eucli。空间的"局部类似"就不很完全. 这一缺陷可通过引进流形的某一附加结构而消除.

6.5.1 **定义** 若$g\in\mathscr{T}^0_2(M)$，每个$g_x(x\in M)$是非异对称的[是一内积]，即其分量$g_{ij}(x)$构成一非异[正定]对称矩阵，则称 g 为M上的伪Riemann度量[Riemann度量]，称(M,g)或M为伪Riemann流形[Riemann流形].

设(x^i)是R^n的自然坐标，则"Euclid 度量" $g=\delta_{ij}dx^i\otimes dx^j$ 是 R^n 上的 Riemann 度量，它在任何子流形 $M\subset\mathrm{R}^n$ 上诱导出一 Riemann度量$g|M$；任给M的坐标系(u^i)，

$$(g|M)_{ij}=\sum_k\frac{\partial x^k}{\partial u^i}\frac{\partial x^k}{\partial u^j},\quad i,j=1,2,\cdots,m. \qquad (1)$$

特别，若M是R^3中的曲面$x^k=x^k(u,v)(k=1,2,3)$，则（1）给出微分几何意义下的**第一基本量**：

$$E=\sum_k\left(\frac{\partial x^k}{\partial u}\right)^2,\quad F=\sum_k\frac{\partial x^k}{\partial u}\frac{\partial x^k}{\partial v},\quad G=\sum_k\left(\frac{\partial x^k}{\partial v}\right)^2. \qquad (2)$$

对于R^n及其子流形，未加声明时总采用Euclid度量或其限制. 顺便指出，R^4上有一个著名的伪 Riemann度量，即相对论中的Minkowski 度量：

$$g(x,y)=x^1y^1+x^2y^2+x^3y^3-x^4y^4,$$

其中$x,y\in\mathrm{R}^4$，R^4代表4维时空，认定$T\mathrm{R}^4=\mathrm{R}^4\times\mathrm{R}^4$.

以下设(M,g)是取定的伪Riemann流形. 约定$|g|=|\det(g_{ij})|$（它与坐标系有关！），(g^{ij})记矩阵(g_{ij})之逆，不难验证g^{ij}是一个2阶逆变张量. 给定$x\in M$，实对称矩阵$(g_{ij}(x))$可经可逆线性变换化为对角形$\mathrm{diag}(1,\cdots,1,-1,\cdots,-1)$，其中1与$-1$的个数$p,q$由$g$决定，称$q$为$g$的指数，记作$\mathrm{Ind}(g)$，它在$M$的每个分支上为常数. 当$g$是Riemann度量时$\mathrm{Ind}(g)=0$. 若$\{X_i\}\subset M_x$满足$(g(X_i,X_j))=\mathrm{diag}(1,\cdots,1,-1,\cdots,-1)$，则称$\{X_i\}$为$M_x$的一组$g$-**法正交基**. 任给$x\in M$，必有$x$处的坐标系$(U,x^i)$，使$\{(\partial/\partial x^i)_x\}$是$M_x$的$g$-法正交基(即$(g_{ij}(x))$是对角标准形)，但$\{\partial/\partial x^i\}$不必是$U$内的$g$-法正交基；若$\Omega\in A^m(M)$，对任给$x\in M$及$M_x$的$g$-法正交基$\{X_i\}$，有$|\Omega(X_1,\cdots,X_m)|=1$，则称$\Omega$为$M$的$g$-**体积元**. 不致误解时，常省去以上术语中的"g-".

6.5.2 定理 设$\Omega\in A^m(M)$，则Ω是体积元$\Longleftrightarrow$任给M的坐标系(U,x^i)，有$\Omega|U=\pm\sqrt{|g|}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m$.

证 若$X_i=X_i^j\dfrac{\partial}{\partial x^j}$构成一组法正交基，则

$$1=|\det(g(X_i,X_j))|=|g|\,|\det(X_i^j)|^2,$$

因此

$$dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m(X_1,\cdots,X_m)$$
$$=\det(X_i^j)=\pm\lambda|g|^{-1/2}.$$

由此直接得出定理结论. □

若Ω是M的体积元，则总可以适当选取坐标系，使得$\Omega=\sqrt{|g|}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m$，而在某点$x$有$\Omega_x=(dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m)_x$. 显然$dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$是$\mathrm{R}^n$的体积元，其中$(x^i)$为自然坐标；曲面$M\subset\mathrm{R}^3$以$\sqrt{EG-F^2}\,du\wedge dv$为其体积元（即面积元），其中$E,F,G$依(2)计算.

g 在M上决定一特殊的张量导数．

6.5.3 定理 存在唯一映射$\nabla:\mathscr{X}(M)\times\mathscr{T}(M)\to\mathscr{T}(M)$，$(X,\omega)\longmapsto\nabla_X\omega$，使得：(i) $\nabla_X\omega$ 对X是$C^\infty(M)$-线性的；(ii) $\nabla_X\omega$ 关于ω是一张量导数，称为沿X的协变导数，记作∇_X；(iii) $\nabla_X(f)=X(f)(f\in C^\infty(M))$；(iv) $\nabla_X g(Y,Z)=g(\nabla_X Y,Z)+g(Y,\nabla_X Z)$；(v) $\nabla_X Y-\nabla_Y X=[X,Y]$（以上$X,Y,Z\in\mathscr{X}(M)$）．

证　首先设所述的∇存在．由6.2.7，对固定的ω，$(\nabla_X\omega)_x$完全决定于$X_x(X\in\mathscr{X}(M),x\in M)$．由条件(ii)(iii)及6.3.2，$\nabla$完全决定于坐标公式（$\nabla_i=\nabla_{\partial/\partial x^i}$）：

$$\nabla_i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k},\quad i,j=1,2,\cdots,m,\qquad(3)$$

Γ^k_{ij}是待定系数．条件(v)推出$\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji}$；条件(iv)推出

$$\partial_l g_{ij}=g_{ik}\Gamma^k_{jl}+g_{jk}\Gamma^k_{il},\quad i,j,l=1,2,\cdots,m.$$

轮换字母写出$\partial_i g_{jl}$与$\partial_j g_{il}$的相应公式，进而得出

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}(\partial_i g_{jl}+\partial_j g_{il}-\partial_l g_{ij})g^{kl},\qquad(4)$$

$$i,j,k=1,2,\cdots,m.$$

可见∇由g唯一确定．

反之，若依(4)定义Γ^k_{ij}，然后依(3)并利用§3(2)(3)局部地定义∇，则可用证6.3.3的那种熟知程序得到定理所要求的映射∇．□

上述的∇称为Riemann连络．现在推出有关∇的某些坐标公式．首先从(3)及§3(3)得：

$$\nabla_i dx^j=-\Gamma^j_{ik}dx^k,\quad i,j=1,2,\cdots,m.\qquad(5)$$

任给$\omega\in\mathscr{T}^q_p(M)$，$X\in\mathscr{X}(M)$，反复运用(3)(5)及§3(2)

可得：

$$(\nabla_X\omega)_I^J = X^k\nabla_k\omega_I^J, \tag{6}$$

其中 $I=\{i_1,\cdots,i_p\}$，$J=\{j_1,\cdots,j_q\}$，

$$\nabla_k\omega_I^J=\partial_k\omega_I^J-\Gamma^a_{i_1k}\omega^J_{a i_2\cdots i_p}-\cdots+\Gamma^{j_1}_{ak}\omega_I^{a j_2\cdots j_q}+\cdots. \tag{7}$$

特别，
$$\nabla_kY^j=\partial_kY^j+\Gamma^j_{ik}Y^i,\quad Y\in\mathscr{X}(M); \tag{8}$$

$$\nabla_kg_{ij}=\partial_kg_{ij}-\Gamma^a_{ik}g_{aj}-\Gamma^a_{jk}g_{ia}=0. \tag{9}$$

令 $D=\det(g_{ij})$，$G^{ij}=Dg^{ij}$，则

$$\partial D/\partial g_{ij}=\partial(g_{jk}G^{kj})/\partial g_{ij}=G^{ij},$$

于是

$$\partial_iD=G^{\alpha\beta}\partial_ig_{\alpha\beta}=G^{\alpha\beta}(g_{\alpha k}\Gamma^k_{i\beta}+g_{\beta k}\Gamma^k_{i\alpha})=2D\Gamma^k_{ik},$$

故得
$$\Gamma^k_{ik}=\partial_i\ln\sqrt{|g|},\quad i=1,2,\cdots,m. \tag{10}$$

当$\Gamma^k_{ij}\neq0$时协变导数∇_k与通常导数∂_k可能有很大差别，特别，不能指望$\nabla_i\nabla_j=\nabla_j\nabla_i$。差$\nabla_i\nabla_j-\nabla_j\nabla_i$由所谓曲率张量刻划．不难验证，

$$R(Z,X,Y,\theta)=\langle\nabla_X\nabla_YZ-\nabla_Y\nabla_XZ-\nabla_{[X,Y]}Z,\theta\rangle \tag{11}$$

分别对 $Z,X,Y(\in\mathscr{X}(M))$及 $\theta\in A^1(M)$是 $C^\infty(M)$-线性的，从而确定一(3,1)阶张量场 R(6.2.7)，称它为M上的 Riemann 曲率张量或简称曲率张量．直接依(11)有：

$$R^j_{ikl}=\partial_k\Gamma^j_{il}-\partial_l\Gamma^j_{ik}+\Gamma^a_{il}\Gamma^j_{ak}-\Gamma^a_{ik}\Gamma^j_{al}. \tag{12}$$

现在设$\omega\in\mathscr{T}^0_p(M)$，$I=\{i_1,\cdots,i_p\}$．依(7)算出：

$$\nabla_i\nabla_j\omega_I=\partial_i(\nabla_j\omega_I)-\Gamma^a_{ji}\nabla_a\omega_I-\sum_k\Gamma^a_{i_ki}\nabla_j\omega_{i_1\cdots a\cdots i_p}$$

$$=-\sum_k\partial_i\Gamma^\beta_{ji_k}\omega_{i_1\cdots\beta\cdots i_p}+\sum_k\Gamma^a_{i_ki}\Gamma^\beta_{ja}\omega_{i_1\cdots\beta\cdots i_p}+\cdots,$$

其中省略的项关于 (i,j) 对称．由此得到

$$(\nabla_j\nabla_i-\nabla_i\nabla_j)\omega_I=\sum_k R^{\beta}_{i_k i j}\omega_{i_1\dots\beta\dots i_p}. \tag{13}$$

下面取定M上的光滑曲线C：$x=x(t)(t\in I)$.

6.5.4 定义 任给$\omega\in\mathscr{T}(M)$，称$D\omega/dt=\nabla_{\dot{x}(t)}\omega$为$\omega$沿$C$的协变导数；当$D\omega/dt=0$时说$\omega$沿$C$是平行的.

设$x^i(t)$是$x(t)$的局部表示，$X\in\mathscr{X}(M)$. 从(8)推出

$$\frac{DX}{dt}=\dot{X}^k\frac{\partial}{\partial x^k}+\Gamma^k_{ij}X^i\dot{x}^j\frac{\partial}{\partial x^k}, \tag{14}$$

点记对t的导数.(14)表明，只要$X(x(t))$对t可微，DX/dt就有意义，因此可以说到"沿C定义的向量场X的协变导数". 对张量场亦有类似结论. 若$DX/dt=0$，则(14)表明X^k应满足齐次线性微分方程组：

$$\dot{X}^k=-\Gamma^k_{ij}\dot{x}^jX^i,\ k=1,2,\cdots,m. \tag{15}$$

取定$x_0=x(t_0)$，不妨设$t_0=0\in I$. 由2.6.3，任给$X_0\in M_{x_0}$，(15)有唯一组解$\{X^i(t)\}$，使得$X^i(0)=X^i_0$. 于是

$$X(t)=X^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

是沿C的平行向量场，$X(0)=X_0$，X线性地依赖于"初值"X_0. 这就得到一族线性同构

$$\tau_t: M_{x_0}\cong M_{x(t)},\quad X_0\longmapsto X(t)\quad (t\in I), \tag{16}$$

称它为沿C的平行移动. 依6.1.6，τ_t诱导出线性同构τ_t^*：$T^q_pM_{x(t)}\cong T^q_pM_{x_0}$（亦称平行移动），协变导数$D\omega/dt$可解释为$\omega$沿$C$移动的"速率"（参照6.3.7）.

6.5.5 定理 设τ_t如(16)，$\omega\in\mathscr{T}^q_p(M)(p+q>0)$，则

$$\left.\frac{D\omega}{dt}\right|_{t=t_0}=\left.\frac{d}{dt}(\tau_t^*\omega)\right|_{t=t_0}. \tag{17}$$

证 仍设$t_0=0$. 取$x_0=x(0)$处的坐标系(x^i)，令

$$\tau_t\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x(0)}=a_i^j(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{x(t)},\quad a_i^k b_k^j=\delta_i^j.$$

则 $\tau_t^* dx^i = a_j^i dx^j$；$\tau_0=\mathrm{id}\Longrightarrow a_i^j(0)=b_i^j(0)=\delta_i^j$；(15) 推出 $b_i^j(0)=-\dot{a}_i^j(0)=\Gamma_{ik}^j\dot{x}^k(0)$，$\Gamma_{ik}^j$ 记 $\Gamma_{ik}^j(x_0)$（下同）．利用 (14)(3) 算出：

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\bigg|_{t=0}=\Gamma_{ik}^j\dot{x}^k(0)\frac{\partial}{\partial x^j}=\dot{b}_i^j(0)\frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\tau_t^*\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\bigg|_{t=0};\tag{18}$$

$$\frac{D}{dt}(dx^i)|_{t=0}=-\Gamma_{jk}^i\dot{x}^k(0)dx^j=\dot{a}_j^i(0)dx^j$$

$$=\frac{d}{dt}(\tau_t^* dx^i)|_{t=0}.\tag{19}$$

注意到 $\omega\longmapsto\frac{d}{dt}(\tau_t^*\omega)|_{t=0}$ 满足关于张量积的 Leibniz 规则（参照 §3(2)），就看出(18)与(19)一起推出(17)． □

度量概念可以明显的方式推广于向量丛．

6.5.6 定义 设 E 是 M 上一实[复]向量丛，$g\in\Gamma(T_2^0(E))$．若每个 $g_x(x\in M)$ 是 E_x 上的内积，则称 g 为 E 上的内积，称 E 或 (E,g) 为正交丛[Hermite丛]．

M 上的 Riemann 度量无非是切丛 TM 上的内积．

6.5.7 定理 任何向量丛 E 上恒存在内积；因此，任何微分流形上恒存在Riemann 度量．

证 只考虑"实"的情况．取 E^* 的一族局部基 $\{\sigma_\alpha^i\}\subset\Gamma(U_\alpha,E^*)$，$M=\bigcup U_\alpha$；取 M 上从属于 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解 $\{\lambda_\alpha\}$，则 $g=\sum\limits_\alpha\lambda_\alpha\sum\limits_i\sigma_\alpha^i\otimes\sigma_\alpha^i$ 是 E 上的一个内积． □

6.5.8 定理 设 g 是 E 上的内积，$F\subset E$ 是一子丛，则

$F^{\perp}=\bigcup\limits_{x\in M}F^{\perp}_x$是$E$的子丛($F$的正交补)，$E=F\oplus F^{\perp}$.

证 取E的局部基$\{\sigma_i\}\subset\Gamma(U,\ E)$，使$\{\sigma_i\}_{i=1}^{k}$是$F$的局部基．将$\{\sigma_i\}$正交化为$\{s_i\}$，则$\{s_i(x)\}_{i=k+1}^{n}$是$F^{\perp}_x$的基($x\in U$，$n=\dim E_x$)，可见$F^{\perp}$是$E$的子丛(5.6.10)．显然$E=F\oplus F^{\perp}$.

□

若M是 Riemann 流形N的子流形，则称TM在$TN|M$中的正交补为M在N中的法丛．

参考文献：[2], [12], [20], [61], [83].

习 题

1． 若Ω是M的g-体积元，$X, X_i, Y_i\in\mathscr{X}(M)$ $(1\leqslant i\leqslant m)$，则$\nabla_X\Omega=0$，$\Omega(X_1,\cdots,X_m)\Omega(Y_1,\cdots,Y_m)=\det(g(X_i,Y_j))$.

2． 设$\omega^j_i=\Gamma^j_{il}dx^l$，则$d\omega^j_i-\omega^k_i\wedge\omega^j_k=\frac{1}{2}R^j_{ikl}dx^k\wedge dx^l$.

3． $(L_Yg)_{ij}=\nabla_iX_j+\nabla_jX_i$，其中$X_i=g_{ik}X^k$.

§6 星算子·梯度与散度

给定伪 Riemann 流形 (M,g) 及其体积元 Ω，考虑几个由 g 决定的重要算子．首先，任给 $\omega\in\mathscr{T}^0_p(M)$，由

$$(\sharp\,\omega)^I=g^{i_1j_1}\cdots g^{i_pj_p}\omega_J,\quad I=\{i_1,\cdots,i_p\} \qquad (1)$$

唯一确定出$\sharp\,\omega\in\mathscr{T}^p_0(M)$ (参看 6.1.3)，如此得到升标算子$\sharp:\mathscr{T}^0_p(M)\to\mathscr{T}^p_0(M)$，$\omega\mapsto\sharp\,\omega(p\geqslant 1)$．任给$\sigma\in\mathscr{T}^p_0(M)$，显然有

$$(\sharp^{-1}\sigma)_I=g_{i_1j_1}\cdots g_{i_pj_p}\sigma^J. \qquad (2)$$

不致混淆时，(1)(2) 之左端就记作ω^I与σ_I.

6.6.1 定义 任给α，$\beta\in\Lambda^p(M)(1\leqslant p\leqslant m)$，令

$$\langle\alpha,\ \beta\rangle=\frac{1}{p!}\alpha_I\beta^I,\quad I=\{i_1,\cdots,i_p\}. \qquad (3)$$

其次，对于$\alpha,\beta\in C^\infty(M)$ 规定$\langle\alpha,\beta\rangle=\alpha\beta$.

$\langle\alpha,\beta\rangle$显然是对称的、双线性的. 依 (1)(3) 及§1(11) 有

$$\langle dx^I, dx^J\rangle=\frac{1}{p!}\delta_K^I\delta_L^J g^{k_1l_1}\cdots g^{k_pl_p}=\delta_K^I g^{k_1j_1}\cdots g^{k_pj_p}. \tag{4}$$

任给$x\in M$, 设$g_{ij}(x)=c_i\delta_{ij}$, $c_i=\pm1$. 因依 (4) 有$\langle dx^I, dx^J\rangle_x=\delta_J^I c_{j_1}\cdots c_{j_p}$, 故$\langle,\rangle_x$是空间$A^p(M_x^*)$上的非异对称双线性型；当$g$是Riemann度量时，它是正定的，从而$\langle,\rangle$是$A^p(T^*M)$上依6.5.6的内积，于是$g$在$A^p(T^*M)$[$A_C^p(T^*M)$]上诱导出自然的正交丛[Hermite丛]结构.

本节的主要考察对象是Hodge的星算子*.

6.6.2 定理 存在唯一$C^\infty(M)$-线性算子$*:A^p(M)\to A^{m-p}(M)$ $(0\leqslant p\leqslant m)$, 使得$\forall\alpha,\beta\in A^p(M)$: $\alpha\wedge*\beta=\langle\alpha,\beta\rangle\Omega$.

证 设所述的*存在. 显然$*1=\Omega$, 且$(*\alpha)_x$仅决定于α_x (6.2.7). 若$(j_1,\cdots,j_m)$是$(1,\cdots,m)$的一排列，$j_1<\cdots<j_p$, $j_{p+1}<\cdots<j_m$, $J=\{j_1,\cdots,j_p\}$, 则记$J'=\{j_{p+1},\cdots,j_m\}$, 且以$A_p$记如上的$J$之全体. 任给$I=\{i_1,\cdots,i_p\}\subset\{1,2,\cdots,m\}$, 令

$$*(dx^I)=\sum_{J\in A_p}c_J dx^{J'}.$$

设$\Omega=\sqrt{|g|}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m$ (本节中保持此假定)，则从 (4) 及

$$\begin{aligned}\langle dx^J, dx^I\rangle\Omega&=dx^J\wedge*(dx^I)\\&=c_J\delta_{JJ'}^{1\cdots m}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m\quad(J\in A_p)\end{aligned}$$

推出 $\quad c_J=\sqrt{|g|}\,\delta_{kJ'}^{1\cdots m}g^{i_1k_1}\cdots g^{i_pk_p}\quad(K=\{k_1,\cdots,k_p\})$.

于是 $$*(dx^I)=\sum_{J\in A_p}\sqrt{|g|}\,\delta_{KJ}^{1\cdots m}g^{i_1k_1}\cdots g^{i_pk_p}dx^{J'}$$

$$=\frac{1}{(m-p)!}\sqrt{|g|}\,\delta_{KL}^{1\cdots m}g^{i_1k_1}\cdots g^{i_pk_p}dx^L,\quad (5)$$

$$K=\{k_1,\cdots,k_p\},\quad L=\{l_{p+1},\cdots,l_m\}.$$

可见 $*$ 由 g 唯一决定．反之，依（5）及 $*1=\Omega$ 定义 $*$，则可依通常的方式验证 $*$ 满足定理要求．□

从(5)推出以下坐标公式：

$$*(dx^i)=\sqrt{|g|}\sum_j(-1)^{j-1}g^{ij}dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^j}\wedge\cdots\wedge dx^m;\quad (6)$$

$$(*\omega)_J=\frac{1}{p!}\sqrt{|g|}\,\delta_{IJ}^{1\cdots m}g^{i_1k_1}\cdots g^{i_pk_p}\omega_K$$

$$=\frac{1}{p!}\Omega_{IJ}\omega^I,\quad (7)$$

（7）中 $\omega\in A^p(M)$，$J=\{j_1,\cdots,j_{m-p}\}$．若 $g_{ij}=\delta_{ij}$，则(5)—(7)化简成：

$$*(dx^I)=\frac{1}{(m-p)!}\delta_{IJ}^{1\cdots m}dx^J;\quad (5')$$

$$*(dx^i)=(-1)^{i-1}dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^m;\quad (6')$$

$$(*\omega)_J=\frac{1}{p!}\delta_{1\cdots m}^{IJ}\omega_I.\quad (7')$$

特别，若（x^i）是R^3的自然坐标，则（6′）推出：

$$\begin{cases}*(dx^1)=dx^2\wedge dx^3,\quad *(dx^2)=dx^3\wedge dx^1,\\ *(dx^3)=dx^1\wedge dx^2.\end{cases}\quad (8)$$

6.6.3 定理 任给 α，$\beta\in A^p(M)(0\leqslant p\leqslant m)$，成立

$$**\alpha=(-1)^{p(m-p)+\mathrm{Ind}(g)}\alpha;\quad (9)$$

$$\langle*\alpha,*\beta\rangle=(-1)^{\mathrm{Ind}(g)}\langle\alpha,\beta\rangle.\quad (10)$$

证 只需证 (9)((10) 由 (9) 直接推出)．不妨设$\alpha=dx^I$，$I=\{i_1,\ \cdots,\ i_p\}$，$g_{ij}=c_i\delta_{ij}$，$c_i=\pm 1=c^i$．于是依(5)有

$$**(dx^I)=\frac{1}{(m-p)!}\delta_{IJ}^{1\cdots m}c^{i_1}\cdots c^{i_p}*(dx^J)$$

$$=\frac{1}{(m-p)!p!}\delta_{IJ}^{1\cdots m}\delta_{JK}^{1\cdots m}c^{i_1}\cdots c^{i_p}c^{j_1}\cdots c^{j_{m-p}}dx^K$$

$$=(-1)^{p(m-p)+\operatorname{Ind}(g)}dx^I. \qquad \square$$

组合算子$\sharp$,$*$,d，可得一系列新的算子．

6.6.4 定义 设$0\leqslant p\leqslant m$．称

$$\delta=(-1)^{m(p+1)+1+\operatorname{Ind}(g)}*d*:\Lambda^p(M)\to\Lambda^{p-1}(M) \tag{11}$$

为余微分算子（注意与d对照!)；分别称

$$\operatorname{grad}=\sharp d:C^\infty(M)\to\mathscr{X}(M) \tag{12}$$

与

$$\operatorname{div}=-\delta\sharp^{-1}:\mathscr{X}(M)\to C^\infty(M) \tag{13}$$

为梯度算子与散度算子（易见$\operatorname{div}=(-1)^{\operatorname{Ind}(g)}*d*\sharp^{-1}$)；称

$$\Delta=d\delta+\delta d:\Lambda^p(M)\to\Lambda^p(M) \tag{14}$$

为Laplace-deRham算子或简称Laplace算子．

d,δ及Δ都可表为协变导数．给定$\omega\in\Lambda^p(M)$，

$$d\omega=\frac{1}{p!}\partial_j\omega_I dx^j\wedge dx^I$$

$$=\frac{1}{p!}(\nabla_j\omega_I-\sum_k\Gamma^a_{ji_k}\omega_{i_1\cdots a\cdots i_p})dx^{jI}$$

$$=\frac{1}{p!}\nabla_j\omega_I dx^{jI}=\frac{1}{p!(p+1)!}\delta_K^{jI}\nabla_j\omega_I dx^K,$$

于是

$$(d\omega)_K=\frac{1}{p!}\delta_K^{jI}\nabla_j\omega_I,\quad K=\{k_1,\cdots,k_{p+1}\}. \qquad (15)$$

结合(11)(7)(15)，对于 $L=\{l_1,\cdots,l_{p-1}\}$ 有：

$$(\delta\omega)_L=\frac{(-1)^e}{(m-p+1)!(m-p)!p!}\cdot g^{k_1h_1}\cdots g^{k_sh_s}\Omega_{KL}\Omega_{IJ}\delta_H^{aJ}\nabla_a\omega^I,$$

其中 $e=m(p+1)+1+\mathrm{Ind}(g)$, $s=m-p+1$, $K=\{k_1,\cdots,k_s\}$, $H=\{h_1,\ \cdots,\ h_s\}$. 化简后得

$$(\delta\omega)_L=-\nabla^i\omega_{iL}\quad(\nabla^i=g^{ij}\nabla_j). \qquad (16)$$

现在利用 (14)—(16) 来计算 $(\Delta\omega)_I$, $I=\{i_1,\ \cdots,\ i_p\}$. 首先，

$$(\delta d\omega)_I=-\nabla^a(d\omega)_{aI}=-\frac{1}{p!}\delta_{aL}^{jK}\nabla^a\nabla_j\omega_K$$

$$=-\nabla^a\nabla_j\omega_I+\sum_k\nabla^a\nabla_{i_k}\omega_{i_1\cdots a\cdots i_p};$$

类似地，$\qquad (d\delta\omega)_I=-\sum_k\nabla_{i_k}\nabla^a\omega_{i_1\cdots a\cdots i_p}.$

于是利用 (14) 及上节 (13) 得：

$$(\Delta\omega)_I=-\nabla^j\nabla_j\omega_I+\sum_k g^{ia}(\nabla_i\nabla_{i_k}-\nabla_{i_k}\nabla_i)\omega_{i_1\cdots a\cdots i_p}$$

$$=-\nabla^j\nabla_j\omega_I+\sum_k g^{ia}R^{\beta}_{a\,i_ki}\omega_{i_1\cdots\beta\cdots i_p}$$

$$+2\sum_{l<k}g^{ia}R^{\beta}_{i_li_ki}\omega_{i_1\cdots\beta\cdots a\cdots i_p}. \qquad (17)$$

注意 (17) 之右端只有第一项含ω_I的导数.

现在导出 $\mathrm{div}X$ 与 $\mathrm{grad}f(X\in\mathscr{X}(M),\ f\in C^\infty(M))$的坐标公式. 首先，利用(13)(2)(16) 易得出 $\mathrm{div}X=\nabla_iX^i$; 依 §5 (8)(10),

$$\nabla_iX^i=\partial_iX^i+X^j\Gamma^i_{ji}=\partial_iX^i+X^j\partial_j\ln\sqrt{|g|};$$

故得 $\qquad \mathrm{div}X=\nabla_iX^i=|g|^{-1/2}\partial_i(X^i\sqrt{|g|}). \qquad (18)$

其次，直接依（12）有

$$\operatorname{grad} f=g^{ij}\partial_i f\frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{19}$$

注意 $\operatorname{div}\circ\operatorname{grad}=-\delta d$，结合(18)(19)两式得：

$$-\Delta f=-\delta d f=|g|^{-1/2}\partial_i(\sqrt{|g|}\,g^{ij}\partial_j f). \tag{20}$$

当$g_{ij}=\delta_{ij}$时，(17)—(19) 简化成（注意此时$R^{j}_{i\,kl}=0$）：

$$(\Delta\omega)_I=-\sum_i\partial_i^2\omega_I; \tag{17'}$$

$$\operatorname{div}X=\sum_i\partial_i X^i; \tag{18'}$$

$$(\operatorname{grad} f)^i=\partial_i f. \tag{19'}$$

可见grad，div与$-\Delta$正好推广了通常的梯度、散度与Laplace算子．当$X\in\mathscr{X}(\mathrm{R}^3)$ 时，通常的"旋度"可表为：

$$\operatorname{rot}X=\sharp * d\,\sharp^{-1}(X). \tag{21}$$

于是综合(12)(13)(21)得到向量分析中的熟知公式：

$$\operatorname{rot}\circ\operatorname{grad}=0;\quad \operatorname{div}\circ\operatorname{rot}=0.$$

梯度与散度有某种几何解释．

6.6.5 定理 设$f\in C^\infty(M)$，$\beta\in f(M)$ 是f的一个正则值．则$\operatorname{grad}f$是超曲面$S=f^{-1}(\beta)$的"法向量"，即对任给$x\in S$，$X\in S_x$，有$g(X,\operatorname{grad}f(x))=0$．

证 任给$\theta\in M_x^*$，直接从（1）推出$g(X,\sharp\theta)=\theta(X)$ $(X\in S_x)$．于是从$S_x=\operatorname{Ker}f_{*x}$（5.3.6）推出

$$g(X,\operatorname{grad}f(x))=g(X,\sharp df(x))=f_*(X)=0. \qquad\square$$

6.6.6 定理 $\forall X\in\mathscr{X}(M)$：$L_X\Omega=(\operatorname{div}X)\Omega$．

证 利用(6)不难验证$i_X\Omega=*\sharp^{-1}X$，于是

$$\begin{aligned}L_X\Omega&=(i_Xd+di_X)\Omega=di_X\Omega=d*\sharp^{-1}X\\&=*(\operatorname{div}X)=(\operatorname{div}X)\Omega.\end{aligned}\qquad\square$$

粗略地说，6.6.6表明$\operatorname{div}X$刻划了"体积沿X的变率"；$\operatorname{div}X=0$意味着"体积沿X不变"，此时称X（或X的流）是

"不可压缩的".

参考文献：[2]，[20]，[45]，[61]，[83].

习　题

1. $(\#^{-1}X_1)\wedge\cdots\wedge(\#^{-1}X_m)=\Omega(X_1,\cdots,X_m)\Omega$.

2. $\mathrm{grad}(\varphi f)=\varphi\,\mathrm{grad}f+f\,\mathrm{grad}\varphi$，$\mathrm{div}(fX)=X(f)+f\,\mathrm{div}X$，$\Delta(f^2)=2f\Delta f-2(\mathrm{grad}f)(f)$，以上$f$，$\varphi\in C^\infty(M)$，$X\in\mathscr{X}(M)$.

3. $\mathrm{div}[X,Y]=X(\mathrm{div}Y)-Y(\mathrm{div}X)$，$X$，$Y\in\mathscr{X}(M)$.

4. 设X，$Y\in\mathscr{X}(\mathrm{R}^3)$，$\omega$，$\theta\in A^1(\mathrm{R}^3)$，$\sigma\in A^2(\mathrm{R}^3)$，$f\in C^\infty(\mathrm{R}^3)$，则

   (i) $X\times Y=\#*(\#^{-1}X\wedge\#^{-1}Y)$；$X\cdot Y=*(*\#^{-1}X\wedge\#^{-1}Y)$.

   (ii) $\omega\wedge\theta=*\#^{-1}(\#\omega\times\#\theta)$；$\sigma\wedge\theta=*(\#*\sigma\cdot\#\theta)$.

   (iii) $\mathrm{rot}(fX)=\mathrm{grad}f\times X+f\,\mathrm{rot}X$.

   (iv) $\mathrm{div}(X\times Y)=(\mathrm{rot}X)\cdot Y-X\cdot\mathrm{rot}Y$.

§7　定向流形

R^n的定向决定于坐标向量的排列顺序；在有正[负]行列式的坐标变换下，空间定向不变[改变]．由此可以设想：通过局部坐标系的选择可在流形上局部地定向，而流形能否"整体地"定向则取决于是否存在"一致地"定向的图册．

6.7.1 定义　若M上存在图册$\{(U_\alpha,x_\alpha^i)\}$，使得在$U_\alpha\cap U_\beta$上$D(x_\alpha)/D(x_\beta)>0$（此处及今后都约定将行列式$\det(\partial y^i/\partial x^j)$缩写成$D(y)/D(x)$），则说$M$可定向，称具有以上性质的一极大图册为$M$的一个定向，称其中的图为正向图．已给定向的流形称为定向流形．

"可定向性"是流形的最基本的整体性质之一，如同许多其它整体性质一样，它可用某种整体截面的存在性来刻划．M上无处为零的m-形式称为体积形式．显然，$\omega\in A^m(M)$是体积形式$\Longleftrightarrow\omega$是1维丛$A^m(T^*M)$的整体基$\Longleftrightarrow\forall\sigma\in A^m(M)$，$\exists f\in C^\infty(M)$：$\sigma=f\omega$．体积形式与定向这两个概念实质上是

等价的．

6.7.2 定理 流形M[伪 Riemann 流形 (M,g)] 是可定向的$\Longleftrightarrow M$上存在体积形式[g-体积元]．

证 设图册$\{(U_\alpha,x_\alpha^i)\}$ 如 6.7.1 所述．取从属于$\{U_\alpha\}$的单位分解$\{\lambda_\alpha\}$，定义

$$\omega=\sum_\alpha \lambda_\alpha dx_\alpha^1\wedge\cdots\wedge dx_\alpha^m, \tag{1}$$

其中 $\lambda_\alpha dx_\alpha^1\wedge\cdots\wedge dx_\alpha^m$ 自然地延拓在M上．ω即为一个体积形式：任给$x\in M$，取定β：$\lambda_\beta(x)\neq 0$，则

$$\omega_x=\left[\sum_{U_\alpha\ni x}\lambda_\alpha(x)D(x_\alpha)/D(x_\beta)\right](dx_\beta^1\wedge\cdots\wedge dx_\beta^m)_x\neq 0.$$

反之，若存在体积形式$\omega\in A^m(M)$，则对任给$a\in M$，有a处的图(U_a,x_a^i)，使$\omega|U_a=\mu_a dx_a^1\wedge\cdots\wedge dx_a^m$，$\mu_a\in C^\infty(U_a)$，$|\mu_a|>0$．可设$U_a$连通，从而不妨设$\mu_a>0$（否则以$(-x_a^1,x_a^2,\cdots,x_a^m)$取代$(x_a^1,x_a^2,\cdots,x_a^m)$）．因在$U_a\cap U_b$上$\mu_b=\mu_a D(x_a)/D(x_b)$，故图册$\{(U_a,x_a^i)\}$决定$M$的一个定向．

下面考虑伪Riemann 流形(M,g)．若M有g-体积元，它当然有体积形式．反之，若M有如6.7.1所述的$\{(U_\alpha,x_\alpha^i)\}$，令

$$g_\alpha=\det\left(g\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i},\frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}\right)\right),$$

定义

$$\Omega|U_\alpha=\sqrt{|g_\alpha|}\,dx_\alpha^1\wedge\cdots\wedge dx_\alpha^m. \tag{2}$$

依6.5.2，要能断言(2)定义出M的g-体积元Ω，只要说明在$U_\alpha\cap U_\beta(\neq\varnothing)$上有

$$\sqrt{|g_\alpha|}\,dx_\alpha^1\wedge\cdots\wedge dx_\alpha^m=\sqrt{|g_\beta|}\,dx_\beta^1\wedge\cdots\wedge dx_\beta^m,$$

或即
$$\sqrt{|g_\alpha|}\,D(x_\alpha)/D(x_\beta)=\sqrt{|g_\beta|}. \tag{3}$$

(3) 是坐标变换公式及$D(x_\alpha)/D(x_\beta)>0$的推论. □

若$\{X_i\}$是TM的一组整体基，$\{\theta^i\}$是其对偶基，则$\omega=\theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^m$是$A^m(T^*M)$的整体基. 于是得到

推论 可平行化流形(见5.6.4)是可定向的.

M的两个体积形式ω,σ称为等价的，若$\sigma=f\omega$，$f>0$. 以$[\omega]$记含ω的等价类. 显然，M的体积形式的等价类与M的定向之间存在一一对应，因此不妨说如上的等价类$[\omega]$就是M的一个定向. 若$h\in\mathrm{Diff}(M,N)$，M,N的定向分别为$[\omega]$与$[h_*\omega]$ [与$[-h_*\omega]$]，则说h是保向[反向]的微分同胚.

从6.7.2可推出一些更具体的可定向性判别法.

6.7.3 定理 设M是可定向流形N的子流形. 若$TN|M=TM\oplus E$，E是一平凡从，则M可定向.

证 取体积形式$\omega\in A^n(N)$及E的一组整体基$\{X_{m+1},\cdots,X_n\}\subset\Gamma(TN|M)$. 任给$X_1,\cdots,X_m\in\mathscr{X}(M)$，定义

$$\sigma(X_1,\cdots,X_m)=\omega(X_1,\cdots,X_m,\cdots,X_n),\qquad(4)$$

则易见σ是M的一个体积形式. □

6.7.3给出了从外围空间"观察"流形可否定向的方法，当$m=n-1$时它有特别明显的直观意义.

推论1 设M是可定向流形N中的超曲面. 若存在$X\in\Gamma(TN|M)$：$X_x\notin M_x(\forall x\in M)$，则$M$是可定向的.

因M总可看作Riemann流形(6.5.7)，故结合6.6.5得出：

推论2 若M可定向，$\beta\in f(M)$是$f\in C^\infty(M)$的正则值，则$f^{-1}(\beta)$是M的可定向子流形.

流形及其定向概念自然地推广到"有边流形"，后者的定义是定义5.1.1的一个修正.

6.7.4 定义 设M是第二可数的T_2空间，M上给定了一"图册"$\Phi=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$，它满足5.1.1的条件$\mathrm{MA}_1$，$\mathrm{MA}_3$及

MA_2的修正MA_2'：每个φ_α将U_α同胚地映到"半空间"$H^m=\{(x^1,\cdots,x^m)\in R^m|x^m\geqslant 0\}$的某开子集上，则说$(M,\Phi)$是一个$m$维有边流形．若$x\in U_\alpha$，$\varphi_\alpha(x)\in\partial H^m=R^{m-1}$，则说$x$是$M$的边界点（可证明这一规定与$\alpha$无关）；$M$的全体边界点组成$M$的边界，记作$\partial M$；称$\mathrm{Int}M=M\backslash\partial M$为$M$的内部．若$\partial M=\varnothing$，则$M$就是5.1.1意义下的流形，**也称作无边流形**．

注 1° 对有边流形M，一个迁移映射$\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to H^m$为$C^\infty$映射意指：$\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1}$局部地可扩张为开集上的$C^\infty$映射（参照5.6.8）．

2° "流形边界"是一内在概念，与流形被"置于"哪个外围空间无关，因而不同于§1.1中所说的点集边界．例如，$S^2=\{x\in R^3|\ |x|=1\}$作为R^3的子集每点都是边界点，然而它是一个无边流形．

关于无边流形的种种概念，如子流形、切空间、向量场、微分形式、外微分及定向等等，一般无需重大修改即可推广于有边流形，且能达到类似结果，毋庸细述．下面只举出两个关于可定向性的定理，以备下节使用．

6.7.5 定理 设M是一定向有边流形，$\partial M\neq\varnothing$．则$\partial M$是$M$的可定向闭子流形．

证 取M的一族正向图$\{(U_\alpha,x_\alpha^i)\}$，使$\partial M\subset\bigcup U_\alpha$．当$\partial M\cap U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$时，在$\partial M\cap U_\alpha\cap U_\beta$上

$$\frac{\partial x_\alpha^m}{\partial x_\beta^i}=0\ (1\leqslant i<m);\quad \frac{\partial x_\alpha^m}{\partial x_\beta^m}>0. \tag{5}$$

于是从$\dfrac{D(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^m)}{D(x_\beta^1,\cdots,x_\beta^m)}>0$推出$\dfrac{D(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^{m-1})}{D(x_\beta^1,\cdots,x_\beta^{m-1})}>0$，图册$\{(\partial M\cap U_\alpha;\ x_\alpha^1,\ \cdots,\ x_\alpha^{m-1})\}$定义$\partial M$为$M$的一个$m-1$维可定向子流形．显然$\mathrm{Int}M$是$M$的开子集，故$\partial M$在$M$中是闭的． □

对于6.7.5中的∂M，称由图册$\{(\partial M\cap U_\alpha;\ (-1)^m x_\alpha^1,$

$x_a^2, \cdots, x_a^{m-1})\}$决定的定向为$\partial M$的**导出定向**．这一似乎不自然的约定乃应Stokes公式(6.8.4)之需要而设．

任给$X \in \Gamma(TM|\partial M)$，由5.6.8,可认为$X \in \mathscr{X}(M)$．若对于$M$的正向坐标系$(x^i)$，当$X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$，$x \in \partial M$时$X^m(x) < 0\,[>0]$，则称$X$在$\partial M$上是**外向**[**内向**]的．若$(M, g)$是一个Riemann流形，$X \in \Gamma((T(\partial M))^{\perp})$(参看6.5.8)，$g(X, X) = 1$，则称$X$为$\partial M$的**单位法向量**．

6.7.6 定理 设Ω是Riemann流形M的体积元，X是∂M $(\neq \varnothing)$的外向单位法向量．则$\omega = (i_X \Omega)|\partial M$是$\partial M$的体积元；当$M$由$\Omega$定向时$\omega$给出$\partial M$的导出定向．

证 从i_X及体积元的定义易见ω是∂M的体积元．设M由Ω定向，(U, x^i)是M上一正向图，$X|U = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$，$\Omega|U = \mu dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$，则$\mu > 0$，在$U \cap \partial M$上$X^m < 0$．由于

$$
\begin{aligned}
&\omega\left((-1)^m \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{m-1}}\right) \\
&= (-1)^m \Omega\left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{m-1}}\right) \\
&= -\mu X^m > 0,
\end{aligned}
$$

可见ω决定∂M的导出定向． □

试看一典型例子．设$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leqslant 1\}$由体积元$\Omega = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$定向，$(x^i)$是$\mathbb{R}^n$的自然坐标．令$X = x^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$，则$X|S^{n-1}$是$S^{n-1}(=\partial B^n)$的外向单位法向量，

$$
\omega = i_X \Omega = \sum_i (-1)^{i-1} x^i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n. \tag{6}
$$

由6.7.6，$\omega|S^{n-1}$是S^{n-1}的体积元，它给出S^{n-1}的导出定向．当$n=2,3$时分别得到

$$\omega=x^1dx^2-x^2dx^1 \tag{7}$$

与
$$\omega=x^1dx^2\wedge dx^3+x^2dx^3\wedge dx^1+x^3dx^1\wedge dx^2. \tag{8}$$

6.7.7 定理 设M与Ω如6.7.6，$f\in C^\infty(M)$，$\operatorname{grad}f\neq 0$，$S=f^{-1}(0)\neq\varnothing$．则存在$\omega\in A^{m-1}(M)$（称为Leray形式），使得$\Omega=df\wedge\omega$；$\|\operatorname{grad}f\|\omega$是$S$的体积元（$\|X\|=\sqrt{g(X,X)}$）．

证 取M的坐标系(x^i)，设$\partial f/\partial x^1\neq 0$．令$y^1=f(x)$，$y^i=x^i$（$1<i\leqslant m$），则$(y^i)$是$M$的坐标系，

$$\Omega=\mu dy^1\wedge\cdots\wedge dy^m=df\wedge\omega,$$

其中$\omega=\mu dx^2\wedge\cdots\wedge dx^m$，这就局部地构成了所求的$\omega$．整体的$\omega$可借助一个单位分解得到．

不难看出，$N=f^{-1}[0,\infty)$是一有边流形（参考5.2.3与6.7.4），$\partial N=S$．令$X=\operatorname{grad}f/\|\operatorname{grad}f\|$，则$X$是$S$的单位法向量（6.6.5）．由6.7.6，$(i_X\Omega)|S$是$S$的体积元．由6.3.5，

$$\begin{aligned}i_X\Omega&=i_X(df\wedge\omega)=(i_Xdf)\wedge\omega-df\wedge i_X\omega\\&=(Xf)\omega-df\wedge i_X\omega.\end{aligned}$$

于是定理由直接验证$X(f)=\|\operatorname{grad}f\|$，$(df\wedge i_X\omega)|S=0$而得证．□

参考文献：[2]，[12]，[10]，[83]，[84]．

习 题

1．M可定向$\Longleftrightarrow\operatorname{Int}M$可定向；$M\times N$可定向$\Longleftrightarrow M,N$皆可定向；$TM$恒为可定向流形．

2．设ω是Riemann流形(M,g)上的C^0类的m-形式，当$g(X_i,X_j)=\delta_{ij}$时恒有$|\omega(X_1,\cdots,X_m)|=1$，则$\omega$必属$C^\infty$类．

3．$X\in\Gamma(TM|\partial M)$为外向的充要条件是：$\forall f\in C^\infty(M)$，$f\geqslant 0$，$f|\partial M=0\Rightarrow X(f)\leqslant 0$，且至少对一个如上的$f$有$X(f)<0$．

§8 流形上的积分

设$U\subset\mathbf{R}^n$（或$U\subset\mathbf{H}^n$）是开集，$f\in C_c(U)$，$\omega=f dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$，$(x^i)$是自然坐标，$dx$记$n$维Lebesgue测度，则规定

$$\int_U\omega=\int_{\mathbf{R}^n}f dx\quad(f|U^c=0).\tag{1}$$

若$h:U\to V$，$(x^1,\cdots,x^n)\longmapsto(y^1,\cdots,y^n)$是一微分同胚，则有“变量代换公式”：

$$\int f dx=\int(f\circ h^{-1})|D(x)/D(y)|dy.\tag{2}$$

依据(1)，当$D(x)/D(y)>0$时(2)可缩写成：

$$\int_U\omega=\int_{h(U)}h_*\omega\ .\tag{3}$$

(1)与(3)是在流形上定义积分的基础.

以下设M是由体积形式Ω定向的（有边或无边）流形，$\Lambda_c^m(M)=\{f\Omega|f\in C_c(M)\}$.

6.8.1 定义 设$\omega\in\Lambda_c^m(M)$. 取覆盖M的一族正向图$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$，取$M$上从属于$\{U_\alpha\}$的单位分解$\{\lambda_\alpha\}$. 称

$$\int_M\omega=\sum_\alpha\int\varphi_{\alpha*}(\lambda_\alpha\omega)\tag{4}$$

为ω在M上的积分，不致误解时就写作$\int\omega$.

今对定义的合理性说明于下. 首先，因$\varphi_{\alpha*}(\lambda_\alpha\omega)\in\Lambda_m^c(\varphi_\alpha U_\alpha)$，$\int\varphi_{\alpha*}(\lambda_\alpha\omega)$是一个形如(1)的积分. 其次，因$\{\mathrm{supp}\lambda_\alpha\}$局部有限且$\mathrm{supp}\omega$是紧集，(4)右端实际上是一有限和. 若$\{(V_\beta,\psi_\beta)\}$是覆盖$M$的另一族正向图，$\{\mu_\beta\}$是从属于$\{V_\beta\}$的单位分解，则利用(3)推出

$$\sum_{\beta}\int\psi_{\beta*}(\mu_\beta\omega)=\sum_{\alpha,\beta}\int\psi_{\beta*}(\lambda_\alpha\mu_\beta\omega)$$
$$=\sum_{\alpha,\beta}\int(\varphi_\alpha\psi_\beta^{-1})_*\psi_{\beta*}(\lambda_\alpha\mu_\beta\omega)$$
$$=\sum_{\alpha,\beta}\int\varphi_{\alpha*}(\lambda_\alpha\mu_\beta\omega)=\sum_{\alpha}\int\varphi_{\alpha*}(\lambda_\alpha\omega),$$

可见$\int\omega$不依赖于φ_α, λ_α的选择.

6.8.2 例 设$M=\varphi(U)$是由嵌入$\varphi: U\subset\mathrm{R}^2\to\mathrm{R}^3$, $(u, v)\longmapsto(x^1,x^2,x^3)$定义的光滑曲面，以$(M,\varphi^{-1})$作为$M$的正向图. 若$\omega=Pdx^2\wedge dx^3+Qdx^3\wedge dx^1+Rdx^1\wedge dx^2$, $\omega|M\in\Lambda_c^2(M)$, 则

$$\int_M\omega=\int_U(\varphi^{-1})_*(\omega|M)=\int_U\varphi^*\omega$$
$$=\int_U\begin{vmatrix}P & Q & R\\ \dfrac{\partial x^1}{\partial u} & \dfrac{\partial x^2}{\partial u} & \dfrac{\partial x^3}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x^1}{\partial v} & \dfrac{\partial x^2}{\partial v} & \dfrac{\partial x^3}{\partial v}\end{vmatrix}dudv \tag{5}$$

(其中$\varphi^*(P)$已简写作P)，这是通常的第二类曲面积分. 若$f\in C_c(M)$, $\Omega=\sqrt{EG-F^2}du\wedge dv$是$M$的面积元(6.5.2), 则

$$\int_M f\Omega=\int_U(f\circ\varphi)\sqrt{EG-F^2}dudv, \tag{6}$$

这是通常的第一类曲面积分.

变量代换公式(2)(或(3))现在推广成一般的:

6.8.3 定理 设$h\in\mathrm{Diff}(M, N)$是保向的，$\omega\in\Lambda_c^m(M)$, 则

$$\int_M\omega=\int_N h_*\omega. \tag{7}$$

证 设$\int\omega$表为(4)．依6.8.1的记号，$(hU_\alpha,\varphi_\alpha\circ h^{-1})$是$N$的正向图，$\{h_*(\lambda_\alpha)\}$是$N$上从属于$\{hU_\alpha\}$的单位分解．于是

$$\int_N h_*\omega=\sum_\alpha\int(\varphi_\alpha\circ h^{-1})_*(h_*(\lambda_\alpha)\cdot h_*\omega)$$
$$=\sum_\alpha\int\varphi_{\alpha*}(\lambda_\alpha\omega)=\int_M\omega.\qquad\square$$

经典积分学的最重要的结果无疑是以下公式：

$$\iint_S(R_y-Q_z)dydz+(P_z-R_x)dzdx+(Q_x-P_y)dxdy$$
$$=\int_{\partial S}Pdx+Qdy+Rdz\quad(\text{Stokes 公式})；\qquad(8)$$
$$\iiint_V(P_x+Q_y+R_z)dv=\iint_{\partial V}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$
$$(\text{Gauss公式})，\qquad(9)$$

其中$S\subset\mathbb{R}^3$是有界曲面，$V\subset\mathbb{R}^3$是有界区域，边界∂S，∂V逐段(片)光滑，沿∂S正向行进时保持S的正侧在左边，∂V取外侧为正向．(8)与(9)可合并为

$$\int_M d\omega=\int_{\partial M}\omega,$$

其中$M=S$或V，$\omega=Pdx+Qdy+Rdz$或$\omega=Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy$．这一事实启示出"一般Stokes公式"．

6.8.4 定理 任给$\omega\in A_c^{m-1}(M)$，成立"Stokes公式"：

$$\int_M d\omega=\int_{\partial M}\omega,\qquad(10)$$

其中∂M具有导出定向，当$\partial M=\varnothing$时认定$\int_{\partial M}\omega=0$．

证 因(10)两边都可表为形如(1)的积分之和，不妨设M是H^m的开子集．设(x^i)是$\mathbb{R}^m$的自然坐标，令

$$\omega=\sum_i \lambda_i dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^m,$$

则
$$d\omega=\sum_i(-1)^{i-1}\partial_i\lambda_i dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m,$$

于是
$$\int_M d\omega=\sum_{i<m}(-1)^{i-1}\int_{\mathrm{R}^{m-1}} dx^1\cdots\widehat{dx^i}\cdots dx^m\int_{\mathrm{R}}\partial_i\lambda_i dx^i$$
$$+(-1)^{m-1}\int_{\mathrm{R}^{m-1}} dx^1\cdots dx^{m-1}\int_0^\infty\partial_m\lambda_m dx^m$$
$$=(-1)^{m-1}\int_{\mathrm{R}^{m-1}}\lambda_m(x^1,\cdots,x^{m-1},0)dx^1\cdots dx^{m-1}. \tag{11}$$

若$\partial M=\varnothing$，则$\lambda_m(x^1,\cdots,x^{m-1},0)=0$，(10)成立．若$\partial M\neq\varnothing$，则$\omega|\partial M=\lambda_m(x^1,\cdots,x^{m-1},0)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{m-1}$．注意到$\partial M$的导出定向由坐标$((-1)^m x^1, x^2, \cdots, x^{m-1})$给出，(10)立即从(11)推出． □

经典的Gauss公式(9)可表成向量形式：

$$\iiint_V(\operatorname{div}X)dv=\iint_{\partial V}(X,Y)dS, \tag{12}$$

其中 $X=P\frac{\partial}{\partial x}+Q\frac{\partial}{\partial y}+R\frac{\partial}{\partial z}$，$Y$是$\partial V$的外向单位法向量，$dS$是$\partial V$的面积元．(12)也有一个相应的推广．

6.8.5 定理 设(M,g)是由体积元Ω定向的Riemann流形，$X\in\Gamma_c(TM)$，Y是∂M的外向单位法向量，ω是∂M的体积元，它决定∂M的导出定向．则

$$\int_M(\operatorname{div}X)\Omega=\int_{\partial M}g(X,Y)\omega. \tag{13}$$

证 由6.6.6，$(\operatorname{div}X)\Omega=di_X\Omega$，于是依(10)有

$$\int_M(\operatorname{div}X)\Omega=\int_{\partial M}i_X\Omega.$$

今证 $(i_X\Omega)|\partial M=g(X,Y)\omega$. 由6.7.6，$\omega=i_Y\Omega$. 不难看出 $X|\partial M=g(X,Y)Y+Z$，$Z\in\mathscr{X}(\partial M)$. 于是对任给 $X_2,\cdots,X_m\in\mathscr{X}(\partial M)$ 有：

$$(i_X\Omega)(X_2,\cdots,X_m)=\Omega(g(X,Y)Y,X_2,\cdots,X_m)$$
$$=g(X,Y)\omega(X_2,\cdots,X_m). \quad \square$$

M上每个体积形式ω显然决定$C_c(M)$上一正线性泛函 $f\longmapsto\int f\omega$，从而依Riesz表示定理（3.4.5）决定M上一正测度 μ（或写作μ_ω），使得$\int f\omega=\int fd\mu(f\in C_c(M))$，称$\mu$为$\omega$决定的"Lebesgue测度"；若$(M,g)$是Riemann流形，$\omega$是$g$-体积元，则称$\mu_\omega$为由$g$决定的测度. M上的Lebesgue测度固然不是唯一的，但它们有以下共同性质：

6.8.6 定理 若μ是M上一Lebesgue测度，则$\mu A=0\Longleftrightarrow$依5.5.1有$\mu A=0$；任给$f:M\to\mathbf{C}$，$f\in L^p_{loc}(M,\mu)\Longleftrightarrow$对$M$上每个图$(U,\varphi)$，$f\circ\varphi^{-1}\in L^p_{loc}(\varphi U)(1\leqslant p\leqslant\infty)$.

这一结果的证明留给读者.

借助于"奇异链"概念，可定义任意阶微分形式的积分. 引入以下术语：令$e_0=0$，$e_p=(0,\cdots,0,1)\in\mathbf{R}^p(p\geqslant1)$，以$\Delta_p$记$\mathbf{R}^p$中含点$e_0,\cdots,e_p$的最小凸集，称它为标准$p$-单形；称任何$\sigma\in C^\infty(\Delta_p,M)$为$M$上的（微分）**奇异$p$-单形**. 奇异$p$-单形的实系数有限线性组合称为**奇异$p$-链**，其全体构成一向量空间$S^\infty_p(M)$. 给定$p\geqslant0$，$0\leqslant i\leqslant p+1$，存在唯一仿射映射 $k^p_i:\Delta_p\to\Delta_{p+1}$，它映$\Delta_p$为$\Delta_{p+1}$中"顶点"$e_i$所对的"面". 当$p\geqslant1$时有

$$k^p_i(x^1,\cdots,x^p)=\begin{cases}\left(1-\sum\limits_{i=1}^{p}x^i,x^1,\cdots,x^p\right), & i=0;\\ (x^1,\cdots,x^{i-1},0,x^i,\cdots,x^p), & 1\leqslant i\leqslant p+1,\end{cases} \tag{14}$$

而$k_0^0(0)=1$，$k_1^0(0)=0$．任给$\sigma\in C^\infty(\Delta_p,M)$（$p\geqslant1$），称$\sigma^i=\sigma\circ k_i^{p-1}$（$0\leqslant i\leqslant p$）为$\sigma$的$i$-面；称$\partial\sigma=\sum_0^p(-1)^i\sigma^i$为$\sigma$的边界．$\partial$自然地扩张为一线性映射$\partial: S_p^\infty(M)\to S_{p-1}^\infty(M)$；约定$\partial S_0^\infty(M)=0$，称$\partial$为边界算子．不难直接验证等式：

$$k_i^{p+1}\circ k_j^p=k_{j+1}^{p+1}\circ k_i^p,\quad 0\leqslant i\leqslant j\leqslant p+1,\quad p\geqslant0. \tag{15}$$

由(15)易推出$\partial^2=0$．

6.8.7 定义 设$\sigma\in C^\infty(\Delta_p,M)$，$\omega$是$\sigma$上的一个$p$-形式（这意指$\omega\in A^p(U)$，$U$是$\sigma(\Delta_p)$的某邻域）．$p\geqslant1$时定义

$$\int_\sigma\omega=\int_{\Delta_p}\sigma^*\omega \tag{16}$$

为ω在σ上的积分；若$p=0$，则规定$\int_\sigma\omega=\omega(\sigma(0))$．

任给$c=\sum\lambda_i\sigma_i\in S_p^\infty(M)$，规定

$$\int_c\omega=\sum\lambda_i\int_{\sigma_i}\omega \tag{17}$$

为ω在链c上的积分，只要每个$\int_{\sigma_i}\omega$存在．

关于“链上的积分”亦有一个“Stokes定理”．

6.8.8 定理 任给$c\in S_p^\infty(M)$，$\omega\in A^{p-1}(M)(p\geqslant1)$，成立

$$\int_c d\omega=\int_{\partial c}\omega. \tag{18}$$

证 不妨设$c=\sigma\in C^\infty(\Delta_p,M)$，于是(18)可化为

$$\int_{\Delta_p}d\sigma^*\omega=\sum_{i=0}^p(-1)^i\int_{\Delta_{p-1}}(k_i^{p-1})^*\sigma^*\omega.$$

因此只要证：对任给$\omega\in A^{p-1}(\mathrm{R}^p)$，成立

$$\int_{\Delta_p}d\omega=\sum_{i=0}^p(-1)^i\int_{\Delta_{p-1}}(k_i^{p-1})^*\omega. \tag{19}$$

只需考虑$p>1$．设(x^i)是R^p的自然坐标，令

$$\omega = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^p,$$

则
$$\int_{\Delta_p} d\omega = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \int_{\Delta_p} \partial_i \lambda_i dx^1 \cdots dx^p. \tag{20}$$

依(14)直接算出

$$(k_i^{p-1})^* \omega =$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} \lambda_j \circ k_0^{p-1} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{p-1}, & i=0; \\ (\lambda_i \circ k_i^{p-1}) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{p-1}, & i>0, \end{cases}$$

于是(19)之右端可表为

$$\sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \int_{\Delta_{p-1}} (\lambda_i \circ k_0^{p-1} - \lambda_i \circ k_i^{p-1}) dx^1 \cdots dx^{p-1},$$

与(20)对照看出，问题归于证明：

$$\int_{\Delta_p} \partial_i \lambda_i dx^1 \cdots dx^p$$
$$= \int_{\Delta_{p-1}} (\lambda_i \circ k_0^{p-1} - \lambda_i \circ k_i^{p-1}) dx^1 \cdots dx^{p-1}. \tag{21}$$

不难看出，证(21)又归于证

$$\int_{\Delta_{p-1}} (\lambda_i \circ k_0^{p-1}) dx^1 \cdots dx^{p-1}$$
$$= \int_{\Delta_{p-1}} \lambda_i (x^1, \cdots, x^{i-1}, 1 - \sum_{j=1}^{p-1} x^j, x^i, \cdots, x^{p-1}) dx^1 \cdots dx^{p-1}. \tag{22}$$

为证(22)，作变量代换

$$\varphi : (x^1, \cdots, x^{p-1}) \longmapsto \left(x^2, \cdots, x^{i-1}, 1 - \sum_{j=1}^{p-1} x^j, x^i, \cdots, x^{p-1} \right),$$

则$\varphi(\Delta_{p-1}) = \Delta_{p-1}$，$\varphi$的Jacobi行列式为1．以$\lambda_i \circ k_0^{p-1} \circ \varphi$代换(22)左端之被积函数，即得所欲证． □

若用记号$\langle c, \omega \rangle = \int_c \omega$，则(18)可写成$\langle c, d\omega \rangle = \langle \partial c,$

$\omega\rangle$，这表明算子 ∂ 与 d 有某种对偶性。

参考文献：[2]，[12]，[20]，[22]，[45]，[47]，[55]，[83]。

习 题

1. $C_c^\infty(M)$ 在 $L^p(M,\mu)$ $(1\leqslant p<\infty)$ 中稠密，μ 是Lebesgue测度。

2. 设 M 是紧无边流形，$X\in\mathscr{X}(M)$，$\alpha\in\Lambda^p(M)$，$\beta\in\Lambda^{m-p}(M)$，则 $\int(L_X\alpha)\wedge\beta=-\int\alpha\wedge(L_X\beta)$。

§9 de Rham 群

令 $Z^p(M)=\{\omega\in\Lambda^p(M)\mid d\omega=0\}$，$B^p(M)=d\Lambda^{p-1}(M)$，约定 $B^0(M)=0$。$Z^p(M)$ 与 $B^p(M)$ 中的元分别称为 M 上的闭 p-形式与恰当 p-形式。由 $d^2=0$ 推出 $B^p(M)\subset Z^p(M)$。

6.9.1 定义 称商 $H^p(M)=Z^p(M)/B^p(M)$ 为 M 的 $p(0\leqslant p\leqslant m)$ 阶de Rham上同调群，或简称 p 阶 de Rham 群。

注意 $H^p(M)$实际上是一实向量空间，它的元素是陪集 $\omega+B^p(M)(\omega\in Z^p(M))$，写作 $[\omega]$。若 $f\in C^\infty(M)$，则 $df=0\Longleftrightarrow f$ 局部为常数，由此推出 $H^0(M)=Z^0(M)\cong\mathbb{R}^k$，$k$ 是 M 的分支数。若 $0<p\leqslant m$，能由定义直接计算的 $H^p(M)$ 是不多的。因此必要建立某些定性的结论。

首先指出，若 $f\in C^\infty(M,N)$，则由 $df^*=f^*d$(6.3.4) 推出 $f^*Z^p(N)\subset Z^p(M)$，$f^*B^p(N)\subset B^p(M)$，于是依

$$f^*[\omega]=[f^*\omega],\quad \omega\in Z^p(N) \tag{1}$$

定义出一线性映射 $f^*: H^p(N)\to H^p(M)$。若 $g\in C^\infty(N,N')$，则 $(g\circ f)^*=f^*\circ g^*: H^p(N')\to H^p(M)$；其次显然 $1_M^*=\mathrm{id}$。由此易见：$f: M\cong N\Longrightarrow f^*: H^p(N)\cong H^p(M)$。更深刻的结果依赖于下面引进的同伦概念。

6.9.2 定义 设 $I=[0,1]$。若 $h\in C^r(I\times M,N)$，$h_t(x)=h(t,x)$，则称 h 为从 h_0 到 h_1 的 C^r **同伦**，并说 h_0 与 h_1 是 C^r 同伦的。下面以 $h_0\simeq h_1$ 记 h_0 与 h_1 是 C^∞ 同伦的。若存在 $f\in C^\infty(M,$

N), $g\in C^\infty(N,M)$，使得 $f\circ g\simeq 1_N$，$g\circ f\simeq 1_M$，则说 M 与 N (C^∞) 同伦等价，记作 $M\simeq N$（或 $f: M\simeq N$）. 若 M 同伦等价于一点流形，则说 M 是可缩的.

设 A 是 M 的子流形. 若存在 $h\in C^\infty(I\times M, M)$，使得 $h_0=1_M$，$h_1(M)\subset A$，$h_1|A=1_A(h_t(x)=h(t,x))$，则显然 $M\simeq A$，此时说 h 是从 M 到 A 的一个 C^∞ 收缩. 在简单情况下，这种收缩的存在性可从几何上看出.

6.9.3 定理 若 $f: M\simeq N$，则 $f^*: H^p(N)\cong H^p(M)$ $(p\geqslant 0)$.

证 任给 $t\in I=[0,1]$，令 $j_t: M\to I\times M$，$x\longmapsto(t, x)$. 任给 $\omega\in A^{p+1}(I\times M)$，由

$$(H\omega)(X_1,\cdots,X_p)=\int_0^1(j_t^* i_{\partial/\partial t}\omega)(X_1,\cdots,X_p)dt, \quad (2)$$
$$X_1,\cdots,X_p\in\mathscr{X}(M)$$

定义出 $H\omega\in A^p(M)$，由此得到 $H: A^{p+1}(I\times M)\to A^p(M)$（所谓同伦算子）. 任给 $\omega\in A^p(I\times M), X_1,\cdots,X_p\in\mathscr{X}(M)$，由 (2) 及 § 3(17) 有：

$$(Hd\omega)(X_1,\cdots,X_p)=\int_0^1(d\omega)\left(\frac{\partial}{\partial t}, X_{1t},\cdots,X_{pt}\right)dt$$

$$=\int_0^1\frac{\partial}{\partial t}(j_t^*\omega)(X_1,\cdots,X_p)dt$$

$$+\sum_{i=1}^p(-1)^i\int_0^1 X_{it}\left(\omega\left(\frac{\partial}{\partial t}, X_{1t},\cdots,\widehat{X_{it}},\cdots,X_{pt}\right)\right)dt$$

$$+\sum_{i=1}^p(-1)^i\int_0^1\omega\left(\left[\frac{\partial}{\partial t}, X_{it}\right], X_{1t},\cdots,\widehat{X_{it}},\cdots,X_{pt}\right)dt$$

$$+\sum_{1\leqslant i<k\leqslant p}(-1)^{i+k}\int_0^1\omega\Big([X_{it}, X_{kt}],$$

$$\frac{\partial}{\partial t}, X_{1t},\cdots,\hat{X}_{it},\cdots,\hat{X}_{kt},\cdots,X_{pt}\Big)dt$$

$$= A_1 + A_2 + A_3 + A_4,$$

其中$X_{ti} = j_{t*}X_i (1 \leqslant i \leqslant p)$. 易见$A_1 = (j_1^*\omega - j_0^*\omega)(X_1, \cdots, X_p)$, $A_3 = 0$, 而由§3(17)得$A_2 + A_4 = -(dH\omega)(X_1, \cdots, X_p)$. 于是得到:

$$Hd + dH = j_1^* - j_0^*: A^p(I \times M) \to A^p(M). \qquad (3)$$

若$h \in C^\infty(I \times M, N)$, $h_t = h \circ j_t$, 则由(3)有

$$h_1^* - h_0^* = (j_1^* - j_0^*)h^* = Hh^*d + dHh^*.$$

因此$\forall \omega \in Z^p(N)$: $(h_1^* - h_0^*)\omega = dHh^*\omega \in B^p(M)$. 故得

$$h_0^* = h_1^*: H^p(N) \to H^p(M) \ (p \geqslant 0). \qquad (4)$$

若$f \in C^\infty(M, N)$, $g \in C^\infty(N, M)$, $f \circ g \simeq 1_N$, $g \circ f \simeq 1_M$, 则(4)推出$g^* \circ f^* = \mathrm{id}$, $f^* \circ g^* = \mathrm{id}$, 因此$f^*: H^p(N) \cong H^p(M)$. □

因一点流形的de Rham群是自明的，故有

推论 若M是可缩的，则$H^0(M) \cong \mathbb{R}$, $H^p(M) = 0 (p > 0)$, 因而$\omega \in A^p(M) (p > 0)$是恰当的$\Longleftrightarrow d\omega = 0$.

下一个基本结果(6.9.4)需要以下代数概念：给定一列(有限或无限个)向量空间$\{V_i\}$, 称线性映射序列

$$\cdots \longrightarrow V_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} V_i \xrightarrow{f_i} V_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

为恰当的，若$\mathrm{Im} f_{i-1} = \mathrm{Ker} f_i$. 一个短序列

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} V_2 \longrightarrow 0$$

是恰当的相当于：f是单射、g是满射且$\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} g$.

6.9.4 定理 若$\{U, V\}$是M的开覆盖，$W = U \cap V$, 则有以下恰当序列(所谓Mayer-Vietoris序列)：

$$\cdots \longrightarrow H^p(M) \xrightarrow{f^*} H^p(U) \oplus H^p(V)$$
$$\xrightarrow{g^*} H^p(W) \xrightarrow{\delta^*} H^{p+1}(M) \longrightarrow \cdots. \qquad (5)$$

证 首先在p-形式的水平上构造恰当序列：

$$0\longrightarrow \Lambda^p(M)\xrightarrow{f}\Lambda^p(U)\oplus\Lambda^p(V)\xrightarrow{g}\Lambda^p(W)\longrightarrow 0, \tag{6}$$

其中f，g定义如下：任给$\omega\in\Lambda^p(M)$，$\sigma\in\Lambda^p(U)$，$\tau\in\Lambda^p(V)$，令

$$f(\omega)=(\omega|U,\ -\omega|V);\quad g(\sigma,\tau)=(\sigma|W)+(\tau|W).$$

显然f，g是线性的，f是单射，$\mathrm{Im}f=\mathrm{Ker}g$．其次，任给$\theta\in\Lambda^p(W)$，取$M$上从属于$\{U,\ V\}$的单位分解$\{\lambda,\ \mu\}$，则$\theta=(\lambda+\mu)\theta=g(\lambda\theta,\mu\theta)$，可见$g$是满射．

易见f，g分别与外微分算子d可换，因此，如同用(1)定义f^*一样得到线性映射$H^p(M)\to H^p(U)\oplus H^p(V)$与$H^p(U)\oplus H^p(V)\to H^p(W)$，分别记作$f^*$，$g^*$．其次定义线性映射$\delta^*:H^p(W)\to H^{p+1}(M)$如下：任给$\theta\in Z^p(W)$，令

$$\delta^*[\theta]=[f^{-1}d\sigma],\quad \sigma\in g^{-1}(\theta). \tag{7}$$

因$gd\sigma=d\theta=0\Longrightarrow d\sigma\in\mathrm{Ker}g=\mathrm{Im}f$，$df^{-1}d\sigma=f^{-1}d^2\sigma=0\Longrightarrow f^{-1}d\sigma\in Z^{p+1}(M)$，故$[f^{-1}d\sigma]$有意义．$[f^{-1}d\sigma]$与$\theta\in[\theta]$及$\sigma\in g^{-1}(\theta)$的选取无关：若$\theta^i\in Z^p(W)(i=0,1)$，$\theta^0-\theta^1=d\theta^2$，$g\sigma^i=\theta^i(i=0,\ 1,\ 2)$，则$\sigma^0-\sigma^1-d\sigma^2\in\mathrm{Ker}\,g=\mathrm{Im}f$，于是

$$\begin{aligned}[f^{-1}d\sigma^0]-[f^{-1}d\sigma^1]&=[f^{-1}d(\sigma^0-\sigma^1-d\sigma^2)]\\&=[df^{-1}(\sigma^0-\sigma^1-d\sigma^2)]=0.\end{aligned}$$

今验证(5)是一恰当序列．显然$g^*f^*=0$，故$\mathrm{Im}f^*\subset\mathrm{Ker}g^*$．若$g^*[\sigma]=0$，则$g\sigma=d\theta=dg\sigma'=gd\sigma'$，$\sigma-d\sigma'\in\mathrm{Ker}g=\mathrm{Im}f$．故$[\sigma]\in\mathrm{Im}\,f^*$，可见$\mathrm{Im}f^*=\mathrm{Ker}g^*$．直接从(7)看出$\mathrm{Im}g^*\subset\mathrm{Ker}\delta^*$．若$\delta^*[\theta]=[f^{-1}d\sigma]=0$，$g\sigma=\theta$，则$f^{-1}d\sigma=d\omega$，$d(\sigma-f\omega)=0$，于是$[\theta]=[g\sigma]=[g(\sigma-f\omega)]\in\mathrm{Im}g^*$，可见$\mathrm{Im}g^*=\mathrm{Ker}\delta^*$．类似地，对于$\delta^*:H^{p-1}(W)\to H^p(M)$，$f^*$：

$H^p(M)\to H^p(U)\oplus H^p(V)$ 有$\mathrm{Im}\delta^*=\mathrm{Ker}f^*$. □

Mayer-Vietoris序列是计算de Rham群的一个有力工具.试看一典型例子. 设S^n ($n\geqslant1$) 的两极的补分别为U,V, 则U, V是可缩的, 而$U\cap V$ 可收缩到"赤道"S^{n-1}, 于是依6.9.3与6.9.4可写出恰当序列:

$$\begin{aligned}&0\to H^0(S^n)\to \mathrm{R}\oplus\mathrm{R}\to H^0(S^{n-1})\to H^1(S^n)\to 0\to\cdots\\&\cdots\to 0\to H^{p-1}(S^{n-1})\to H^p(S^n)\to 0\to\cdots,\end{aligned}\tag{8}$$

从(8)的上一行得到恰当序列:

$$\begin{cases}0\to\mathrm{R}\to\mathrm{R}\oplus\mathrm{R}\to\mathrm{R}\oplus\mathrm{R}\to H^1(S^1)\to 0; & (9)\\ 0\to\mathrm{R}\to\mathrm{R}\oplus\mathrm{R}\to\mathrm{R}\to H^1(S^n)\to 0\ \ (n>1). & (10)\end{cases}$$

任给线性映射$f: A\to B$, 易验证 $A\cong\mathrm{Ker}f\oplus\mathrm{Im}f$, 从而$\dim A=\dim\mathrm{Ker}f+\dim\mathrm{Im}f$. 利用这一事实不难从(9)(10)得出$H^1(S^1)\cong\mathrm{R}$, $H^1(S^n)=0$ ($n>1$). 其次, 从(8)的下一行得到:

$$H^{p-1}(S^{n-1})\cong H^p(S^n)(p>1).$$

于是综合起来有:

$$H^p(S^n)=\begin{cases}\mathrm{R}, & p=0,\ n;\\ 0, & 0<p<n.\end{cases}\tag{11}$$

借助奇异链概念可给予de Rham群一个新的解释. 分别以$S_p^\infty(M)$, ∂ 代替 $A^p(M)$, d, 引进以下记号: $Z_p(M)=\{c\in S_p^\infty(M)|\partial c=0\}$, $B_p(M)=\partial S_{p+1}^\infty(M)$; $\partial^2=0$ 推出 $B_p(M)\subset Z_p(M)$.

6.9.5 定义 称商$H_p(M)=Z_p(M)/B_p(M)$ 为M的p阶(实系数)奇异同调群(它实际上也是实向量空间).

任给$c\in Z_p(M)$, 令$[c]=c+B_p(M)$. 定义双线性函数

$$H_p(M)\times H^p(M)\to\mathrm{R}, ([c],[\omega])\longmapsto\langle c,\omega\rangle,\tag{12}$$

其中 $\langle c, \omega\rangle=\int_c \omega$. (12) 是合理定义的：若 $c_i\in Z_p(M)$, $\omega^i\in Z^p(M)$ $(i=1,2)$, $c_1-c_2=\partial c$, $\omega^1-\omega^2=d\omega$, 则依上节 (18) 有

$$\begin{aligned}&\langle c_1,\omega^1\rangle=\langle c_2+\partial c,\omega^2+d\omega\rangle\\&=\langle c_2,\omega^2\rangle+\langle c_2,d\omega\rangle+\langle\partial c,\omega^2\rangle+\langle\partial c,d\omega\rangle\\&=\langle c_2,\omega^2\rangle+\langle\partial c_2,\omega\rangle+\langle c,d\omega^2\rangle+\langle c,d^2\omega\rangle\\&=\langle c_2,\omega^2\rangle.\end{aligned}$$

(12)以显然的方式诱导出线性映射(参照§1(20))：

$$\begin{aligned}&H^p(M)\to(H_p(M))^*,\\&[\omega]\longmapsto([c]\longmapsto\langle c,\omega\rangle).\end{aligned}\tag{13}$$

de Rham证明了以下著名结果（参考[61][83]）：

6.9.6 de Rham定理 (13)是一线性同构.

关于这一重要定理的证明，可参看[83].

参考文献：[2], [13], [20], [61], [83].

习 题

1. 设 θ 是 S^1 上的点的极角，则 $d\theta$ 是 S^1 的体积元. 任给 $\omega\in A^1(S^1)$, 令 $\beta=\frac{1}{2\pi}\int\omega$, 则 $\omega-\beta d\theta\in B^1(S^1)$, 由此推出 $H^1(S^1)\cong\mathbb{R}$.

2. 若 M 是定向紧无边流形，则 $H^m(M)\neq 0$. 因此当 $m>0$ 时 M 必非可缩流形.

§10 映 射 度

本节应用微分形式研究映射的"度"，并用以证明几个有名的拓扑定理，它们通常是用代数拓扑方法处理的. 下面设 M, N, P 是 n 维定向连通紧无边流形（对于非紧流形有一个

类似的理论，但需要某些新的概念）．我们要用到一个将由10.8.9确证的事实：$H^n(M)\cong\mathbb{R}$；由此容易推出：任给$\omega\in\Lambda^n(M)$，$\int\omega=0\Longleftrightarrow\omega\in B^n(M)$（依上节的记号）．若$M=S^n$，则以上结论直接从上节推出．

6.10.1 **定义** 取$\omega\in\Lambda^n(N)$，使$\int\omega=1$(易见这样的ω必存在）．任给$f\in C^\infty(M,N)$，规定f的度$\deg f$为：

$$\deg f=\int_M f^*\omega. \tag{1}$$

注 1° (1)与ω的选取无关：设ω，$\sigma\in\Lambda^n(N)$，$\int\omega=\int\sigma=1$，则$\Lambda^n(N)/B^n(N)\cong\mathbb{R}\Longrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}$，$\int(\omega-\lambda\sigma)=1-\lambda=0$，$\omega-\sigma\in B^n(N)$，从而$f^*(\omega-\sigma)\in B^n(M)$，$\int(f^*\omega-f^*\sigma)=0$．

2° 取$f\in C^\infty(M,N)$的正则值y（参考5.5.3)．取y的邻域U如下：当$f^{-1}(y)=\varnothing$时令$U=N\backslash f(M)$；若$f^{-1}(y)\neq\varnothing$，从$\dim f^{-1}(y)=0$（5.2.3)及M的紧性推出$f^{-1}(y)$为有限集，设为$\{x_1,\cdots,x_k\}$．取x_i的互不相交的邻域V_i及y的邻域U，使$f|V_i:V_i\cong U$（$1\leqslant i\leqslant k$)．取$\omega\in\Lambda^n(N)$：$\operatorname{supp}\omega\subset U$，$\int\omega=1$．若$f^{-1}(y)=\varnothing$，则$\int f^*\omega=0$；若$f^{-1}(y)\neq\varnothing$，则

$$\deg f=\sum_i\int_{V_i}f^*\omega=\sum_i(\pm1)\int_U\omega=\sum_i(\pm1), \tag{2}$$

可见$\deg f$恒为整数，当$\deg f\neq0$时f必为满射．(2)表明$\deg f$与方程$f(x)=y$的解的个数密切相关．

3° 设$g\in C^\infty(V,N)$，V是紧流形，$\partial V=M$，$\omega\in\Lambda^n(N)$，则

$$\int_M g^* \omega = \int_V dg^* \omega = \int_V g^* d\omega = 0$$

（依 6.8.4），可见 $\deg(g|M)=0$. 因此，若 $f \in C^\infty(M, N)$，$\deg f \neq 0$，则 f 必不能扩张为某个 $g \in C^\infty(V, N)$.

4° 设 $\varphi_n: S^1 \to S^1$，$e^{i\theta} \longmapsto e^{in\theta}$，则（参看上节习题1）

$$\deg \varphi_n = \frac{1}{2\pi} \int \varphi_n^* d\theta = n.$$

这个例子显示出度刻划了"环绕次数". 对一般的 $f \in C^\infty(M, N)$，可想象 $\deg f$ 具有类似的几何意义.

若 $f \in \mathrm{Diff}(M, N)$，则由(1)与6.8.3有 $\deg f = \pm 1$，当 f 保［反］向时取正［负］1. 特别，对于 $a: S^n \to S^n$，$x \longmapsto -x$（"对极映射"，下面恒记作 a），有 $\deg a = (-1)^{n+1}$.

能由（1）直接计算的度并不太多，因此关于度的以下基本性质有特别重要的意义.

6.10.2 定理 设 $f, g \in C^\infty(M, N)$，$f \simeq g$(6.9.2)；$\varphi \in C^\infty(N, P)$. 则 $\deg f = \deg g$，$\deg(\varphi \circ f) = \deg \varphi \deg f$.

证 取 $\omega \in \Lambda^n(N)$，$\sigma \in \Lambda^n(P)$：$\int_N \omega = \int_P \sigma = 1$. 由上节(4)，$f^*\omega - g^*\omega \in B^n(M)$，故 $\deg f = \deg g$. 若 $\varphi^*\sigma \in B^n(N)$，则显然 $\deg(\varphi \circ f) = 0 = \deg \varphi \deg f$；若 $\varphi^*\sigma \notin B^n(N)$，则 $\beta = \int \varphi^*\sigma \neq 0$,

$$\deg(\varphi \circ f) = \beta \int f^*(\beta^{-1} \varphi^* \sigma) = \deg \varphi \deg f. \qquad \square$$

推论 1 若 $f \in C^\infty(M, S^n)$，则 $\deg(-f) = (-1)^{n+1} \deg f$；若 $f \in C^\infty(S^n, M)$，$f(-x) = f(x)$（即 $f \circ a = f$），n 为偶数，则 $\deg f = 0$.

推论 2 若 $f, \varphi \in C^\infty(M, S^n)$，$f(x) \neq -\varphi(x)$（$\forall x \in M$），则

$$h(t,x)=\frac{(1-t)f(x)+t\varphi(x)}{|(1-t)f(x)+t\varphi(x)|},\ (t,x)\in[0,1]\times M \quad (3)$$

是从 f 到 φ 的 C^∞ 同伦，因此 $\deg f=\deg\varphi$. 特别，若 $f\in C^\infty(S^n, S^n)$, $\forall x\in S^n$: $f(x)\neq x[f(x)\neq -x]$, 则 $\deg f=(-1)^{n+1}[\deg f=1]$; 因此，当 $\deg f\neq(-1)^{n+1}[\deg f\neq 1]$ 时，方程 $f(x)=x$ $[f(x)=-x]$ 在 S^n 上必有解.

若 $\varphi,\psi\in C^\infty(M,S^n)$, $\|\varphi-\psi\|_u<2$, 则显然 $\varphi(x)\neq-\psi(x)$ $(\forall x\in M)$. 因此以下定义合理.

6.10.3 定义 设 $f\in C(M,S^n)$, 取 $\varphi\in C^\infty(M,S^n)$, 使得 $\|f-\varphi\|_u<1$ (依5.4.3). 规定 $\deg\varphi$ 为 f 的度，记作 $\deg f$.

关于连续映射的度的一个纯拓扑定义可参看[5]. 因每个同伦 $h\in C(I\times M,S^n)$ 可用 C^∞ 同伦一致逼近，故6.10.2及其推论(对于 $N=P=S^n$)自然推广到连续映射. 因此，若 $f,\varphi\in C(M,S^n)$ 同伦等价，则 $\deg f=\deg\varphi$. 一个深刻的结论是：以上事实的逆也是对的("Hopf度定理"，参看[34]).

下面考虑应用度概念的几个典型例子.

6.10.4 Brouwer 不动点定理 设 $B^n=\{x\in\mathbf{R}^n|\ |x|\leqslant 1\}$, $f\in C(B^n,B^n)$ $(n\geqslant 1)$. 则 f 至少有一不动点 $x\in B^n$: $f(x)=x$.

证 $n=1$ 的情况可直接证明，下面设 $n\geqslant 2$. 首先设 $f\in C^\infty(B^n,B^n)$. 若 f 无不动点，则 $\forall x\in B^n$: 从 $f(x)$ 到 x 的射线与 $\partial B^n=S^{n-1}$ 交于一点 $g(x)$, $g\in C^\infty(B^n,S^{n-1})$, $g|S^{n-1}=\mathrm{id}$, 这与6.10.1之后的注3°矛盾. 其次设 $f\in C(B^n,B^n)$. 假定 $\inf|f(x)-x|=3\varepsilon>0$, 取 $g\in C^\infty(B^n,\mathbf{R}^n)$: $\|f-g\|_u<\varepsilon$, 则 $\varphi=(1+\varepsilon)^{-1}g\in C^\infty(B^n,B^n)$, 于是 $\exists x_0\in B^n$: $\varphi(x_0)=x_0$. 但这推出

$$|f(x_0)-x_0|\leqslant\frac{1}{1+\varepsilon}[\varepsilon+|f(x_0)-g(x_0)|]<2\varepsilon,$$

与 $|f(x_0)-x_0|\geqslant 3\varepsilon$ 矛盾．因此 f 必有不动点． □

映射度是研究向量场奇点的有力工具．任给 $X\in C^\infty(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$，设 $x=0$ 是 X 在 $|x|\leqslant 1$ 内的唯一零点，令 $f(x)=X(x)/|X(x)|$，$x\in S^{n-1}$，则 $f\in C^\infty(S^{n-1},S^{n-1})$，称 $\deg f$ 为 X 在 $x=0$ 的指标．现在设 x_0 是 $X\in\mathscr{X}(M)$ 的一个孤立奇点，取 M 在 x_0 处的正向图 (U,φ)，使 $\varphi U=\mathbf{R}^n$，$\varphi(x_0)=0$，则规定 φ_*X 在 0 点的指标为 X 在奇点 x_0 的（拓扑）指标，可验证它与 φ 的选择无关．在某种意义上，向量场奇点的指标完全决定于流形的拓扑构造：

6.10.5 Hopf 指标定理 若 $X\in\mathscr{X}(M)$ 仅有孤立奇点，则诸奇点指标之和等于 M 的 "Euler特征数" $\chi(M)$：

$$\chi(M)=\sum(-1)^p\dim H^p(M).\tag{4}$$

以上结果的证明可参看[34]．6.10.5表明，M 上任何向量场的奇点个数及其类型都强烈地受到 M 的拓扑构造的制约．例如，若 $\chi(M)\neq 0$，则 M 上绝不存在无奇点的向量场．当 $M=S^n$ 时，可不依赖于6.10.5而直接达到这一结论．

6.10.6 定理(Brouwer-Poincaré) 当且仅当 n 为奇数时，S^n 上存在无奇点的 C^0 类向量场．

注 以 $x\cdot y$ 记 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的标准内积，则给定 S^n 上一 C^r 向量场相当于给定一个 $f\in C^r(S^n,\mathbf{R}^{n+1})$，它满足 $x\cdot f(x)=0$（$\forall x\in S^n$）；若 f 无奇点，令 $\varphi(x)=f(x)/|f(x)|$，则 $\varphi\in C^r(S^n,S^n)$，φ 亦是 S^n 上的 C^r 向量场．

证 若 $n=2k-1$，$1\leqslant k\in\mathbf{Z}$，$(x^i)$ 是 $\mathbf{R}^{2k}$ 的自然坐标，则

$$f(x^1,\cdots,x^{2k})=(x^2,-x^1,\cdots,x^{2k},-x^{2k-1})$$

是 S^n 上一无奇点的 C^∞ 向量场．反之若有 $f\in C(S^n,S^n)$，$x\cdot f(x)=0$，则 $\forall x\in S^n$：$f(x)\neq\pm x$．由6.10.2 推论2（已指明它可用于连续映射），$1=\deg f=(-1)^{n+1}$，n 必为奇数． □

每个 $f\in C(S^n,\mathbf{R}^{n+1})$ 可作"正交分解"：$f(x)=(x\cdot f(x))x$

$+\varphi(x)$，φ是 S^n 上的C^0类向量场．于是依6.10.6有：

推论 $\forall f\in C(S^{2n},\ \mathrm{R}^{2n+1})$，$\exists x\in S^{2n}$，$\lambda\in\mathrm{R}$：$f(x)=\lambda x$．

对以上结论可作如下直观解释：若在S^{2n}上每点粘贴一根毛发，使之连续变化，则其中必有一根是"直立的"(传统上这称之为"纤毛球问题")．

一个类似但困难得多的问题是：S^n上至多有多少个(逐点)线性无关的连续向量场？此问题已由 Adams 等人的工作解决(参看[3])，其结论是：若$n=(2a+1)2^{c+4d}-1, a,c,d\in\mathrm{N}$，$0\leqslant c\leqslant 3$，则 S^n 上有 $\rho(n)=2^c+8d-1$ 个线性无关的连续向量场，且 $\rho(n)$ 不能加大．由此不难推出，仅当$n=1,3,7$时，S^n上存在 n 个线性无关的连续向量场．

6.10.7 定理 若 B^{n+1} 上的 C^0 向量场 f 在边界上"朝外"，即$\forall x\in S^n$：$x\cdot f(x)>0$，则 f 在 B^{n+1}内必有奇点．

证 首先设 $f\in C^\infty(B^{n+1},\ \mathrm{R}^{n+1})$．若 f 无奇点，则可设 $f\in C^\infty(B^{n+1},\ S^n)$，于是$\deg(f|S^n)=0$，从而有 $x\in S^n$：$f(x)=-x$，这与 $x\cdot f(x)>0$ 矛盾．其次设 $f\in C(B^{n+1},\mathrm{R}^{n+1})$，$\varepsilon=\inf\limits_{|x|=1} x\cdot f(x)>0, \delta=\inf\limits_{|x|\leqslant 1}|f(x)|>0$．取$\varphi\in C^\infty(B^{n+1},\mathrm{R}^{n+1})$：$\|f-\varphi\|_u<\min\{\varepsilon,\ \delta\}$，则$\forall x\in B^{n+1}$：$|\varphi(x)|\geqslant|f(x)|-\|f-\varphi\|_u>0$；$\forall x\in S^n$：$x\cdot\varphi(x)\geqslant x\cdot f(x)-\|f-\varphi\|_u>0$，这又与已证结论矛盾． □

当 f 在边界上"朝内"时亦可证同一结论．直观地说，B^{n+1}上的流在边界上不能"纯流出"或"纯流入"，除非在B^{n+1}内存在奇点．

若$f\in C(S^n,\ S^n)$ 满足$f(-x)=-f(x)$ $[f(-x)=f(x)]$，则不妨称 f 为奇[偶]函数．当 f 是偶函数时，不难证明$\deg f=$偶数；而关于奇性的对应结果是著名的

6.10.8 Borsuk-Ulam 定理 若$f\in C(S^n,S^n)$ 满足$f(-x)$

$=-f(x)$，则$\deg f=$奇数．

上述定理的一个基于正则值的证明可参看[34]；另一个基于代数拓扑方法的证明可参看[5]．6.10.8有许多重要推论．一个典型的推论是：若$f\in C(S^n, \mathrm{R}^n)$，则必有$x\in S^n$：$f(-x)=f(x)$．否则，$\varphi(x)=[f(x)-f(-x)]/|f(x)-f(-x)|$满足6.10.8之条件，但$\varphi(S^n)\subset S^{n-1}$，$\deg\varphi=0$！

参考文献：[2]，[3]，[5]，[6]，[12]，[13]，[19]，[34]，[40]

习　题

1．若$f\in C^\infty(S^n, S^n)$是偶函数，则$\deg f=$偶数．

2．若$f\in C(S^n, S^n)$，$\deg f$为奇[偶]数，则$\exists x\in S^n$：$f(-x)=-f(x)$ [$f(-x)=f(x)$]．

3．若$f,\varphi\in C(S^{2n}, S^{2n})$，则$f$、$\varphi$、$\varphi\circ f$三者之一有不动点．

第七章　Lie群

所谓Lie群，就是带可微群运算的微分流形，它是最重要的"带附加结构"的微分流形之一，有关它的结果广泛应用于现代分析、微分几何及理论物理等学科．本章给出Lie群论的若干基础概念，中心课题是Lie群与其Lie代数的联系，而沟通这一联系的主要工具是指数映射．

在某种意义上，Lie群论是"流形上的分析学"的典型应用实例．我们将沿用前两章的概念、术语与记号，其中包括指标的用法与求和约定．

§1　Lie群与Lie群同态

7.1.1 定义　若一群G同时是一n维微分流形，且$G\times G\to G$，$(x,y)\longmapsto xy$为C^∞映射，则称G为n维Lie群．

注　若G为Lie群，则反演$i:G\to G, x\longmapsto x^{-1}$必为$C^\infty$映射（从而是微分同胚）：取$G$在单位元$e$处的图$(U,\varphi)$，使$\varphi(e)=0$；令$F(u,v)=\varphi(\varphi^{-1}(u)\cdot\varphi^{-1}(v))$，则$F(0,0)=0$，$\partial F(0,0)/\partial u=$单位算子．由隐函数定理(2.5.3)，从$F(u,v)=0$可局部地解出$C^\infty$映射$v=f(u)$，因此$i(x)=\varphi^{-1}f\varphi(x)$在$x=e$邻近是$C^\infty$函数，进而从$i(x)=a^{-1}(xa^{-1})^{-1}$看出$i(x)$在任一点$a\in G$邻近是$C^\infty$函数．由此推出，Lie群必为拓扑群(1.2.2)．

7.1.2 例　1°　任何n维实[复]向量空间(看作加群)依其自然的微分结构是一n维[$2n$维]Lie群．设V为n维实[复]向

量空间，则V的自同构群$GL(V)$可看作$R^{n^2}[C^{n^2}]$的开子集，从而依其自然的微分结构是一n^2维$[2n^2$维$]$ Lie 群；特别，$GL(n)[GL(n,C)]$是n^2维$[2n^2$维$]$Lie群，这些群称为**一般线性群**．

2° 任何可数离散群是 0 维Lie群．

3° 若G,H是 Lie 群，则积群$G\times H$依其积流形结构显然是一Lie 群．这样，从乘法群S^1(每个$z\in S^1$看作复数)得到n维Lie群$T^n=\overbrace{S^1\times\cdots\times S^1}^{n个}$（**$n$重环面**）．

4° 设A是Lie 群G的子群且为子流形，$i:A\subset G$，$\theta(x,y)=xy$，$\theta_A(a,b)=ab(x,y\in G,a,b\in A)$，则从$i\circ\theta_A=\theta\circ(i\times i)\in C^\infty$推出$\theta_A\in C^\infty$（5.2.7之推论），可见$A$是 Lie 群，称为$G$的**Lie子群**(更一般的Lie子群在§4中讨论）．

在本章中，未加声明时字母G,H总记Lie群，且认定$\dim G=n$．群单位元都写作e(对于乘法群)或 0（对于加群）．

直接从7.1.1推出，G中的左右平移

$$\lambda_a:x\longmapsto ax;\quad \rho_a:x\longmapsto xa \tag{1}$$

（$a\in G$固定)都是微分同胚，这一简单事实对于Lie 群论的展开有基本意义．大致说来，它表达了 Lie 群的“齐次性”，即局部性质处处相同；因此仅就局部性质而言，只需考虑e点邻近就够了．

λ_a与ρ_a自然诱导出张量从T^q_pG(6.2.3)到自身的同构λ_{a*}与ρ_{a*}（不妨亦称“平移”)．约定以下记号：

$$a\cdot\omega=\lambda_{a*}\omega;\quad \omega\cdot a=\rho_{a*}\omega,a\in G,\omega\in T^q_pG. \tag{2}$$

$a\cdot\omega$与$\omega\cdot a$有类似于乘积的性质：任给$a,b\in G,\omega\in T^q_pG$，有

$$a\cdot(b\cdot\omega)=(ab)\cdot\omega;\quad a\cdot(\omega\cdot b)=(a\cdot\omega)\cdot b. \tag{3}$$

今后主要用到切空间的“左平移”：$G_x\to G_{ax}$，$X\longmapsto a\cdot X(a,x$固定)．$G$的诸切空间可通过“平移”而互相变换，这正是

Lie群的基本特征及许多深刻结论的基础.

7.1.3 定理 设$\theta(x,y)=xy(x,y\in G)$，$X\in G_x, Y\in G_y$，则

$$\theta_*(X,Y)=x\cdot Y+X\cdot y. \tag{4}$$

特别，$\forall X,Y\in G_e$：$\theta_*(X,Y)=X+Y$.

证 只需证$\theta_*(X,0)=X\cdot y$（同理将有$\theta_*(0,Y)=x\cdot Y$）. 设$p:(x,y)\longmapsto x$是投影，则$\theta(x,y)=\rho_y p(x,y)$，于是

$$\theta_*(X,0)=\rho_{y*}p_*(X,0)=X\cdot y. \qquad \square$$

若$f\in C^\infty(G,H)$是一群同态[同构]，则称f为 Lie 群同态[同构]；从G到H的Lie群同态之全体记作Hom(G,H). Lie群同态有一些良好的性质. 首先，要一同态$f:G\to H$是 Lie 群同态，只需f在$e\in G$的邻近属C^∞就够了：对任给$x,a\in G$有$f(x)=f(a)f(a^{-1}x)$（参照§1.2(2)）. 其次，对Lie 群同态的秩可作出很强的结论：

7.1.4 定理 设$f\in$ Hom(G,H)，则rank$f(x)=$const；若f为单同态[满同态，同构](1.2.5)，则f必是浸入[浸满，微分同胚](5.1.3).

证 从恒等式$f(xy)=f(x)f(y)$推出$f\circ\lambda_x=\lambda_{f(x)}\circ f(x\in G)$，因此$f_*\circ\lambda_{x*}=(\lambda_{f(x)})_*\circ f_*$，可见rank$f(x)=$rank$f(e)$.

设rank$f=k$. 由5.2.3，f在$x=e$处有局部表示$(x^1,\cdots,x^n)\longmapsto(x^1,\cdots,x^k,0,\cdots,0)$. 若$k<n$，显然$f$不能是单射. 今设$fG=H$. 任给$e\in G$的邻域$U$，取$e$的紧邻域$V$：$VV^{-1}\subset U$. 因$\{Va|a\in G\}$覆盖$G$，由1.1.9有可数集$\{a_n\}\subset G$：$G=\bigcup Va_n$，于是$H=\bigcup f(V)f(a_n)$. 由1.3.8，$f(V)$必含内点$y$，于是

$$e=yy^{-1}\in(fV)^\circ(fV)^{-1}\subset(f(VV^{-1}))^\circ\subset(fU)^\circ,$$

这显然推出$k=\dim H$，f是浸满. 若f是同构，则必$k=\dim G=\dim H$，从而$f\in$ Diff(G,H). $\square$

推论 满的 Lie 群同态必为开映射（参考§5.2 习题4）；若

$\varphi\in\mathrm{Hom}(\mathbf{R},G)$，$\varphi(t)\not\equiv e$，则 φ 必为浸入．

下面考虑与连通性有关的问题．

7.1.5 定理 设 A 是拓扑群 G 的闭子群，G/A 记 A 的左陪集之全体．则 G/A 依商拓扑是一个 T_2 空间，且投影 $p:G\to G/A$ 为开映射；若 A 与 G/A 皆连通，则 G 亦必连通．

证 前一半结论的证明如同1.5.5，只需证关于连通性的结论．设 $B\subset G$ 是一开闭集(§1.4)，令 $f=\chi_B$，则 $f\in C(G)$．任给 $a\in G$，当 A 连通时 f 在 aA 上取常值，因此 $f\circ p^{-1}$ 是 G/A 上的函数，利用 p 为开映射易推出 $f\circ p^{-1}\in C(G/A)$．于是从 G/A 连通推出 $f=\mathrm{const}$，即 $B=G$ 或 $\varnothing$，这表明 G 是连通的(1.4.1)． □

7.1.6 定理 设 A 是拓扑群 G 的含 e 的分支(所谓主分支)．则 A 是 G 的闭正规子群；当 G 是 Lie 群时，商群 G/A 是一 0 维 Lie群．

证 任给 $a\in A, b\in G$，$a^{-1}A$ 与 bAb^{-1} 都是含 e 的连通集，因此 $a^{-1}A\subset A, bAb^{-1}\subset A$，这表明 A 是 G 的正规子群．A 显然是闭的，当 G 是Lie 群时 A 也是开的 (1.4.3)．因投影 $p:G\to G/A$ 是开映射，故当 G 为Lie群时 G/A 是离散的，即为 0 维 Lie 群． □

7.1.7 定理 若 G 是一连通拓扑群，则 G 可由 e 的任何邻域 U 生成：$G=\bigcup_1^\infty U^m, U^m=\overbrace{U\cdots U}^{m个}$．

证 不妨设 U 是 e 的开邻域且 $U=U^{-1}$．直接看出 $A=\bigcup U^m$ 是 G 的开子群，因此 $A=G$(1.4.4)． □

对于连通 Lie 群，某些局部性的结果可转化为一个整体的结论，下面就是一个例子．

7.1.8 定理 设 $f\in\mathrm{Hom}(G,H)$，H 是连通的．则 f 是满射 $\Longleftrightarrow f_*:G_e\to H_e$ 是满射．

证 必要性由7.1.4推出．今设$f_*(G_e)=H_e$，由7.1.4，f是浸满，从而为开映射．任给$e\in G$的邻域U, $V=f(U)$是$e\in H$的邻域，于是依7.1.7有

$$H=\bigcup V^m=\bigcup(fU)^m=f(\bigcup U^m)\subset f(G). \qquad \square$$

参考文献：[22]，[31]，[45]，[82]，[83]．

习　题

1．无需流形是第二可数的这一假定，亦可推出连通Lie群是第二可数的．

2．设$i(x)=x^{-1}$，则$i_*(X)=-x^{-1}\cdot X\cdot x^{-1}(x\in G, X\in G_x)$．

3．一群同态$f: G\to H$是Lie群同态$\Longleftrightarrow f$的图形Γ_f是$G\times H$的子流形．

§2　Lie 代　数

7.2.1 定义　设$\omega\in\mathscr{T}(G)$．若$\forall a,x\in G$: $a\cdot\omega_x=\omega_{ax}$（简写作$a\cdot\omega=\omega$），则说$\omega$是左不变的．"右不变"的意义仿此．"双不变"意指同时左不变与右不变．

令$\mathscr{T}_{\text{inv}}(G)=\{\omega\in\mathscr{T}(G)\mid\forall a\in G: a\cdot\omega=\omega\}$，则$\mathscr{T}_{\text{inv}}(G)$显然是张量代数$\mathscr{T}(G)$的一个子代数，它的构造十分简单；设$T(G_e)$是切空间$G_e$上的张量代数(6.1.2)，则有

7.2.2 定理　对应$\mathscr{T}_{\text{inv}}(G)\to T(G_e)$, $\omega\longmapsto\omega_e$是一代数同构．

证　对应$\omega\longmapsto\omega_e$显然是一代数同态．因

$$\omega_x=x\cdot\omega_e,\ \omega\in\mathscr{T}_{\text{inv}}(G),\ x\in G, \tag{1}$$

故$\omega\in\mathscr{T}_{\text{inv}}(G)$由$\omega_e$唯一决定．任给$\omega_e\in T_p^qG_e$(6.1.1)，令$\omega_x=x\cdot\omega_e(x\in G)$，如此得到的张量场$\omega$满足$a\cdot\omega_x=(ax)\cdot\omega_e=\omega_{ax}(a,x\in G)$．因不难验证（例如通过局部坐标）

$$G\times T_p^qG\to T_p^qG,\ (x,\sigma)\longmapsto x\cdot\sigma.$$

是C^∞映射，故$\omega\in\mathscr{T}_{\text{inv}}(G)$．由此推出所要证． $\square$

这就表明，$\mathscr{T}_{\text{inv}}(G)$可等同于$T(G_e)$，而后者又完全决定

于G_e，任给$\omega_e \in T^q_p G_e$，由$\omega_x = x \cdot \omega_e (x \in G)$定义的张量场$\omega$称为由$\omega_e$生成的左不变张量场，特别，每个$X_e \in G_e$生成唯一左不变向量场$X$：$X_x = x \cdot X_e (x \in G)$．若令$\mathfrak{g} = \mathscr{X}(G) \cap \mathscr{T}_{inv}(G)$，则$\mathfrak{g}$线性同构于$G_e$．于是代数同构$\mathscr{T}_{inv}(G) \cong T(G_e)$诱导出代数同构$\mathscr{T}_{inv}(G) \cong T(\mathfrak{g})$，$T(\mathfrak{g})$记向量空间$\mathfrak{g}$上的张量代数．依上述同构，左不变1-形式之全体$\Lambda^1(G) \cap \mathscr{T}_{inv}(G)$对应$\mathfrak{g}$的对偶$\mathfrak{g}^*$．任给$\theta \in \Lambda^1(G)$，$X \in \mathfrak{g}$，$a, x \in G$，有

$$\langle X_{ax}, a \cdot \theta_x \rangle = \langle a^{-1} \cdot X_{ax}, \theta_x \rangle = \langle X_x, \theta_x \rangle.$$

由此推出：$\theta \in \Lambda^1(G)$是左不变的$\Longleftrightarrow \forall X \in \mathfrak{g}$：$\theta(X) =$ const．一般地，$\omega \in \mathscr{T}^q_p(G)$是左不变的$\Longleftrightarrow \forall X_1, \cdots, X_p \in \mathfrak{g}, \theta^1, \cdots, \theta^q \in \mathfrak{g}^*$：$\omega(X_1, \cdots, X_p, \theta^1, \cdots, \theta^q) =$ const．

上述的$\mathfrak{g}$还有一重要性质，那就是对Lie积运算$[,]$封闭（参看5.7.9），因此$\mathfrak{g}$是Lie代数$\mathscr{X}(G)$的子代数，称为Lie群G的Lie代数，亦记作Lie(G)．线性同构$\mathfrak{g} \to G_e$，$X \longmapsto X_e$在G_e中自然地诱导出一Lie积运算，使G_e成为一个与$\mathfrak{g}$同构的Lie代数，今后将同等地把G_e看作G的Lie代数．未作声明时，字母$\mathfrak{g}$，$\mathfrak{h}$将自动地表示Lie群G，H的Lie代数．

G_e的每组基生成$\mathfrak{g}$的一组基，后者显然也是切丛TG的一组整体基(5.6.5)．于是得到：

7.2.3 定理 Lie群必为可平行化流形(5.6.4)，从而是可定向的（参考6.7.2之推论）．

设$\{X_i\}$是$\mathfrak{g}$的一组基，则有

$$[X_i, X_j] = c^k_{ij} X_k, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n. \tag{2}$$

常数$c^k_{ij} (i, j, k = 1, 2, \cdots, n)$完全决定了$\mathfrak{g}$的结构，它们称为Lie群$G$的结构常数．§5.7(8)(7)推出$c^k_{ij}$满足：

$$\begin{aligned} & c^a_{ij} c^k_{al} + c^a_{jl} c^k_{ai} + c^a_{li} c^k_{aj} = 0, \\ & c^k_{ij} + c^k_{ji} = 0, \qquad i, j, k, l = 1, 2, \cdots, n. \end{aligned} \tag{3}$$

若$\{\theta^i\}\subset\mathfrak{g}^*$是$\{X_i\}$的对偶基，则$d\theta^k=\frac{1}{2}\beta^k_{ij}\theta^i\wedge\theta^j$,

$$\beta^k_{ij}=d\theta^k(X_i,X_j)=-\theta^k([X_i,X_j])=-c^k_{ij}$$

（依§6.3(18)）．这就得到与(2)呼应的**Maurer-Cartan** 方程：

$$d\theta^k=\frac{1}{2}c^k_{ij}\theta^j\wedge\theta^i,\qquad k=1,2,\cdots,n. \tag{4}$$

下面导出利用局部坐标计算c^k_{ij}的公式．取G在e处的坐标系(x^i)，设$(\partial/\partial x^i)_e$生成$X_i\in\mathfrak{g}$，则

$$X_i(x)=\lambda_{x*}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_e=\frac{\partial(xy)^j}{\partial y^i}\bigg|_{y=e}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_x, \tag{5}$$

其中$(xy)^j$，y^j记xy,y的坐标，x,y邻近e．依§5.7(5),

$$c^k_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_e=[X_i,X_j]_e$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial(xy)^k}{\partial y^j}-\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial(xy)^k}{\partial y^i}\right]\bigg|_{x=y=e}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_e,$$

故得 $$c^k_{ij}=\left[\frac{\partial^2(xy)^k}{\partial x^i\partial y^j}-\frac{\partial^2(xy)^k}{\partial x^j\partial y^i}\right]\bigg|_{x=y=e}. \tag{6}$$

7.2.4 例 1°．若G是Abel Lie群，则直接从(6)看出$c^k_{ij}=0$，因此$\mathfrak{g}$是Abel Lie代数(5.7.7)．

2° 考虑Lie群GL(n)，可认为它在e处的切空间是n阶实方阵的空间$M_n(\mathrm{R})$．任给$x=(x_{ij})\in M_n(\mathrm{R})$，就以$x_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant n)$作为$x$的坐标．依(6)算出

$$c^{(kl)}_{(ij)(\alpha\beta)}=\left[\frac{\partial^2(xy)_{kl}}{\partial x_{ij}\partial y_{\alpha\beta}}-\frac{\partial^2(xy)_{kl}}{\partial x_{\alpha\beta}\partial y_{ij}}\right]\bigg|_{x=y=e}$$
$$=\delta^k_i\delta^\alpha_j\delta^l_\beta-\delta^k_\alpha\delta^\beta_i\delta^l_j.$$

任给$a,b\in M_n(\mathrm{R})$，a等同于$\sum a_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right)_e$，于是

$$[a,b]=\sum_{i,j,\alpha,\beta}a_{ij}b_{\alpha\beta}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right)_e,\ \left(\frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}}\right)_e\right]$$

$$=\sum_{i,j,\alpha,\beta,k,l}a_{ij}b_{\alpha\beta}c^{(kl)}_{(ij)(\alpha\beta)}\left(\frac{\partial}{\partial x_{kl}}\right)_e$$

$$=\sum_{i,j,\alpha,\beta,k,l}a_{ij}b_{\alpha\beta}(\delta^k_i\delta^\alpha_j\delta^l_\beta-\delta^k_\alpha\delta^\beta_i\delta^l_j)\left(\frac{\partial}{\partial x_{kl}}\right)_e$$

$$=\sum_{i,k,l}(a_{ki}b_{il}-b_{ki}a_{il})\left(\frac{\partial}{\partial x_{kl}}\right)_e=ab-ba.$$

可见Lie $GL(n)=M_n(R)$，其中Lie积表为$[a,b]=ab-ba$.

类似地有 Lie $GL(n,C)=M_n(C)$（n 阶复方阵之空间），$M_n(C)$中的Lie积亦决定于公式$[a,b]=ab-ba$.

3° 设G是R的仿射变换群，则G可表成 $R^*\times R$，其中$R^*=R\setminus 0$，乘法公式为

$$(x^1,x^2)(y^1,y^2)=(x^1y^1,x^1y^2+x^2),\qquad (7)$$

单位元是$e_1=(1,0)$．G在e_1的切空间R^2看作G的Lie代数，设c^k_{ij}是关于R^2的自然基$\{e_1,e_2\}$的结构常数．依(3)，$c^k_{ii}=0(i,k=1,2)$；依(6)，$c^1_{12}=-c^1_{21}=0$,

$$c^2_{12}=-c^2_{21}=\frac{\partial^2(x^1y^2+x^2)}{\partial x^1\partial y^2}-\frac{\partial^2(x^1y^2+x^2)}{\partial x^2\partial y^1}=1.$$

于是$[e_1,e_2]=e_2$．任给$x=(x^1,x^2)\in R^2$, $y=(y^1,y^2)\in R^2$,

$$[x,y]=(x^1y^2-x^2y^1)[e_1,e_2]=(0,x^1y^2-x^2y^1).\quad(8)$$

7.2.5 定理 每个$f\in \mathrm{Hom}(G,H)$导出一Lie代数同态$f_*:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$；若$f$是单［满］同态，则$f_*:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$亦然.

证 线性映射$f_*|G_e$自然地导出线性映射

$$\mathfrak{g}\cong G_e\xrightarrow{f_*}H_e\cong\mathfrak{h},\qquad (9)$$

其中$\mathfrak{g}\cong G_e$与$H_e\cong\mathfrak{h}$是如7.2.2所述的自然同构．将映射(9)仍记

作f_*. 设$X\in\mathfrak{g}$, $Y=f_*X\in\mathfrak{h}$, $x\in G$, 则

$$f_*X_x=f_*(x\cdot X_e)=f(x)\cdot f_*X_e=f(x)\cdot Y_e=Y_{f(x)},$$

可见$X\overset{f}{\sim}Y$(5.7.8). 于是 5.7.9 推出$f_*:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$是一Lie 代数同态. 定理余下结论直接从7.1.4推出. □

因同态$f_*:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$完全决定于$f_*:G_e\to H_e$, 故对应$f\longmapsto f_*$自然有"函子性质", 即当$f\in\mathrm{Hom}(G,H)$, $\varphi\in\mathrm{Hom}(H,H')$时, $(\varphi\circ f)_*=\varphi_*\circ f_*$, 且$(1_G)_*=1_{\mathfrak{g}}$. 由此推出: 若$f:G\to H$是一Lie群同构, 则$f_*:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$必为Lie代数同构. 这就可能在一定程度上将Lie群的研究转化为Lie代数的研究(参看7.6.10).

对应$f\longmapsto f^*$为可逆的情况特别值得注意.

7.2.6 定理 设G是连通的, $f,\varphi\in\mathrm{Hom}(G,H)$, 则$f=\varphi\Longleftrightarrow f_*=\varphi_*:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$, 即$\mathrm{Hom}(G,H)\to\mathrm{Hom}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, $f\longmapsto f_*$是一单射, $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$记从$\mathfrak{g}$到$\mathfrak{h}$的Lie代数同态之全体.

证 以下证明基于6.4.5. 假定$f_*=\varphi_*:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$. 取定$\mathfrak{g}^*$的一组基$\{\theta^i\}$, 它也是$T^*H$的一组整体基. 设$f^*$是$f$诱导的拉回, 则$f^*\mathfrak{h}^*\subset\mathfrak{g}^*$, 且$f^*:\mathfrak{h}^*\to\mathfrak{g}^*$恰为$f_*:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$的对偶, 因此$f^*=\varphi^*:\mathfrak{h}^*\to\mathfrak{g}^*$. 设$p:G\times H\to G$与$q:G\times H\to H$是投影, 则$\{(p^*f^*-q^*)\theta^i\}$生成$G\times H$上的一理想$I$. 令$F=(fp-q)^*$, 则依(4)有

$$d(F\theta^k)=Fd\theta^k=\frac{1}{2}F(c^k_{ij}\theta^j\wedge\theta^i)$$

$$=\frac{1}{2}c^k_{ij}(F\theta^j)\wedge(F\theta^i).$$

由6.4.3, I是一微分理想. 因$f(e)=\varphi(e)=e$, G连通, 故从6.4.5之2°推出$f=\varphi$. □

参考文献: [12], [22], [31], [45], [83].

习 题

1. 设C^*是非零复数的乘法群，(r,θ)是极坐标，则$\omega=r^{-1}dr\wedge d\theta$ 是C^*上的不变形式.

2. 设c_{ij}^k是关于基$\{X_i\}\subset\mathfrak{g}$的结构常数，由$(\varphi X_i)_{kj}=c_{ij}^k$ 定义$\varphi(X_i)\in M_n(\mathrm{R})$，则$\varphi$扩张为一个Lie代数同态$\mathfrak{g}\to M_n(\mathrm{R})$.

3. 存在自然的Lie代数同构$\mathrm{Lie}(G\times H)\cong\mathfrak{g}\times\mathfrak{h}$，后者的Lie积"依坐标"定义.

4. 设$\mathfrak{h}$是$\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G)$的$n-k$维子空间，$I$是$\{\theta^i\}_{i=1}^k\subset\mathfrak{g}^*$生成的$k$秩理想，$\theta^i|\mathfrak{h}=0\,(1\leqslant i\leqslant k)$. 则$\mathfrak{h}$是$\mathfrak{g}$的子代数$\Longleftrightarrow$ I是微分理想.

§3 指 数 映 射

本节沿用§5.7的记号. 任给$X\in\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G)$，以$\theta^X$记$X$生成的流. 称映射

$$\exp:\mathfrak{g}\to G,\ X\longmapsto\theta^X(1,e) \tag{1}$$

为指数映射；方便时也将exp看作定义于G_e上的映射.

7.3.1 定理 $\mathfrak{g}\to\mathrm{Hom}(\mathrm{R},G)$, $X\longmapsto\exp tX$是一双射；$\exp\in C^\infty$；映射$(\exp)_*:\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}\to G_e$映每个$X\in\mathfrak{g}$为$X_e$.

证 取定$X\in\mathfrak{g}$，依5.7.10有$\lambda_a\circ\theta_t^X=\theta_t^X\circ\lambda_a$ $(a\in G,\ t\in\mathrm{R})$，由此推出$I_x=I_{ax}$($a,x\in G$，记号见5.7.2)，从而$I_x=I_e$. 与$I_x=t+I_{\theta(t,x)}$ $(\theta=\theta^X)$比较得$I_x=\mathrm{R}$，可见θ^X是完全的，特别，定义式(1)恒有意义.

任给$s,t\in\mathrm{R}$，由$\dfrac{d}{dt}\theta^X(st,e)=sX(\theta^X(st,e))$推出$\theta^X(st,e)=\theta^{sX}(t,e)$；令$t=1$得

$$\exp sX=\theta^{sX}(1,e)=\theta^X(s,e)=\theta_s^X(e). \tag{2}$$

利用恒等式$\lambda_a\circ\theta_t^X=\theta_t^X\circ\lambda_a$从(2)得：

$$\exp(s+t)X=\theta_s^X\theta_t^X(e)=\theta_t^X(e)\theta_s^X(e)=\exp tX\exp sX,$$

可见$\mathbf{R}\to G$, $t\longmapsto \exp tX$是一Lie群同态.

反之，任给 $h\in \mathrm{Hom}(\mathbf{R},G)$，令 $\theta(t,x)=xh(t)(t\in\mathbf{R},x\in G)$，则直接看出$\theta$是$G$上的流(5.7.3)，它满足$\lambda_a\circ\theta_t=\theta_t\circ\lambda_a$ $(a\in G,t\in\mathbf{R})$. 由5.7.10，θ的生成子(§5.7)X是左不变的，即$X\in\mathfrak{g}$. 于是

$$h(t)=x^{-1}\theta(t,x)=\theta(t,e)=\exp tX.$$

这就证得 $\mathfrak{g}\to \mathrm{Hom}(\mathbf{R},G)$, $X\longmapsto \exp tX$为双射.

为证$\exp\in C^\infty$，定义$G\times\mathfrak{g}$上的C^∞向量场

$$V: G\times\mathfrak{g}\to TG\times T\mathfrak{g},\ (x,X)\longmapsto(X_x,0).$$

直接看出$\varphi(t)=(x\cdot\exp tX, X)$是$V$过$(x,X)\in G\times\mathfrak{g}$的积分曲线，因此 $\mathbf{R}\times G\times\mathfrak{g}\to G\times\mathfrak{g}$, $(t,x,X)\longmapsto(x\cdot\exp tX, X)$是$V$的流，这推出$\exp\in C^\infty$. 最后，对任给$X\in\mathfrak{g}$有：

$$(\exp)_*(X)=\frac{d}{dt}(\exp tX)\big|_{t=0}=X_e. \qquad \square$$

任给$X\in\mathfrak{g}$，从 $\exp(X-X)=e$ 及 $\theta^X(t,x)=x\cdot\exp tX$ 推出：

$$\exp(-X)=(\exp X)^{-1};\quad \theta_t^X=\rho_{\exp tX}. \qquad (3)$$

其次，7.3.1的最后一个结论表明$(\exp)_*|\mathfrak{g}_0$是一同构，从而 exp在$X=0$处是局部微分同胚. 于是我们有定义于$e\in G$的某邻域U内的“对数映射” $\ln=(\exp)^{-1}: U\to\mathfrak{g}$, $(U,\ln)$是G上的一坐标系，称为**正规坐标系**. 以上事实结合7.1.7得出：

推论 若G是连通Lie群，则G可由$\exp(\mathfrak{g})$生成，即每个$x\in G$可表成$\exp X_1\cdots\exp X_k$, $X_1,\cdots,X_k\in\mathfrak{g}$.

一般说来，指数映射exp并不满足“加法公式” $\exp(X+Y)=\exp X\cdot\exp Y$. 不过有以下逼近结果：

7.3.2 定理 任给$X,Y\in\mathfrak{g}$，当$|t|$充分小时有

$$\exp tX\cdot\exp tY=\exp(t(X+Y)+W(t)), \qquad (4)$$

其中$W(t)$是C^∞的$\mathfrak{g}$-值函数，当$t\to 0$时$t^{-2}W(t)$有界. 若$[X,$

$Y]=0$，则$\exp(X+Y)=\exp X\cdot\exp Y$.

证 当$|t|$充分小时，$Z(t)=\ln(\exp tX\cdot\exp tY)$是$C^\infty$的g-值函数，$Z(0)=0$. 于是从$Z(t)$在$t=0$的Taylor展开式看出$Z(t)=t\dot{Z}(0)+W(t)$，$W(t)$具有定理所要求的性质，$\dot{Z}(0)=(\exp)_*^{-1}\varphi_*(X_e,Y_e)=X+Y$，其中$\varphi(x,y)=xy$(参看7.1.3，7.3.1). 于是(4)式得证.

$[X,Y]=L_XY=0$推出Y是θ_t^X-不变的（这可由§6.3(11)推出），于是$\theta_t^X\theta_s^Y=\theta_s^Y\theta_t^X(s,t\in\mathrm{R}$，见5.7.10)，因此

$$\exp tX\exp sY=\theta_t^X(e)\theta_s^Y(e)=\theta_s^Y\theta_t^X(e)$$
$$=\theta_t^X\theta_s^Y(e)=\exp sY\exp tX. \tag{5}$$

令$h(t)=\exp tX\cdot\exp tY$，则(5)推出$h\in\mathrm{Hom}(\mathrm{R},G)$. 因$\dot{h}(0)=X_e+Y_e$（利用7.1.3），故$h(t)=\exp t(X+Y)$. □

结合7.3.1之推论、7.3.2及7.2.4之1°得：

推论1 若G是连通Abel Lie群，则$\exp(\mathfrak{g})=G$.

不难从(4)或§5.7(4)推出以下公式：

$$\exp t(X+Y)=\lim_n\left(\exp\frac{t}{n}X\cdot\exp\frac{t}{n}Y\right)^n, \tag{6}$$

其中$X,Y\in\mathfrak{g}$，由此又有

推论2 设$X,Y\in\mathfrak{g}$. 若对任给$t\in\mathrm{R}$，$\exp tX\cdot\exp tY=\exp tY\cdot\exp tX$，则$\exp t(X+Y)=\exp tX\exp tY$.

指数映射的原型是通常的指数函数，

$$\exp a=\sum_{k=0}^\infty\frac{a^k}{k!},\quad a\in M_n(C),\ a^0=e \tag{7}$$

(参看§4.6(1)). (7)显然是C^∞函数，且满足

$$ab=ba\Rightarrow\exp(a+b)=\exp a\cdot\exp b. \tag{8}$$

由(8)推出$(\exp a)^{-1}=\exp(-a)$，$\mathrm{R}\to GL(n,C)$，$t\longmapsto\exp ta$是Lie群同态. 因$\frac{d}{dt}(\exp ta)\Big|_{t=0}=a$，依7.3.1，(7)正是Lie群

$GL(n, C)$的指数映射．容易看出，当(7)限制在 $M_n(R)$上时，就成为Lie群$GL(n)$的指数映射．当$n=1$时，(7)成为通常的复变量指数函数 $\exp z$．由7.3.2 之推论 1，$\exp(C)=C\setminus 0$，这与复变函数论的熟知事实相合．

7.3.3 定理 若 $f\in \mathrm{Hom}(G, H)$，$X\in \mathfrak{g}$，则 $f(\exp X)=\exp(f_* X)$．

证 由7.2.5, $X\overset{f}{\sim}Y$, $Y=f_*X$；由5.7.10, $f\circ\theta_t^X=\theta_t^Y\circ f$, 于是依 (2) 有$f(\exp X)=f\circ\theta_1^X(e)=\theta_1^Y f(e)=\theta_1^Y(e)=\exp(f_* X)$． □

推论 对于$f\in \mathrm{Hom}(G, GL(n,K))$ ($K=R$或C)有：

$$f(\exp X)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(f_*X)^k,\quad X\in\mathfrak{g}. \tag{9}$$

Lie 群论中许多深刻结论的证明要用到指数映射．以下是一个典型例子．

7.3.4 定理 设$f: G\to H$是Lie 群间的连续同态，则 f 必为Lie群同态．

证 只要证 f 在$e\in G$邻近是 C^∞的．首先设$G=R$．取 $0\in \mathrm{Lie}(H)$的凸邻域U与 $e\in H$的邻域V，使 $\exp: U\to V$ 为微分同胚．取$\delta>0$: $f([-\delta,\delta])\subset\exp\frac{1}{2}U$．令$X=\delta^{-1}(\exp)^{-1}f(\delta)$，下面指明$f(t)=\exp tX$ ($|t|\leqslant\delta$)．为此只需证$f\left(\frac{\delta}{m}\right)=\exp\frac{\delta}{m}X$ ($0<m\in N$)，因利用 f 的连续性及恒等式$f(kt)=(f(t))^k$ ($k\in Z$) 将得出所要证．令$Y=(\exp)^{-1}f\left(\frac{\delta}{m}\right)$，今证 $Y=\frac{\delta}{m}X$ 或 $mY=\delta X$．因$\exp mY=(\exp Y)^m=f(\delta)=\exp\delta X$，$\delta X\in\frac{1}{2}U$，故只需

证$mY\in U$．首先有$Y\in\frac{1}{2}U$．若$kY\in\frac{1}{2}U(1\leqslant k<m)$，则$(k+1)Y\in U$．$\exp(k+1)Y=f\left(\frac{k+1}{m}\delta\right)\in\exp\frac{1}{2}U$，于是$(k+1)Y\in\frac{1}{2}U$．这就归纳地得出$mY\in\frac{1}{2}U$．

对一般的Lie群G，取$\mathfrak{g}$的一组基$\{X_i\}$，定义

$$\varphi:\mathrm{R}^n\to G,\ (t^1,\cdots,t^n)\longmapsto\exp t^1X_1\cdots\exp t^nX_n. \quad (10)$$

因 $\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial t^i}\right)_0=\frac{d}{dt^i}\varphi(0,\cdots,t^i,\cdots,0)]_{t^i=0}=X_i(e),1\leqslant i\leqslant n,$

故$\varphi_*:(\mathrm{R}^n)_0\to G_e$是一同构，于是$\varphi$在$\mathrm{R}^n$的某个0-邻域$U$上为微分同胚．由第一段所证，$f(\exp tX_i)(1\leqslant i\leqslant n)$是$t$的$C^\infty$函数，因此$f\circ\varphi\in C^\infty$．这就推出$f|\varphi U=f\circ\varphi\circ(\varphi|U)^{-1}\in C^\infty$．□

推论 在一拓扑群G上至多可定义一个Lie群结构，使其拓扑为原拓扑．

事实上，若G依微分结构$\Phi_i(i=1,2)$为Lie群，则7.3.4推出$1_G:(G,\Phi_1)\to(G,\Phi_2)$为Lie群同构．

一个深刻得多的问题是：若拓扑群G是一拓扑流形（在5.1.1中除去条件MA_3即得拓扑流形之定义），G是否可定义为Lie群？这就是著名的Hilbert第5问题，此问题由Gleason，Montgomery与Zippen于1952年作出了肯定解答．

参考文献：[12]，[22]，[31]，[32]，[83]．

习　题

1．若x属于G的主分支，则存在从e到x的连续曲线，它逐段为形如$\exp tX$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta,\ X\in\mathfrak{g})$的曲线段的左平移象．

2．若$X,Y\in\mathfrak{g}$，则$\exp tX\cdot\exp tY=\exp(t(X+Y)+\frac{t^2}{2}[X,Y]+o(t^3))$，

由此推出

$$[X,Y]=\frac{d}{dt}[\exp\sqrt{t}X\cdot\exp\sqrt{t}Y\cdot(\exp\sqrt{t}X)^{-1}(\exp\sqrt{t}Y)^{-1}]|_{t=0}.$$

3. 若G为连通Abel Lie 群，则 $G=G_1\times\cdots\times G_n$，$G_i=S^1$ 或 R，特别，S^1与R是仅有的1维连通Lie群。

4. 若G是紧连通Lie群，则$\exp(\mathfrak{g})=G$。

5. 若$a=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}$，$\lambda<0,\mu<0$，则 $a\in\exp(M_2(\mathrm{R}))\Longleftrightarrow$存在奇数$m$，$n$，$m\ln|\lambda|+n\ln|\mu|=0$。由此推出$\exp(M_2(\mathrm{R}))\neq GL^+(2)=\{a\in GL(2)|\det a>0\}$。

§4 Lie 子 群

7.4.1 定义 若 $\varphi\in\mathrm{Hom}(H,G)$是一单同态，则称$(H,\varphi)$为$G$的 Lie 子群．称$G$的两个 Lie 子群 (H,φ) 与(H_1,φ_1)等价，若存在Lie群同构$f:H\to H_1$，使得$\varphi=\varphi_1\circ f$．

等价的Lie子群将视为等同．G的任何Lie子群(H,φ)可等同于Lie子群$(\varphi(H),i)$，其中$\varphi(H)$具有由同构 $\varphi:H\to\varphi(H)$所诱导的Lie群结构，$i:\varphi(H)\subset G$（与 5.2.5对照）．7.1.2之4°所述的Lie 子群显然包括在7.4.1意义下的一般 Lie 子群概念之内．

关于 Lie 子群有一系列深刻的结论．首先，下面的结果是Lie 群论的基本定理之一．

7.4.2 定理 若(H,φ)是G的Lie 子群，则 φ_*(依7.2.5)将$\mathfrak{h}=\mathrm{Lie}(H)$同构地映到 $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G)$的子代数．

$$\varphi_*(\mathfrak{h})=\{X\in\mathfrak{h}\mid\forall t\in\mathrm{R}:\exp tX\in\varphi(H)\}. \qquad (1)$$

反之，任给$\mathfrak{h}$的子代数$\mathfrak{g}$，存在G的唯一连通 Lie 子群H，使得$\mathrm{Lie}(H)=\mathfrak{h}$．因此，$G$的连 通 Lie子群与$\mathfrak{g}$的子代数成一一对应．

证 定理的前一半(等式(1)除外)直接从7.2.5推出．今证

后半部分．取$\mathfrak{h}$的一组基$\{X_1,\cdots,X_k\}$，则$\{X_i\}$生成G上一k维对合分布E．设H是E过e的极大积分流形(5.9.4)，$i:H\subset G$，今证(H,i)是G的Lie子群且$\mathrm{Lie}(H)=\mathfrak{h}$．因$E$关于左平移不变，故$\forall a\in H$：$a^{-1}H$是$E$过$e$的连通积分流形，因此$a^{-1}H\subset H$，这表明$H$是$G$的子群．因$\beta:H\times H\to H,(x,y)\longmapsto xy$满足$i\circ\beta\in C^\infty$，故$\beta\in C^\infty$(5.9.5)，因此$(H,i)$是$G$的Lie子群．显然$\mathrm{Lie}(H)=\mathfrak{h}$．若$(H',\varphi)$亦是$G$的连通Lie子群，$\varphi_*(\mathrm{Lie}H')=\mathfrak{h}$，则$(H',\varphi)$必是$E$过$e$的积分流形，因此$\varphi(H')\subset H$．令$f:H'\to H,x\longmapsto\varphi(x)$，则$\varphi=i\circ f$，于是$f\in C^\infty$(5.9.5)，从而$f$为Lie群同构．这表明$(H',\varphi)$与$(H,i)$等价．

最后证明(1)式．任给$Y\in\mathfrak{h}$，$t\in\mathrm{R}$，由7.3.3有$\exp(t\varphi_*Y)=\varphi_*(\exp tY)\in\varphi(H)$．其次设$X\in\mathfrak{g}$，$\exp tX\in\varphi(H)$ ($\forall t\in\mathrm{R}$)．因(H,φ)是G上某个对合分布的积分流形，故5.9.5推出"$\mathrm{R}\to H,t\longmapsto\varphi^{-1}(\exp tX)$"是一Lie群同态，于是有$Y\in\mathfrak{h}$：$\varphi^{-1}(\exp tX)=\exp tY$，从而$X=\varphi_*(Y)\in\varphi_*(\mathfrak{h})$． □

若$f\in\mathrm{Hom}(G,H)$，则$\ker f$必为G的Lie子群(7.1.4，5.2.3)；$\forall X\in\mathfrak{g}$：$\exp tX\in\mathrm{Ker}f\Longleftrightarrow f(\exp tX)=\exp(tf_*X)=e$．于是(1)推出：

推论 若$f\in\mathrm{Hom}(G,H)$，则$\mathrm{Lie}(\mathrm{Ker}f)=\mathrm{Ker}f_*$．

注 依据Lie代数理论中的Ado定理，每个有限维Lie代数同构于Lie GL(n)（对适当大的n）的某个子代数，因此依7.4.2必为某个Lie群的Lie代数．

一个重要问题是：Lie群G的一子群在什么条件下为Lie子群？这由以下两个定理解答．

7.4.3 定理 若Lie群G的子群H上具有一微分结构，使得$i:H\subset G$是C^∞浸入，则(H,i)是G的Lie子群，且H上有以上性质的微分结构是唯一的．

证 左平移H_e的结果得到G上一k($=\dim H$)维分布E．

(H,i)必为E过e的积分流形. 否则，存在$a\in H$: $H_a\not\subset E_a$，从而有$X_1,\cdots,X_k\in E_a$, $X_0\in H_a$: $\{X_i\}_{i=0}^k$线性无关. 因$a^{-1}\cdot X_i\in H_e(1\leqslant i\leqslant k)$，故有$H$中的$C^\infty$曲线$\varphi_i$: $\varphi_i(0)=e$, $\dot\varphi_i(0)=a^{-1}\cdot X_i(1\leqslant i\leqslant k)$. 取$H$中的$C^\infty$曲线$\psi$: $\psi(0)=a$, $\dot\psi(0)=X_0$; 令$\varphi_0(t)=a^{-1}\psi(t)$，则$\varphi_0$是$G$中的$C^\infty$曲线，$\varphi_0(t)\in H$，$\varphi_0(0)=e$, $\dot\varphi_0(0)=a^{-1}X_0$. 定义

$$\varphi(t^0,t^1,\cdots,t^k)=\varphi_0(t^0)\cdots\varphi_k(t^k), \tag{2}$$

则φ是从R^{k+1}的某0-邻域到G中的C^∞映射，取值在H中，$\varphi(0)=e$，$\mathrm{rank}\varphi(0)=k+1$(参照上节(10)). 适当选取$G$在$e$处的坐标系可使$\varphi$有局部表示: $(t^0,\cdots,t^k)\longmapsto(t^0,\cdots,t^k,0,\cdots,0)$，由此易见$\varphi$可扩张为从$\mathrm{R}^n$的某0-邻域$U$到$e\in G$的邻域$V$的微分同胚$\phi$，使得$\phi(U\cap\mathrm{R}^{k+1})\subset H$. 于是$\phi^{-1}\circ i$: $H\cap V\to\mathrm{R}^n$是一C^∞浸入，但这与$\phi^{-1}(H\cap V)=U\cap\mathrm{R}^{k+1}$矛盾.

(H,i)是E过e的积分流形推出(H,λ_a)是E过$a(\forall a\in G)$的积分流形，这表明E是对合的. 于是如同证7.4.2一样可说明(H,i)是G的Lie子群.

若H上有两个微分结构$\Phi_j(j=1,2)$，使$H_j=(H,\Phi_j)$皆为G的Lie子群，则H_j都是某对合分布过e的积分流形，于是5.9.5推出1_H: $H_1\to H_2$是微分同胚. □

由此可见，若H是G的Lie子群，则H的群结构、拓扑结构及微分结构都是唯一确定的.

7.4.4 定理(E.Cartan) 设H是Lie群G的子群.则H是G的子流形$\Longleftrightarrow H$是G的闭子群.

证 设H是G的k维子流形，$\{a_j\}\subset H$, $a_j\to a\in G$. 取G的图(U,φ): $\varphi(e)=0$, $\varphi U=B^n(0,2)$, $\varphi(U\cap H)=B^k(0,2)\times 0^{n-k}$. 令$V=\varphi^{-1}(B^k(0,1)\times 0^{n-k})$，则$i,j$充分大时$a_i^{-1}a_j\in V$. 令$j\to\infty$得$a_i^{-1}a\in \bar V$，于是$a\in a_i\bar V\subset H$，$H$是闭的.

反之，设H是G的闭子群. 令

$$\mathfrak{h}=\{X\in\mathfrak{g}\mid\forall t\in\mathbf{R}:\exp tX\in H\}. \tag{3}$$

任给$X,Y\in\mathfrak{h}$，上节(6)推出$X+Y\in\mathfrak{h}$，由此易见$\mathfrak{h}$是$\mathfrak{g}$的子空间．若存在$0\in\mathfrak{g}$的邻域U与$e\in G$的邻域V，使得$\exp:U\to V$是微分同胚，$\exp(U\cap\mathfrak{h})=V\cap H$，令$\varphi=(\exp|U)^{-1}$，则$(V,\varphi)$是$G$的一个图，于是$(aV,\varphi\lambda_a^{-1})(a\in H)$是关于$(G,H)$的子流形图(5.2.1)，从而定理得证．若如上的$U,V$不存在，则有$0\in\mathfrak{g}$的邻域$W$及序列$\{x_k\}\subset H$：$x_k\to e$，$x_k\overline{\in}\exp(W\cap\mathfrak{h})$．设$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h}'$，则

$$\beta:\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}'\to G,(X,Y)\longmapsto\exp X\cdot\exp Y \tag{4}$$

是C^∞映射，且易见$\beta_*|\mathfrak{g}_0$是一同构．于是有$0\in\mathfrak{g}$的邻域$U\times U'\subset W(U\subset\mathfrak{h},U'\subset\mathfrak{h}')$，$e$的邻域$V$，使得$\beta:U\times U'\to V$是一微分同胚．不妨设$U'$可取得满足

$$H\cap\exp(U'\setminus 0)=\varnothing. \tag{5}$$

否则，存在$\{Y_k\}\subset(\mathfrak{h}'\setminus 0)\cap\exp^{-1}(H)$：$Y_k\to 0$．不妨设$\lambda_kY_k\to Y\in\mathfrak{h}'\setminus 0$，$\lambda_k\to\infty$．任给$t>0$，取$n_k\in\mathbf{Z}$：$n_k/\lambda_k\to t$，则

$$\exp tY=\lim_k\exp(n_kY_k)=\lim_k(\exp Y_k)^{n_k}\in H.$$

$t<0$时亦有$\exp tY=(\exp(-tY))^{-1}\in H$，可见$Y\in\mathfrak{h}$，而这与$\mathfrak{h}\cap\mathfrak{h}'=\{0\}$矛盾．因此可以假定(5)．不妨设$x_k=\exp X_k\exp Z_k\in V$，$X_k\in U$，$Z_k\in U'\setminus 0$．于是$\exp Z_k=(\exp X_k)^{-1}x_k\in H\cap\exp(U'\setminus 0)$，这又与(5)矛盾．因此定理得证． □

本节的结论特别应用于研究$\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$的子群．$\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$有以下重要闭子群（通常称为典型群）：

$$\mathrm{SL}(n,\mathbf{C})=\{a\in\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})\mid\det a=1\}\ \text{(特殊线性群)}; \tag{6}$$

$$\mathrm{U}(n)=\{a\in\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})\mid aa^*=e\}\ \text{(酉群)}, \tag{7}$$

其中a^*记a的共轭转置，即$a^*_{ij}=\bar{a}_{ji}$；

$$\mathrm{SU}(n)=\mathrm{SL}(n,\mathbf{C})\cap\mathrm{U}(n)\ \text{(特殊酉群)}; \tag{8}$$

$$\mathrm{SL}(n)=\mathrm{SL}(n,\mathbf{C})\cap\mathrm{GL}(n)\ \text{(实特殊线性群)}; \tag{9}$$

$$O(n)=U(n)\cap GL(n)\text{（正交群）};\tag{10}$$

$$SO(n)=SL(n)\cap O(n)\text{（特殊正交群）}.\tag{11}$$

其次设 $J=\begin{pmatrix}0 & -I\\ I & 0\end{pmatrix}$，$I$ 是 m 阶单位矩阵，则 $GL(2m,C)$ 有以下闭子群：

$$Sp(m,C)=\{a\in GL(2m,C)\mid a^tJa=J\}\text{（复辛群）};\tag{12}$$

$$Sp(m)=Sp(m,C)\cap U(2m)\text{（辛群）};\tag{13}$$

$$Sp(m,R)=Sp(m,C)\cap GL(2m)\text{（实辛群）}.\tag{14}$$

由7.4.4，(6)—(11)[(12)—(14)]是 $GL(n,C)[GL(2m,C)]$ 的 Lie 子群，其中(7)(8)(10)(11)(13)还是紧 Lie 群．现依(1)或(3)求出(6)—(14)的 Lie 代数．首先注意，直接依上节(7)有

$$b\cdot\exp a\cdot b^{-1}=\exp(bab^{-1}),\tag{15}$$

$$b\in GL(n,C),\ a\in M_n(C);$$

$$\exp a^*=(\exp a)^*,\ a\in M_n(C).\tag{16}$$

利用(15)及 $a\in M_n(C)$ 的Jordan标准形得出：

$$\det(\exp a)=\exp(\operatorname{tr}a),\tag{17}$$

其中 $\operatorname{tr}a=\sum a_{ii}$ 是 a 的迹．利用(17)得：$\det(\exp ta)\equiv 1\Longleftrightarrow \operatorname{tr}a=0$，于是依(3)有（约定 $SL(n,R)=SL(n)$）：

$$\operatorname{Lie}SL(n,K)=\{a\in M_n(K)\mid \operatorname{tr}a=0\},\ K=R,C.\tag{18}$$

其次，$\exp ta\cdot(\exp ta)^*\equiv e\Rightarrow \dfrac{d}{dt}(\exp ta\cdot\exp ta^*)\mid_{t=0}=0$

$$\Rightarrow a+a^*=0\Rightarrow \exp ta\cdot(\exp ta)^*\equiv e,$$

于是

$$\operatorname{Lie}U(n)=\{a\in M_n(C)\mid a+a^*=0\};\tag{19}$$

$$\operatorname{Lie}SU(n)=\{a\in M_n(C)\mid a+a^*=0,\ \operatorname{tr}a=0\};\tag{20}$$

$$\operatorname{Lie}O(n)=\operatorname{Lie}SO(n)=\{a\in M_n(R)\mid a+a^t=0\}.\tag{21}$$

用类似于得出(19)的方法可求得

$$\operatorname{Lie}Sp(m,C)=\{a\in M_{2m}(C)\mid a^tJ+Ja=0\};\tag{22}$$

从而 $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Sp}(m)=\{a\in M_{2m}(\mathrm{C})\,|a^tJ+Ja=0, a+a^*=0\}$；
(23)

$\mathrm{Lie}\,\mathrm{Sp}(m,\mathrm{R})=\{a\in M_{2m}(\mathrm{R})\,|a^tJ+Ja=0\}$. (24)

以上各子群的维数分别从其Lie代数之维数得出：

$\dim\mathrm{SL}(n,\mathrm{C})=2n^2-2$； $\dim\mathrm{U}(n)=n^2$；

$\dim\mathrm{SL}(n)=\dim\mathrm{SU}(n)=n^2-1$；

$\dim\mathrm{O}(n)=\dim\mathrm{SO}(n)=\frac{1}{2}n(n-1)$；

$\frac{1}{2}\dim\mathrm{Sp}(m,\mathrm{C})=\dim\mathrm{Sp}(m,\mathrm{R})=\dim\mathrm{Sp}(m)=2m^2+m$.

参考文献：[22], [31], [45], [83].

习 题

1. G的1维连通Lie子群必是某个$X\in\mathfrak{g}\setminus 0$的过$e$的积分曲线。
2. 若H是连通Lie群G的真Lie子群，则$\dim H<\dim G$.
3. 若$f\in\mathrm{Hom}(H,G)$是单同态且为开映射，H连通，则$f(H)$是G的闭子群.
4. Lie O(3)同构于$(R^3,\times)$，$\times$是通常的向量积。
5. U(n)与$S^1\times\mathrm{SU}(n)$微分同胚；SO(2)与S^1同构。

§5 Lie 群作用

7.5.1 定义 称一C^∞映射$\theta:G\times M\to M$为Lie群G对流形M的Lie群作用(或说G是M的"Lie 变换群")，若$\forall a,b\in G$，$x\in M$：$\theta(a,\theta(b,x))=\theta(ab,x)$，$\theta(e,x)=x$.

以下设$\theta\in C^\infty(G\times M,M)$是给定的Lie群作用. 约定$\theta(a,x)$可依方便交替地写作$ax$，$\theta_a(x)$或$\theta_x(a)$，相应地有映射$\theta_a:M\to M$，$x\longmapsto ax$（$a\in G$固定）与$\theta_x:G\to M$，$a\longmapsto ax$($x\in M$固定). 直接从7.5.1看出，$G\to\mathrm{Diff}(M)$，$a\longmapsto\theta_a$是一群同态；当它为单同态（即$\theta_a=1_M\Rightarrow a=e$）时，称$\theta$为**有效作用**，此时可认定$G\subset\mathrm{Diff}(M)$. 当某个（从而每个）$\theta_x(x\in M)$为满射时称$\theta$为可

迁作用，且称M为关于G的齐次流形．当每个$\theta_x(x\in M)$为单射时称θ为自由作用．任给$x\in M$，称$\theta_x(G)$为θ过x的轨道；互不相交的轨道之全体构成轨道空间M/G．

5.7.3意义下的流$\theta:\mathrm{R}\times M\to M$正是R对$M$的Lie群作用（"单参数群作用"），其轨道就是$\theta$的生成子$X$的积分曲线之轨迹．$\mathrm{GL}(n)\times\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^n,(a,x)\longmapsto ax$是有效Lie群作用的典型例子．若$H$是$G$的Lie子群，则$H\times G\to G,(a,b)\longmapsto ab$是一自由作用，其轨道空间就是$H$在$G$中的右陪集空间．特别，$G$是$G$自身的Lie变换群．可见"变换群"观点有普遍意义．

在以下两个定理中，$\mathfrak{g}$记G上的右不变向量场所成之Lie代数，它的构成与性质与Lie(G)完全类似，无需细述．任给$X\in\mathfrak{g}$，$\sigma^X(t,x)=\theta(\exp tX,x)$是$M$上的流，称其生成子$\tilde{X}$为$X$决定的Killing向量场，以$\tilde{\mathfrak{g}}$记$M$上的Killing向量场之全体．

7.5.2 定理 $\mathfrak{g}\to\tilde{\mathfrak{g}}$，$X\longmapsto\tilde{X}$是一Lie代数同态；若$\theta$为有效作用，则上述同态是同构．

证 任给$X\in\mathfrak{g},a\in G,x\in M$，有

$$\tilde{X}_x=\frac{d}{dt}\theta_x(\exp tX)|_{t=0}=\theta_{x*}(X_e);\tag{1}$$

$$\tilde{X}_{ax}=(\theta_{ax})_*(X_e)=(\theta_x\circ\rho_a)_*(X_e)=\theta_{x*}(X_a).\tag{2}$$

(1)表明$X\longmapsto\tilde{X}$是线性映射；(2)表明$X\overset{\theta_x}{\sim}\tilde{X}$，结合(1)与5.7.9推出$X\longmapsto\tilde{X}$是一Lie代数同态．若$\theta$是有效作用，$\tilde{X}=0$，则$\exp tX\cdot x=x(t\in\mathrm{R},x\in M)$，这推出$X=0$． □

7.5.3 定理 设G是连通Lie群，$\omega\in\mathscr{T}(M)$，则ω是G-不变的（即$\forall a\in G:\theta_{a*}\omega=\omega$）$\Longleftrightarrow\forall X\in\mathfrak{g}:L_{\tilde{X}}\omega=0$．

证 设ω G-不变，$X\in\mathfrak{g},x\in M$，则依6.3.7有：

$$(L_{\tilde{X}}\omega)_x=\frac{d}{dt}[(\theta_{\exp tX})^*\omega_{\exp tX.x}]|_{t=0}=\frac{d}{dt}\omega_x=0.$$

反之，若$L_{\tilde{X}}\omega=0(X\in\mathfrak{g})$，则从§6.3(11)推出

$$(\theta_{\exp tX})^*\omega_{\exp tX.x}=\omega_x(t\in\mathrm{R},x\in M).$$

于是对邻近 e 的 a 有 $\theta_a^*\omega_{ax}=\omega_x$. 再利用 7.3.1 之推论得出，$\forall a\in G:\theta_a^*\omega_{ax}=\omega_x$，即 ω 是 G-不变的． □

推论 $X\in\mathscr{X}(G)$左不变$\Longleftrightarrow$任给G的右不变向量场Y：$[X,Y]=0$；若G是Abel群，则Lie(G)是Abel Lie代数．

在群作用理论中，可迁作用及相应的齐次流形有特殊的重要性．下面的 7.5.5 是关于可迁作用的一个基本结果，它的证明基于以下定理．

7.5.4 定理 设H是G的闭子群, G/H记左(或右)陪集空间，$p:G\to G/H$是投影．则G/H上存在唯一微分结构，使得$p\in C^\infty$，且对任给$\bar{a}\in G/H$，存在$\bar{a}$的某邻域W上的"C^∞截面"$\sigma\in C^\infty(W,G):p\circ\sigma=1_W$．若$H$是$G$的闭正规子群，则$G/H$是一Lie群，且 Lie$(G/H)\cong\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$，其中$\mathfrak{g}=Lie(G)$，$\mathfrak{h}=Lie(H)$，$\mathfrak{h}$ 必是 $\mathfrak{g}$ 中的理想．

证 只对左陪集空间进行证明．依 7.4.2，$\mathfrak{h}$ 决定G上一$n-k(=\dim H)$维对合分布E.取G在e处的坐标系(U,φ,x^i), 使得$\varphi(e)=0,\varphi U=(-1,1)^n$,方程组$x^i=c^i(1\leqslant i\leqslant k,|c^i|<1)$所给出的层是$E$在$U$内的积分流形（参看5.9.2)．$S_0=H\cap U$是$E$在$U$内过$e$的积分流形．取$0<\delta<\varepsilon$，令$V=\varphi^{-1}(-\delta,\delta)^n,V_1=\varphi^{-1}(-\varepsilon,\varepsilon)^n$，使得$V^{-1}V\subset V_1,V_1V_1\subset U$．记$\bar{a}=p(a)$ $(a\in G)$．若$a,b\in V,\bar{a}=\bar{b}$,则$a^{-1}b\in S_0\cap V_1$．因$a(S_0\cap V_1)$是E在U内的连通积分流形（只要ε取得足够小就必定如此），它必含于某一层(5.9.3)，于是a,b属于V内的同一层；反之，每一层显然含于某个左陪集中．

令$S_1=\{x\in V\,|\varphi(x)=(x^1,\cdots,x^k,0,\cdots,0)\}$，$W=pV$.定义

$$\psi: W \to \varphi V \cap \mathrm{R}^k,\ \tilde{a} \longmapsto \varphi(a)(a \in S_1), \tag{3}$$

则$\psi^{-1} = p \circ (\varphi|S_1)^{-1}$是连续开映射，于是$\psi: W \to \psi W$是一同胚，$\sigma = \varphi^{-1} \circ \psi: W \to G$满足$p \circ \sigma = 1_W$.

任给$a \in G$，令$L_a: G/H \to G/H$, $\tilde{x} \longmapsto \widetilde{ax}$，则$L_a$是一同胚。令$W_a = L_a W$, $\psi_a = \psi \circ L_a^{-1}$，今指明图册$\{(W_a, \psi_a) | a \in G\}$定义$G/H$为一$k$维流形．首先，$\psi_a: W_a \to \varphi V \cap \mathrm{R}^k$是一同胚．其次，若$y \in \psi_b(W_a \cap W_b)$，则$L_{a^{-1}b}\psi^{-1}(y) \in W$，于是有$c \in H$: $a^{-1}b\varphi^{-1}(y)c \in V$．取$y$的邻域$A$: $a^{-1}b\varphi^{-1}(A)c \subset V$，则

$$\psi_a \psi_b^{-1} | A = \pi \circ \varphi \circ \rho_c \circ \lambda_a^{-1} \circ \lambda_b \circ (\varphi^{-1} | A) \in C^\infty,$$

其中$\pi: \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^k$是投影．这表明$\psi_a \psi_b^{-1} \in C^\infty$.

任给$a \in G$, $(aV, \varphi \circ \lambda_a^{-1})$是$G$的一个图，$\psi_a \circ p \circ (\varphi \lambda_a^{-1})^{-1} = \psi \circ p \circ \varphi^{-1}$是$\mathrm{R}^n$中的投影，由此可见$p \in C^\infty$．其次，令$\sigma_a = \lambda_a \circ \sigma \circ L_a^{-1}$，则$\sigma_a = \lambda_a \circ \varphi^{-1} \circ \psi_a \in C^\infty(W_a, G)$，$p \circ \sigma_a = p \circ \lambda_a \circ p^{-1} \circ p \circ \sigma \circ L_a^{-1} = L_a \circ L_a^{-1} = \mathrm{id}$，$\sigma_a$是所要的$C^\infty$截面．

若G/H上有另一合于定理要求的微分结构，相应的流形记作$(G/H)_1$，则$\mathrm{id}: G/H \to (G/H)_1$局部地是投影$p$与$C^\infty$截面之复合，从而是一微分同胚．

若H是G的闭正规子群，则商群G/H中的乘法$(\tilde{a}, \tilde{b}) \longmapsto \tilde{a}\tilde{b}$局部地可分解为:

$$(\tilde{a}, \tilde{b}) \stackrel{\sigma_a \times \sigma_b}{\longmapsto} (x, y) \longmapsto xy \stackrel{p}{\longmapsto} \widetilde{xy} = \tilde{a}\tilde{b},$$

从而是C^∞的，因此G/H是 Lie 群．$p: G \to G/H$是满同态推出$p_*: \mathfrak{g} \to \mathrm{Lie}(G/H)$是满同态(7.2.5)，于是

$$\mathrm{Lie}(G/H) \cong \mathfrak{g}/\mathrm{Ker}p_* = \mathfrak{g}/\mathrm{Lie}(\mathrm{Ker}p) = \mathfrak{g}/\mathfrak{h},$$

其中用到1.5.6及7.4.2之推论． □

在7.5.4的条件下,

$$G \times G/H \to G/H, (a, \tilde{x}) \longmapsto \widetilde{ax} \tag{4}$$

是一可迁的Lie 群作用，从而G/H是关于G的齐次流形．下面

指明，所有齐次流形都可如此得到.

7.5.5 定理 设$\theta: G\times M\to M$是可迁的Lie群作用,$x_0\in M$, $H=\{a\in G \mid ax_0=x_0\}$. 则$H$是$G$的闭子群（称为$x_0$的"迷向子群"），$f: G/H\to M$, $aH\longmapsto ax_0$是一微分同胚.

证 H显然是G的闭子群. $\forall a,b\in G$: $aH=bH\Longleftrightarrow a^{-1}b\in H\Longleftrightarrow ax_0=bx_0$，可见$f$定义合理且为双射. 设$p: G\to G/H$是投影，则$f\circ p=\theta_{x_0}\in C^\infty$. 由7.5.4，$f$局部地是$f\circ p$与某个"$C^\infty$截面"的复合，故$f\in C^\infty$. 由$f(aH)=\theta_a\theta_{x_0}(e)$推出$\operatorname{rank}f(aH)=\operatorname{rank}\theta_{x_0}(e)$；由$H=\theta_{x_0}^{-1}(x_0)$及5.2.3推出$\operatorname{rank}f=\operatorname{rank}\theta_{x_0}=\operatorname{codim}H=\dim(G/H)$. 因$f$是双射，故它必为微分同胚. □

考虑某些具体应用. 设$n\geqslant 2$，则

$$\mathrm{SO}(n)\times S^{n-1}\to S^{n-1},\ (a,x)\longmapsto ax \tag{5}$$

是一可迁作用. 令$e_1=(1,0,\cdots,0)\in\mathbf{R}^n$，任给$a\in\mathrm{SO}(n)$，易见

$$ae_1=e_1\Longleftrightarrow a=\begin{pmatrix}1&0\\0&b\end{pmatrix},\ b\in\mathrm{SO}(n-1).$$

于是$H=\{a\in\mathrm{SO}(n)\mid ae_1=e_1\}\cong\mathrm{SO}(n-1)$，因而7.5.5推出：

$$\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1)\cong S^{n-1}, \tag{6}$$

(6)中$\cong$表示微分同胚. 用类似的方法可得到：

$$\mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-1)\cong S^{n-1}; \tag{7}$$

$$\mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(n-1)\cong\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SU}(n-1)\cong S^{2n-1}. \tag{8}$$

由(6)(8)特别得到$S^1\cong\mathrm{SO}(2)$, $S^3\cong\mathrm{SU}(2)$，这是仅有的两个存在Lie群结构的球面.

以上结论可用来阐明典型群的连通性.

7.5.6 定理 设$n\geqslant 1$,则$\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$及$\mathrm{SO}(n)$是连通的；$\mathrm{GL}(n)$与$\mathrm{O}(n)$恰有两个分支.

证 $\mathrm{U}(1)$, $\mathrm{SU}(1)$, $\mathrm{SO}(1)$显然连通，于是$\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$与$\mathrm{SO}(n)$的连通性由(6)(8)及7.1.5归纳地推出.

令 $a=\mathrm{diag}(-1,1,\cdots,1)\in \mathrm{O}(n)$，则不难看出 $\mathrm{SO}(n)$ 与 $a\cdot\mathrm{SO}(n)$是$\mathrm{O}(n)$的两个分支．类似地，$\mathrm{GL}(n)$有分解：$\mathrm{GL}(n)=G^+\cup aG^+$，其中$G^+=\{b\in \mathrm{GL}(n)\mid \det b>0\}$．今证 G^+连通．任取$x\in G^+$，因xx^t是正定对称的，故有正定对称矩阵y：$y^2=xx^t$（参考4.7.7之推论）．令$z=y^{-1}x$，则$z\in \mathrm{SO}(n)$，$\varphi(t)=[te+(1-t)y]z(0\leqslant t\leqslant 1)$是$G^+$中的连续曲线，$\varphi(0)=x$，$\varphi(1)=z$．于是从$\mathrm{SO}(n)$连通推出$G^+$连通，$G^+$与$aG^+$是$\mathrm{GL}(n)$的两个分支．

用类似的方法可证$\mathrm{GL}(n,\mathrm{C})$连通． □

参考文献：[12]，[22]，]31]，[45]，[69]，[82]，[83]．

习　题

1．任给$x,y\in S^{2n-1}=\{z\in \mathrm{C}^n \mid |z|=1\}$，若$\exists\lambda\in \mathrm{C}$：$|\lambda|=1$，$x=\lambda y$，则约定 $x\sim y$，令 $\mathrm{CP}^{n-1}=S^{2n-1}/\sim$，则 CP^{n-1} 可定义为$2(n-1)$维流形（复投影空间），使得 $\mathrm{SU}(n)\times \mathrm{CP}^{n-1}\to \mathrm{CP}^{n-1}$，$(a,\tilde{x})\longmapsto\widetilde{ax}$是可迁作用，$\widetilde{ae_1}=\tilde{e}_1\Longleftrightarrow a=\begin{pmatrix}\overline{\det b} & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$，$b\in \mathrm{U}(n-1)$，由此推出 $\mathrm{CP}^{n-1}\cong \mathrm{SU}(n)/\mathrm{U}(n-1)$．类似地定义实投影空间$\mathrm{RP}^{n-1}$并建立$\mathrm{RP}^{n-1}\cong \mathrm{SO}(n)/\mathrm{O}(n-1)$．

2．以$G_k(\mathrm{R}^n)$记R^n的k维子空间之全体，则$G_k(\mathrm{R}^n)$上可定义一微分结构，使得$\mathrm{O}(n)\times G_k(\mathrm{R}^n)\to G_k(\mathrm{R}^n)$，$(a,A)\mapsto aA$是一可迁Lie群作用，$a\mathrm{R}^k=\mathrm{R}^k\Longleftrightarrow a=\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & c\end{pmatrix}$，$b\in \mathrm{O}(k)$，$c\in \mathrm{O}(n-k)$．由此推出$G_k(\mathrm{R}^n)\cong \mathrm{O}(n)/[\mathrm{O}(k)\times \mathrm{O}(n-k)]$．$G_k(\mathrm{R}^n)$称为Grassman流形．

§6　离散群作用与覆盖流形

设离散群 $D=\{d_0,d_1,\cdots\}(d_0=e)$有效地作用于流形$M$，不妨直接认定$D\subset \mathrm{Diff}(M)$；$p$：$M\to M/D$记投影映射．

7.6.1 定义　若(i)每个$x\in M$有一邻域U，使得$U\cap d_nU=\varnothing(n>0)$；(ii)当$x,y\in M$，$p(x)\neq p(y)$时，存在$x$的邻域$U$与$y$的邻域$V$，使得$U\cap d_nV=\varnothing(n\geqslant 0)$，则称$D$对$M$的作用是纯

不连续的.

若x,U如7.6.1之(i),则$d_nU\cap d_mU\neq\varnothing\Rightarrow U\cap d_n^{-1}d_mU\neq\varnothing\Rightarrow d_m=d_n$. 可见轨道$\{d_nx\}$中各点被互不相交的邻域$d_nU$分离，这也说明纯不连续作用是自由的.

7.6.2 定理 若D纯不连续地作用于M,则轨道空间M/D上存在唯一微分结构，使得每个$p(x)\in M/D$有一邻域U：p将$p^{-1}U$的每个分支微分同胚地映到U上；特别，p是局部微分同胚.

证 M/D上采用商拓扑(1.5.4). 易见$p:M\to M/D$是开映射，从而M/D是第二可数的. 设x,y,U,V如7.6.1之(ii)，则$p^{-1}(pU\cap pV)=(p^{-1}pU)\cap(p^{-1}pV)=\bigcup\limits_{m,n}(d_mU\cap d_nV)=\varnothing$, 于是$pU$与$pV$分离$p(x)$与$p(y)$，可见$M/D$是$T_2$空间.

任给$x\in M$，取x处的图(U,φ)，使U连通且满足7.6.1之条件(i)，令$U^*=pU$. $\forall a,b\in U:p(a)=p(b)\Rightarrow\exists n\geqslant0:b=d_na\in U\cap d_nU\Rightarrow n=0,a=b$. 于是$p:U\to U^*$是一开的连续双射，从而为同胚. 令$\varphi^*=\varphi\circ(p|U)^{-1}$. 若$(V^*,\psi^*)$的构成如同$(U^*,\varphi^*)$,$y\in U,p(y)\in U^*\cap V^*$，则$\exists n$: $y\in d_nV$，在$\varphi(y)$邻近

$$\psi^*(\varphi^*)^{-1}=\psi\circ(p|V)^{-1}\circ(p|U)\circ\varphi^{-1}=\psi\circ d_n^{-1}\circ\varphi^{-1}\in C^\infty,$$

从而$\psi^*(\varphi^*)^{-1}\in C^\infty$.因此,形如$(U^*,\varphi^*)$的图定义出$M/D$上一微分结构. 显然$\{d_nU\}$是$p^{-1}U^*$的分支之全体；$\forall n\geqslant0:p|d_nU=(\varphi^*)^{-1}\circ\varphi\circ d_n^{-1}:d_nU\to U^*$是微分同胚. 条件"$p$为局部微分同胚"唯一决定了$M/D$的微分结构. □

7.6.3 定理 设D是Lie群G的离散子群.则D是闭子群，$D\times G\to G,(d_n,x)\longmapsto d_nx$是纯不连续的群作用，$G/D$上依7.6.2决定的微分结构重合于依7.5.4决定的微分结构. 若D是正规子群，则G/D是Lie群，$\mathrm{Lie}(G/D)=\mathrm{Lie}(G)$.

证 因e是D的孤立点，故有e在G中的邻域$W,W_1=$

$WW^{-1}, D\cap W_1=\{e\}$．任给 $x\in G$，令$U=Wx$，则 $U\cap d_nU=(W\cap d_nW)x=\varnothing(n>0)$．若$x,y\in G, yx^{-1}\bar{\in} D$，取 e 在G中的邻域 W：$(yWW^{-1}x^{-1})\cap D=\varnothing$，令$U=xW$，$V=yW$，则 $\forall n\geqslant 0$：$V\cap d_nU=\varnothing$(否则有$a,b\in W$：$yb=d_nxa$，于是$d_n=yba^{-1}x^{-1}\in(yWW^{-1}x^{-1})\cap D$！)．可见$D$纯不连续地作用于$G$，$D=p^{-1}p(e)$是闭的．其余结论直接从7.5.4与7.6.2得出． □

与离散群作用密切相关的是覆盖流形概念．

7.6.4 定义 设$\tilde{M}$与M是两个连通流形，$p\in C^\infty(\tilde{M},M)$．若每个$x\in M$有一"容许邻域"$U$，使得$p$将$p^{-1}U$的每个分支微分同胚地映到$U$上，则称$\tilde{M}$或$(\tilde{M},p)$为$M$的覆盖流形，称$p$为（覆盖）投影；若$h\in \mathrm{Diff}(\tilde{M})$满足$p\circ h=p$，则称$h$为$(\tilde{M},p)$的一个自同构，以$\mathrm{Aut}\tilde{M}$记$(\tilde{M},p)$的全体自同构所构成的群．

以下是本节的基本结果．

7.6.5 定理 若离散群$D=\{d_0,d_1,\cdots\}(d_0=e)$纯不连续地作用于连通流形$\tilde{M}$，$p:\tilde{M}\to\tilde{M}/D$是投影，则$(\tilde{M},p)$是$\tilde{M}/D$的覆盖流形，且$\mathrm{Aut}\tilde{M}=D$．反之，若$(\tilde{M},p)$是$M$的覆盖流形，则$D=\mathrm{Aut}\tilde{M}$是可数群，它纯不连续地作用于$\tilde{M}$；若$D$可迁地作用于每个$p^{-1}(x)(x\in M)$，则$\tilde{M}/D$自然地微分同胚于$M$．

证 对于定理前一半，只需证$\mathrm{Aut}\tilde{M}\subset D$．取定$h\in \mathrm{Aut}\tilde{M}$，$\tilde{x}_0\in\tilde{M}$．由$ph(\tilde{x}_0)=p(\tilde{x}_0)$推出$\exists\, n$：$h(\tilde{x}_0)=d_n\tilde{x}_0$，于是$k=d_n^{-1}h\in \mathrm{Aut}\tilde{M}$，$k(\tilde{x}_0)=\tilde{x}_0$，$\tilde{W}=\{\tilde{x}\mid k(\tilde{x})=\tilde{x}\}$是非空闭集．$\forall\tilde{x}\in\tilde{W}$，取$\tilde{x}$的邻域$\tilde{U}$，使$p|\tilde{U}$是单射，再取$\tilde{x}$的邻域$\tilde{V}\subset\tilde{U}$：$k\tilde{V}\subset\tilde{U}$．$\forall\tilde{y}\in\tilde{V}$：$pk(\tilde{y})=p(\tilde{y})\Rightarrow k(\tilde{y})=\tilde{y}$，可见$\tilde{V}\subset\tilde{W}$，$\tilde{W}$是开集．于是$\tilde{W}=\tilde{M}$，从而$k=d_0$，$h=d_n\in D$．

其次证定理后一半．取定$x\in M$，由7.6.4及$\tilde{M}$的第二可数性推出$p^{-1}(x)$是可数集，设为$\{\tilde{x}_0,\tilde{x}_1,\cdots\}$．从前段证明看出$D=\mathrm{Aut}\tilde{M}$对$\tilde{M}$的作用是自由的，因此每个$d\in D$完全由$d\tilde{x}_0$决定；

而$d\tilde{x}_0\in p^{-1}(x)$，可见$D$是可数集，设为$\{d_0,d_1,\cdots\}$，$d_0=\mathrm{id}$.
设$p(\tilde{y})=y\neq z=p(\tilde{z})(\tilde{y},\tilde{z}\in\tilde{M})$，取$y$，$z$的互不相交的容许邻域$U,V$，设$\tilde{U},\tilde{V}$分别为$p^{-1}U$与$p^{-1}V$的含$\tilde{y}$与$\tilde{z}$的分支．则$\forall n>0$：$\tilde{U}\cap d_n\tilde{U}=\varnothing$($\tilde{a}=d_n\tilde{b}\in\tilde{U}\cap d_n\tilde{U}\Rightarrow p(\tilde{a})=p(\tilde{b})\Rightarrow\tilde{a}=\tilde{b}=d_n\tilde{b}\Rightarrow n=0$)；$\forall n\geqslant 0$：$\tilde{U}\cap d_n\tilde{V}=\varnothing$($\tilde{a}=d_n\tilde{b}\in\tilde{U}\cap d_n\tilde{V}\Rightarrow p(\tilde{a})=p(\tilde{b})\in U\cap V$!)．这表明$D$纯不连续地作用于$\tilde{M}$．设$q:\tilde{M}\to\tilde{M}/D$为投影．$D$在每个$p^{-1}(x)$上可迁意味着$p(\tilde{x})=p(\tilde{y})\Longleftrightarrow q(\tilde{x})=q(\tilde{y})(\tilde{x},\tilde{y}\in\tilde{M})$，于是$f:\tilde{M}/D\to M,q(\tilde{x})\longmapsto p(\tilde{x})$是一双射，$f\circ q=p,f^{-1}\circ p=q$．因$p$，$q$是局部微分同胚，故$f$是微分同胚．　□

结合7.6.3得到：

推论　若D是连通Lie群G的离散子群，则G是右陪集空间G/D的一个覆盖流形．

例如，R^n是$\mathrm{T}^n=\mathrm{R}^n/\mathrm{Z}^n$的覆盖流形．

7.6.6 定理　设G,H是连通Lie群，$p\in\mathrm{Hom}(G,H)$．则以下条件互相等价：(i)(G,p)是H的覆盖流形；(ii)$p_*:G_*\cong H_*$；(iii)$p(G)=H$，$D=\mathrm{Ker}\ p$是G的离散子群．

证　显然(i)⇒(ii)⇒(iii)（参考7.1.8）．今假定(iii)．则G/D是一Lie群(7.6.3)，(G,q)是G/D的覆盖流形（7.6.5之推论），其中$q:G\to G/D$是通常的投影．因$f:G/D\to H$，$q(x)\longmapsto p(x)$是拓扑群同构(1.5.6)，故依7.3.4必为Lie群同构．因此(G,p)是H的覆盖流形．　□

关于覆盖流形的更深入的结果基于单连通概念．简单说来，一连通空间称为单连通的，若其中任何闭路可经连续变形缩为一点．准确定义参看[83]．利用代数拓扑方法可证明（参看[83]）：

7.6.7 定理　每个连通流形必有单连通的覆盖流形；若$(\tilde{M},p)$是M的覆盖流形，N是一单连通流形，$f\in C(N,M)$，

$f(y_0)=x_0=p(\tilde{x}_0)$，则存在唯一 $\tilde{f}\in C(N,\tilde{M})$，使得 $p\circ\tilde{f}=f$，$\tilde{f}(y_0)=\tilde{x}_0$；若$(\tilde{M},p)$是单连通流形$M$的覆盖流形，则必定 $p\in \mathrm{Diff}(\tilde{M},M)$．

现在利用7.6.7来证明Lie群论的两个重要结果．

7.6.8 定理 若G是连通Lie群，则有单连通 Lie 群$\tilde{G}$与$p\in \mathrm{Hom}(\tilde{G},G)$，使$(\tilde{G},p)$是$G$的覆盖流形．

证 取G的单连通覆盖流形$(\tilde{G},p)$，定义

$$f:\tilde{G}\times\tilde{G}\to G,(\tilde{x},\tilde{y})\longmapsto p(\tilde{x})(p(\tilde{y}))^{-1}, \tag{1}$$

取定$\tilde{e}\in p^{-1}(e)$．因$\tilde{G}\times\tilde{G}$是单连通的，依7.6.7，存在唯一 $\tilde{f}\in C(\tilde{G}\times\tilde{G},\tilde{G})$：$p\circ\tilde{f}=f$，$\tilde{f}(\tilde{e},\tilde{e})=\tilde{e}$．定义$\tilde{x}^{-1}=\tilde{f}(\tilde{e},\tilde{x})$，$\tilde{x}\tilde{y}=\tilde{f}(\tilde{x},\tilde{y}^{-1})$ $(\tilde{x},\tilde{y}\in\tilde{G})$．则$\tilde{e}^{-1}=\tilde{e}$．令$\varphi:\tilde{G}\to\tilde{G}$，$\tilde{x}\longmapsto\tilde{x}\tilde{e}$，则$p\circ\varphi=p$，$\varphi(\tilde{e})=\tilde{e}$．依7.6.7，必$\varphi=\mathrm{id}$，从而$\tilde{x}\tilde{e}=\tilde{x}$．类似地可证$\tilde{e}\tilde{x}=\tilde{x}$，$\tilde{x}\tilde{x}^{-1}=\tilde{x}^{-1}\tilde{x}=\tilde{e}$，$(\tilde{x}\tilde{y})\tilde{z}=\tilde{x}(\tilde{y}\tilde{z})$，于是$\tilde{G}$成为一个群．从

$$p(\tilde{x}\tilde{y})=p\tilde{f}(\tilde{x},\tilde{y}^{-1})=f(\tilde{x},\tilde{y}^{-1})=p(\tilde{x})p(\tilde{y})$$

推出p为同态．因p为局部微分同胚而$f\in C^\infty$，故从$p\tilde{f}=f$推出$\tilde{f}\in C^\infty$，因而$\tilde{G}$是一Lie群．□

7.6.9 定理 设G,H是Lie群，G是单连通的，$\varphi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$是Lie代数同态．则有唯一$f\in\mathrm{Hom}(G,H)$：$\varphi=f_*$．

证 取$\mathfrak{h}^*$的一组基$\{\theta^i\}$，设φ^*是φ（看作线性映射）的对偶，$p:G\times H\to G$与$q:G\times H\to H$是投影．如同在7.2.6中一样，$\{(p^*\varphi^*-q^*)\theta^i\}$生成$G\times H$上一微分理想$I$．不难从7.4.2推出，$I$过$(e,e)\in G\times H$的极大积分流形$A$是$G\times H$的Lie子群，$\dim A=\dim G$．由6.4.5，$p|A$是一浸入；由7.6.6，$(A,p|A)$是$G$的覆盖流形；由7.6.7，$p|A\in\mathrm{Diff}(A,G)$．于是$f=q\circ(p|A)^{-1}\in\mathrm{Hom}(G,H)$．由6.4.5的证明看出$f^*\theta^i=\varphi^*\theta^i$，故$\varphi=f_*:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$．$f$的唯一性从7.2.6推出．□

若7.6.9中的G,H都是单连通的，φ是一Lie代数同构，则(G,f)是H的覆盖流形(7.6.6)，于是从7.6.7推出$f:G\cong H$．

这就得到：

推论 若G, H是单连通Lie群，则$G\cong H\Longleftrightarrow \mathfrak{g}\cong\mathfrak{h}$.

以上结论与7.6.8及7.4.2后面的注结合起来，导致Lie群论的基本结论：

7.6.10 定理 单连通Lie群之全体与有限维Lie代数之全体成一一对应.

参考文献：[12], [22], [31], [83].

习 题

1. 设a: $S^n\to S^n$, $x\mapsto -x$, 则$D=\{id, a\}$纯不连续地作用于S^n, $S^n/D\cong RP^n$（参看§5习题1），由此推出S^n是RP^n的覆盖流形.

2. 设$G=(0,\infty)\times R$，群运算定义如§2(7)，则Lie(G)是唯一的2维非Abel的Lie代数，因而G是唯一的2维单连通非Abel的Lie群.

3. 设G是单连通Lie群，H是连通Lie群，则Lie(G) = Lie$(H)\Longleftrightarrow G$是H的覆盖流形$\Longleftrightarrow H\cong G/D$, D是G的离散正规子群. 因此，确定所有以Lie(G)为Lie代数的连通Lie群归结为确定G的所有离散正规子群.

第八章 Fourier分析

经典Fourier 分析肇源于周期函数的Fourier 展开问题，它在其近代发展中演变成愈来愈一般的形式，所讨论的函数通常定义在 $\mathbf{R}^n$ 甚或某个抽象的局部紧群上，取值则可能在某个B-空间中；经典的Fourier 级数与Fourier 变换概念在更系统的形式下得到处理，且最终归并于一个统一的概念．

约定．字母 E, E_1, E_2 等记复 B-空间；G 记第二可数的局部紧群，e 记其单位元，$\lambda_a, \rho_a (a\in G)$ 记G 中的左、右平移，任给定义于G 上的函数 f，令 $\check{f}(x)=f(x^{-1})$, ${}_af=\lambda_a f=f\circ\lambda_a$, $f_a=\rho_a f=f\circ\rho_a$．对于加群则是 $\check{f}(x)=f(-x)$, $f_a=\tau_a f=f\circ\tau_a$, $\tau_a=\lambda_a$．$\mathbf{T}^n$上的函数总看作 $\mathbf{R}^n$上对各变元有周期 2π 的函数，相应地$\mathbf{T}^n$当作加群处理．

§1 Haar测度与不变积分

8.1.1 定义 设μ是G上一不恒为零的正则测度，$\forall a\in G$, $A\in\mathscr{B}$（$\mathscr{B}$记G 的 Borel 子集之全体）：$\mu A=\mu(aA)$ $[\mu A=\mu(Aa)]$，则称μ为G上的左[右]Haar测度．

左、右 Haar 测度之间有一简单的转换关系：令 $\check{\mu}(A)=\mu(A^{-1})$ $(A\in\mathscr{B})$，则μ是左Haar测度$\Longleftrightarrow\check{\mu}$是右Haar测度．以下不妨只考虑左Haar测度，且就叫Haar测度．

$\mathbf{R}^n$上的 Lebesgue 测度、$\mathbf{T}^n$ 的标准体积元所决定的测度（亦称 Lebesgue 测度）及离散群（如$\mathbf{Z}^n$）上的计数测度是 Haar 测度

的标准例子．对于乘法群$R^* = R\setminus 0$，任给Borel 集$A\subset R^*$，令$\mu A = \int_A |x|^{-1} dx$，则$\mu$是Haar测度：

$$\mu(aA) = \int_{aA} \frac{dx}{|x|} = \int_A \frac{|a|\,dx}{|ax|} = \mu A.$$

若λ是G上的Haar测度，则λ决定一不变积分（亦称Haar积分）：任给$f\in L^1(G,E,\lambda)$，$a\in G$，成立

$$\int {}_a f d\lambda = \int f d\lambda. \tag{1}$$

(1)显然对简单函数f成立，从而亦对非负可测函数f成立(用Levi定理）．设$f\in L^1(G,E,\lambda)$，$\|f-g\|_1<\varepsilon$，g是简单函数，则利用已指明的结论得

$$\left\|\int ({}_a f - f) d\lambda\right\| \leqslant \|{}_a f - {}_a g\|_1 + \|g-f\|_1 = 2\|f-g\|_1 < 2\varepsilon,$$

这推出(1)．反之，若λ是G上的非零正则测度，(1)对每个$f\in C_c(G)$成立，则不难利用§3.4(2)推出λ是Haar测度．可见Haar测度与不变积分实质上是等价的概念．

8.1.2 定理　任何局部紧群G上存在Haar测度，且如不计常数因子的差别时是唯一的．

这一有重大意义的结论是Haar于1933年发现的，它为现代调和分析的诞生奠定了基础．定理的存在性部分证明较长，可参看[9]．至于唯一性，可简要说明于下：设μ，ν是G上的Haar测度，$\mu = \text{const}\cdot\nu$意味着对任给$f\in C_c(G)$有：

$$\int f d\mu = \text{const}\int f d\nu. \tag{2}$$

取$g\in C_c(G)$：$\int g d\mu > 0$，$\int g d\nu > 0$．证(2)归于证$\int f d\mu \Big/ \int g d\mu$与$\mu$无关，这又归于用Fubini定理(3.1.6)作以下计算：

$$\int f d\mu = \int f(x) d\mu(x) \int g(yx) d\nu(y) \Big/ \int g(zx) d\nu(z)$$

$$=\int d\nu(y)\int[f(y^{-1}x)g(x)\Big/\int g(zy^{-1}x)d\nu(z)]d\mu(x)$$

$$=\int g(x)d\mu(x)\int[f(y^{-1}x)\Big/\int g(zy^{-1}x)d\nu(z)]d\nu(y)$$

$$=\int g(x)d\mu(x)\int[f(y^{-1})\Big/\int g(zy^{-1})d\nu(z)]d\nu(y).$$

以下设 λ 是 G 上取定的Haar测度.

8.1.3 定理 若 $U\subset G$ 是非空开集，则 $\lambda(U)>0$；$\lambda(G)<\infty \Longleftrightarrow G$ 是紧群.

证 取紧集 $K\subset G$：$\lambda(K)>0$. 因 $\{aU|a\in G\}$ 覆盖 K，故有 $\{a_1,\cdots,a_n\}\subset G$：$K\subset\bigcup a_iU$，于是

$$\lambda(U)=\frac{1}{n}\sum_i\lambda(a_iU)\geqslant\frac{1}{n}\lambda(K)>0.$$

若 $\lambda(G)<\infty$，则有最大的 m，使得存在 $b_1,\cdots,b_m\in G$；$b_1K,\cdots,b_mK$ 互不相交. $\forall x\in G$, xK 必与某个 b_iK 有公共点 y，于是 $x\in yK^{-1}\subset b_iKK^{-1}$，从而 $G=\bigcup b_iKK^{-1}$ 是紧的. ∎

8.1.4 定理 设 $f\in C_c(G,E)$, $g\in L^p(G,E,\lambda)$，μ 是 G 上一正则测度，$\|\cdot\|_p$ 与 $\|\cdot\|_{(p)}$ 分别记 $L^p(\lambda)$ 与 $L^p(\mu)$ 中的范数. 则

(i) $\lim\limits_{a\to e}\|_af-f\|_{(p)}=\lim\limits_{a\to e}\|f_a-f\|_{(p)}=0(1\leqslant p\leqslant\infty)$；

(ii) $\lim\limits_{a\to e}\|_ag-g\|_p=0(1\leqslant p<\infty)$.

证 (i) 令 $A=\text{supp}f$，取 e 的紧邻域 V. 任给 $\varepsilon>0$，$W=\{(a,x)|\|f(ax)-f(x)\|<\varepsilon\}$ 是 $G\times G$ 的开子集，$e\times VA\subset W$. 因 VA 是紧集，故存在 e 的邻域 U；$U\times VA\subset W$. 任给 $a\in U\cap V^{-1}$，当 $x\in VA$ 时直接有 $\|f(ax)-f(x)\|<\varepsilon$；若 $x\in(VA)^c$，则必 $ax\in A^c$（否则 $x=a^{-1}ax\in VA$！），因而 $f(x)=f(ax)=0$. 于是 $\|_af-f\|_\infty\leqslant\varepsilon$. 若 $1\leqslant p<\infty$，则

$$\|_af-f\|_{(p)}^p=\int_{VA}\|f(ax)-f(x)\|^pd\mu\leqslant\varepsilon^p\mu(VA).$$

因此$\lim\limits_{a\to e}\|{}_af-f\|_{(p)}=0(1\leqslant p\leqslant\infty)$；类似地可证

$$\lim_{a\to e}\|f_a-f\|_{(p)}=0.$$

(ii)任给$\varepsilon>0$，取$h\in C_c(G,E)$：$\|g-h\|_p<\varepsilon(3.5.2)$. 由

$$\begin{aligned}\|{}_ag-g\|_p&\leqslant\|{}_ag-{}_ah\|_p+\|{}_ah-h\|_p+\|h-g\|_p\\&<\varepsilon+\|{}_ah-h\|_p+\varepsilon\end{aligned}$$

及已证的(i)推出$\|{}_ag-g\|_p\to0(a\to e,1\leqslant p<\infty)$. □

推论 若$f\in C_c(G,E)$，则$G\to C_c(G,E)$，$a\longmapsto{}_af$连续；若$g\in L^p(G,E,\lambda)(1\leqslant p<\infty)$，则$G\to L^p(G,E,\lambda)$，$a\longmapsto{}_ag$连续.

注 当$\lim\limits_{a\to e}\|{}_af-f\|_u=0$时称$f$在$G$上(左)一致连续；对于$G=\mathrm{R}^n$，这就是通常的一致连续.

积分$\int fd\lambda$有几个很简单的"变量代换公式".

8.1.5 定理 任给$f\in L^1(G,\lambda)$及拓扑同构$u:G\to G$，有

$$\int f\circ ud\lambda=\mathrm{mod}u\int fd\lambda;\tag{3}$$

$$\int f_ad\lambda=\Delta(a)\int fd\lambda\quad(a\in G);\tag{4}$$

$$\int\check{f}\,d\lambda=\int f\cdot\Delta d\lambda,\tag{5}$$

其中mod$u$是由u唯一决定的正常数，Δ是从G到正实数乘法群R^+的连续同态(G的模函数).

证 首先设$f\in C_c(G)$. 易验证(3)(4)之左端都是关于f的左不变正线性泛函，依3.4.5与8.1.2，使(3)(4)成立的正常数mod$u$，$\Delta(a)$(a固定)存在(注意这是涉及Haar测度问题的典型证法!).由

$$\Delta(ab)\int fd\lambda=\int f_{ab}d\lambda=\Delta(b)\int f_ad\lambda=\Delta(a)\Delta(b)\int fd\lambda$$

推出$\Delta(ab)=\Delta(a)\Delta(b)(a,b\in G)$. 取$f\in C_c(G)$：$f\geqslant0$，$\|f\|_1>0$，

则 $\Delta(a)=\|f_a\|_1/\|f\|_1$在$a=e$连续 (8.1.4)，故$\Delta$为连续同态．直接验知$\int \check{f}\cdot\Delta d\lambda$是关于$f$的左不变正线性泛函，于是$\int fd\lambda=c\int \check{f}\cdot\Delta d\lambda$，$c$是正常数．因$\int fd\lambda=c^2\int(\check{f}\Delta)^\vee\cdot\Delta d\lambda=c^2\int fd\lambda$，故$c=1$，(5)对$f\in C_c(G)$亦成立．

现在设$f\in L^1(G,\lambda)$．不妨假定$f\geqslant 0$，进而又可设（由Levi定理）f是简单函数，最后归于证：$\forall A\in\mathscr{B}$，

$$\lambda(u^{-1}(A))=\operatorname{mod}u\cdot\lambda(A); \tag{6}$$

$$\lambda(Aa)=\Delta(a)\lambda(A); \tag{7}$$

$$\lambda(A^{-1})=\int_A\Delta d\lambda. \tag{8}$$

利用§3.4(2)容易验证(6)(7)．令$\mu A=\int_A\Delta d\lambda(A\in\mathscr{B})$，直接看出$\mu$是右不变的．若$\mu$是正则的，则8.1.2推出$\check{\mu}=c\lambda$，$c$是正常数．取$e$的紧邻域$V$，使$V=V^{-1}$，$\forall x\in V$：$|\Delta(x)-1|<\varepsilon$，则

$$|c-1|=\left|\int_V(\Delta-1)\,d\lambda\right|/\lambda(V)\leqslant\varepsilon,$$

故得$c=1$．余下只要证μ的正则性(此处不用第二可数性假定，否则就不必证了)．将$(0,\infty)$分成可数个互不相交的有界区间I_j之并，使$\bar{I}_j\subset(0,\infty)$；令$F_j=\Delta^{-1}(I_j)$，则$\Delta$在$F_j$上可积，因此$\mu$在$F_j$上的限制$\mu_j$是正则的，这直接推出$\check{\mu}$在开集上内正则．若$A\subset G,\mu A<\infty,\varepsilon>0$，则必存在开集$U_j\supset A\cap F_j$：$\mu U_j<\mu(A\cap F_j)+\varepsilon 2^{-j}$，于是$\mu(\bigcup U_j)<\mu A+\varepsilon$，$\mu$是外正则的． □

当$\Delta(x)\equiv 1$时称G为幺模群．若存在e的紧邻域V：$a^{-1}Va\subset V(\forall a\in G)$，则$\lambda(V)=\Delta(a)\lambda(V)$，$\Delta(a)=1$．特别，若$G$是紧的（离散的或交换的），则$G$是幺模群．

参考文献：[9]，[22]，[38]，[65]．

习　题

1．G是离散的$\Longleftrightarrow \exists x\in G$，$\lambda(\{x\})>0$．

2．若G是紧或离散的，u：$G\cong G$，则$\mathrm{mod}\,u=1$．

3．若μ是G上的右Haar测度，则 $\mu A=0 \Longleftrightarrow \lambda(A)=0$（但$\mu A<\infty$时不必$\lambda(A)<\infty$）．

§2　卷　　积

本节中设G是局部紧Abel加群，其中已给定Haar测度λ，当$G=\mathrm{R}^n[G=\mathrm{T}^n]$时约定$d\lambda=(2\pi)^{-n/2}dx[d\lambda=(2\pi)^{-n}dx]$，$dx$是Lebesgue测度，此时称$\lambda$是$\mathrm{R}^n[\mathrm{T}^n]$上的**正规化Haar测度**．令$L^p(G,E)=L^p(G,E,\lambda)$．给定$\omega\in L(E_1,E_2;\ E)$，为书写简便，约定$\omega(u,v)=uv$，$\|\omega\|\leqslant 1$．

任给一对函数$f:G\to E_1$，$g:G\to E_2$，称函数

$$(f*g)(x)=\int f(x-y)g(y)d\lambda(y),x\in G \tag{1}$$

为f与g的**卷积**，只要(1)右端对几乎所有$x\in G$存在．注意(1)中$f(x-y)g(y)=\omega(f(x-y),g(y))$．

8.2.1 定理　设$f\in L^p(G,E_1)$，$g\in L^q(G,E_2)$，$1\leqslant p$，$q\leqslant\infty$，$\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}-1\geqslant 0$．则$h=f*g$存在，且$h\in L^r(G,E)$，$\|h\|_r\leqslant\|f\|_p\|g\|_q$；若$r=\infty\left(\text{即}\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1\right)$，则$h$在$G$上一致连续．

证　首先设$r=\infty$．对任给$x\in G$有(利用§3.5(2))：

$$\int\|f(x-y)\|\|g(y)\|d\lambda(y)\leqslant\|f\|_p\|g\|_q,$$

由此看出$h=f*g$存在且$\|h\|_\infty\leqslant\|f\|_p\|g\|_q$．不妨设$p<\infty$．若$G$

$\ni \alpha\to 0$，则 $\|h_\alpha - h\|_\infty = \|(f_\alpha - f) * g\|_\infty \leqslant \|f_\alpha - f\|_p \|g\|_q \to 0$（参看8.1.4，注意 $h_\alpha = \tau_\alpha h$），可见 h 在 G 上一致连续．

其次设 $r<\infty$，于是 p,q 有限．令 $s = p(1-q^{-1}) = p/q'$，$\varphi(x) = \int \|f(x-y)g(y)\| d\lambda(y)\ (x\in G)$，则用Hölder 不等式得：

$$\varphi(x) \leqslant \int \|f(x-y)\|^s (\|f(x-y)\|^{1-s}\|g(y)\|) d\lambda(y)$$

$$\leqslant \|f\|_p^s \left[\int F(y)(x) d\lambda(y)\right]^{1/q},$$

其中 $F: G \to L^\alpha(G)$，$F(y)(x) = \|f(x-y)\|^{(1-s)q}\|g(y)\|^q$，$\alpha = r/q \geqslant 1$．于是

$$\|\varphi\|_r \leqslant \|f\|_p^s \left\{\int [(\int F d\lambda)(x)]^{r/q} d\lambda(x)\right\}^{1/r} \quad (\text{依}3.5.7)$$

$$= \|f\|_p^s \left\|\int F d\lambda\right\|_\alpha^{1/q} \leqslant \|f\|_p^s \left[\int \|F(y)\|_\alpha d\lambda(y)\right]^{1/q}$$

$$= \|f\|_p^s \left\{\int \left[\int \|f(x-y)\|^{(1-s)r} d\lambda(x)\right]^{1/\alpha} \cdot \|g(y)\|^q d\lambda(y)\right\}^{1/q}$$

$$= \|f\|_p^s \|f\|_p^{p/r} \|g\|_q = \|f\|_p \|g\|_q,$$

这表明 $h = f * g$ 存在，且 $\|h\|_r \leqslant \|\varphi\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$． □

卷积之能成为一个重要分析工具，主要基于以下事实：$f * g$ 往往继承了每个因子的"最好的"性质；而这又常常表现为：只要因于 f, g 取自适当的空间，$f * g$ 就属于"充分好"的空间，且 $(f,g) \longmapsto f * g$ 是连续双线性映射．下面举三个这样的定理．

8.2.2 定理 设 $1\leqslant p\leqslant\infty$，则有连续双线性算子：

$$*: L^1(G, E_1) \times L^p(G, E_2) \to L^p(G, E); \qquad (2)$$

$$*: L^1_{loc}(G, E_1) \times L^p_c(G, E_2) \to L^p_{loc}(G, E); \qquad (3)$$

$$*: L^1(G, E_1) \times L^\infty(G, E_2) \to C_b(G, E), \qquad (4)$$

其中 * 记映射$(f,g)\longmapsto f*g$，空间 L^p_{loc} 与L^p_c上采用§3.5 中规定的拓扑，$C_b(G,E)=L^\infty(G,E)\cap C(G,E)$，其中采用上确界范数.

证 8.2.1 推出 $\|f*g\|_p\leqslant\|f\|_1\|g\|_p(f\in L^1,g\in L^p)$，由此得出(2)(4)的连续性. 任给 $f\in L^1_{loc}(G,E_1),g\in L^p_c(G,E_2)$，令$A=\operatorname{supp}g$；任给紧集$K\subset G$，当$x\in K$时，

$$\|(f*g)(x)\|\leqslant\int_A\|f(x-y)\|\|g(y)\|d\lambda(y)$$

$$\leqslant\int\|(\chi_{K-A}f)(x-y)\|\|g(y)\|d\lambda(y),$$

因此 $\quad\|(f*g)|K\|_p\leqslant\|f|(K-A)\|_1\|g\|_p.$

这表明$f*g\in L^p_{loc}$，且(3)是连续的. □

8.2.3 定理 设$0\leqslant r\leqslant\infty$，则有连续双线性算子：

$$*:\mathscr{D}^r(\mathrm{R}^n,E_1)\times L^1_{loc}(\mathrm{R}^n,E_2)\to\mathscr{E}^r(\mathrm{R}^n,E);\qquad(5)$$

$$*:\mathscr{E}^r(\mathrm{R}^n,E_1)\times L^1_c(\mathrm{R}^n,E_2)\to\mathscr{E}^r(\mathrm{R}^n,E);\qquad(6)$$

$$*:\mathscr{E}^r(\mathrm{T}^n,E_1)\times L^1(\mathrm{T}^n,E_2)\to\mathscr{E}^r(\mathrm{T}^n,E),\qquad(7)$$

其中$\mathscr{E}^r(\mathrm{T}^n,E)$作为$\mathscr{E}^r(\mathrm{R}^n,E)$的子空间意义是自明的(也可参看§9.8).在(5)(6)(7)三种情况下，有恒等式

$$\partial^\alpha(f*g)=\partial^\alpha f*g,\quad|\alpha|<r+1.\qquad(8)$$

证 任给$f\in\mathscr{D}^r(\mathrm{R}^n,E_1),g\in L^1_{loc}(\mathrm{R}^n,E_2)$，令$A=\operatorname{supp}f$. 任取有界开集$U\subset\mathrm{R}^n$，令$W=U-A$. 当$x\in U$，$|\alpha|<r+1$时，

$$\int_{\mathrm{R}^n}\partial^\alpha_x f(x-y)g(y)d\lambda(y)=\int_W\partial^\alpha_x f(x-y)g(y)d\lambda(y)$$

存在. 因$\|\partial^\alpha_x f(x-y)g(y)\|\leqslant\|\partial^\alpha f\|_\infty\|g(y)\|$，故3.2.6推出

$$\partial^\alpha(f*g)(x)=\int(\partial^\alpha f)(x-y)g(y)d\lambda(y),x\in U,$$

可见$(f*g)|U\in C^r$，且

$$\sup_{x\in U}\|\partial^\alpha(f*g)(x)\|\leqslant\|\partial^\alpha f\|_\infty\|g|W\|_1,$$

这推出(5)连续．对(6)(7)的证明是类似的． □

8.2.3表明，只要f,g之一足够光滑，$f*g$亦将足够光滑．若以$\varphi*$记卷积算子$f\longmapsto\varphi*f$，则对任一取定的$\varphi\in\mathscr{D}'(\mathrm{R}^n,E_1)$，从(5)得到连续线性算子$\varphi*:L^1_{loc}(\mathrm{R}^n,E_2)\to\mathscr{E}'(\mathrm{R}^n,E)$．这样，$\varphi*$将$L^1_{loc}(\mathrm{R}^n,E_2)$中的"坏函数"光滑化了．卷积在应用上的巨大价值主要有赖于此．下节中我们将系统地展开上述思想．

任给$f:\mathrm{T}\to E$，令$V(f)=V_0^{2\pi}(f)$．设$\mathrm{BV}(\mathrm{T},E)=\{f:\mathrm{T}\to E\,|\,V(f)<\infty\}$，它依范数$\|f\|_V=V(f)+\|f\|_u$是一$B$-空间．

8.2.4 定理 依以上约定，有连续双线性算子

$$*:\mathrm{BV}(\mathrm{T},E_1)\times L^1(\mathrm{T},E_2)\to\mathrm{BV}(\mathrm{T},E).\tag{9}$$

证 任给$f\in\mathrm{BV}(\mathrm{T},E_1),g\in L^1(\mathrm{T},E_2)$，显然$h=f*g$存在．任给$[0,2\pi]$的分划$0=x_0<x_1<\cdots<x_n=2\pi$，

$$\begin{aligned}&\sum_i\|h(x_i)-h(x_{i-1})\|\\&\leqslant\int_0^{2\pi}\sum_i\|f(x_i-y)-f(x_{i-1}-y)\|\,\|g(y)\|d\lambda(y)\\&\leqslant V(f)\|g\|_1,\end{aligned}$$

因此 $V(h)+\|h\|_u\leqslant V(f)\|g\|_1+\|f\|_u\|g\|_1=\|f\|_V\|g\|_1,$

所要结论由此得出． □

卷积定义中所用的ω可取：$L(F,E)\times E\to E,(a,x)\longmapsto ax$；$\mathrm{C}\times E\to E,(a,x)\longmapsto ax$；$B$-代数中的乘法，特别是复数乘法．若取后者，则我们有运算

$$L^1(G)\times L^1(G)\to L^1(G),(f,g)\longmapsto f*g.\tag{10}$$

从(1)直接看出(10)是一个交换"乘法"；而用Fubini定理可指明它也是结合的．因此$L^1(G)$依乘法(10)是一个交换B-代数，称为**卷积代数**．

卷积运算(10)可扩张到空间$M(G)$上，其构成大意如下：任给$\mu,\nu\in M(G)$，3.5.5推出，由等式

$$\int \varphi d(\mu * \nu) = \int d\mu(x) \int \varphi(x+y)d\nu(y), \varphi \in C_0(G) \quad (11)$$

唯一决定一个$\mu * \nu \in M(G)$，直接看出$\|\mu * \nu\| \leqslant \|\mu\|\|\nu\|$. 因关于复测度的积分归结为对正测度的积分(§3.3(8))，故可将Fubini定理用于(11)得出$\mu * \nu = \nu * \mu$. 其次，

$$\int \varphi d((\mu * \nu) * \sigma) = \iiint \varphi(x+y+z)d\mu(x)d\nu(y)d\sigma(z)$$

$(\mu, \nu, \sigma \in M(G))$，可见$(\mu * \nu) * \sigma = \mu * (\nu * \sigma)$. 这样，$M(G)$依"卷积"$\mu * \nu$是一个交换$B$-代数. 卷积代数$M(G)$含有单位元且可定义对合运算：任给$a \in G, \mu \in M(G)$，由

$$\int \varphi d\varepsilon_a = \varphi(a), \int \varphi d\mu^* = \overline{\int \overline{\varphi^\vee} d\mu}, \varphi \in C_0(G) \quad (12)$$

定义出$\varepsilon_a, \mu^* \in M(G)$. 不难验证$M(G)$依对合$\mu \longmapsto \mu^*$是一(*)代数(4.7.1)，而$\varepsilon_0$是$M(G)$的单位元：任给$\mu \in M(G)$,

$$\int \varphi d(\varepsilon_0 * \mu) = \int d\varepsilon_0(x) \int \varphi(x+y)d\mu(y) = \int \varphi d\mu.$$

现在指出，$L^1(G)$是$M(G)$的一个闭(*)子代数且是一理想. 设$\mu, \nu \in M(G)$. 若$d\mu = fd\lambda, f \in L^1(G), \varphi \in C_0(G)$，则

$$\begin{aligned}\int \varphi d(\mu * \nu) &= \int d\nu(y) \int \varphi(x+y)f(x)d\lambda(x) \\ &= \int \varphi(x)d\lambda(x) \int f(x-y)d\nu(y) \\ &= \int \varphi(x)h(x)d\lambda(x),\end{aligned}$$

因此$d(\mu * \nu) = hd\lambda, h(x) = \int f(x-y)d\nu(y) \in L^1(G)$. 于是可认为

$$f * \nu = \int f(x-y)d\nu(y) \quad (13)$$

(参照§3.3(8)). 其次，若$d\mu = fd\lambda$, $d\nu = gd\lambda$，则由(13)直接

推出

$$(\mu * \nu)(x)=\int f(x-y)g(y)d\lambda(y)=(f*g)(x),$$

可见$L^1(G)$保持卷积运算嵌入$M(G)$中．若$d\mu=fd\lambda$，则

$$\int \varphi d\mu^*=\int \overline{\varphi^\vee f d\lambda}=\int \varphi \overline{f^\vee} d\lambda,$$

可见只要在$L^1(G)$中定义$f^*=\overline{f^\vee}$，$L^1(G)$就成为$M(G)$的一个(*)子代数．

即使G是非交换的，亦可用类似的方式在$M(G)$中定义卷积与对合，使之成为一个(*)代数．

参考文献：[9]，[22]，[23]，[38]，[65]，[78]．

习　题

1．若f,g之一有紧支集，$f*g$存在，则
$\operatorname{supp}(f*g)\subset \operatorname{supp} f+\operatorname{supp} g$．

2．$L^p(\mathrm{T}^n)(1\leqslant p<\infty)$是卷积代数$L^1(\mathrm{T}^n)$中的闭理想；$e^{ik\cdot x}\ (k\in Z^n)$的有限线性组合之全体是$L^1(\mathrm{T}^n)$中的理想．

§3　奇异积分

本节沿用上节的约定与记号，考察由卷积定义的奇异积分，并将其用于解某些逼近问题．

8.3.1 定义　设S是一有向集，$\{\theta_s\}_{s\in S}\subset L^1(G)$满足：(i) $\forall s\in S$：$\int\theta_s d\lambda=1$；(ii)任给0-邻域$V\subset G$，$\lim\limits_s\int_V\theta_s d\lambda=1$[以及(iii)任给0-邻域$V\subset G$，$\lim\limits_s\int_{V^c}|\theta_s|d\lambda=0$，$\sup\limits_s\|\theta_s\|_1<\infty$]，则称$\theta_s$为奇异积分核[逼近单位]；任给$f\in L^p(G,E)(1\leqslant p\leqslant\infty)$，称积分

$$(f*\theta_s)(x)=\int f(x-y)\theta_s(y)d\lambda(y),x\in G \tag{1}$$

为以θ_s为核的卷积型奇异积分或简称奇异积分．

通常取S为N或某个实区间，对于后者，约定以“$s\to s_0$”指明S的序向，当然s可能换成其它字母．若核$\theta_s\geqslant 0$，则它必为逼近单位．

首先看T^1上一些奇异积分核的例子：

$$D_m(x)=\sum_{|k|\leq m}e^{ikx}=\sin\frac{2m+1}{2}x\Big/\sin\frac{x}{2},\ m\geqslant 0;\qquad (2)$$

$$F_m(x)=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}D_k(x)=\frac{1}{m}\left(\sin\frac{mx}{2}\Big/\sin\frac{x}{2}\right)^2,\ m\geqslant 1;$$

$$(3)$$

$$P_r(x)=\sum_{k\in Z}r^{|k|}e^{ikx}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2},0<r\to 1-0,\qquad (4)$$

它们依次称为Dirichlet核、Fejér核与Poisson核．构成R^n上的核的常见方式是：取$0\leqslant\theta\in L^1(R^n)$，$\|\theta\|_1>0$，则

$$\theta_s(x)=s^n\theta(sx)/\|\theta\|_1,0<s\to\infty\qquad (5)$$

或 $$\theta_s(x)=s^{-n}\theta(x/s)/\|\theta\|_1,\infty>s\to+0\qquad (6)$$

显然是逼近单位，称这样构成的θ_s为Fejér型核．分别取$x^{-2}\sin^2x(x\in R)$，$(1+|x|^2)^{-(n+1)/2}$及$\exp(-|x|^2)(x\in R^n)$作为上述的$\theta(x)$，得

$$F_s(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin^2sx}{sx^2},\qquad 0<s\to\infty;\qquad (7)$$

$$P_y(x)=\frac{\sqrt{2}^n}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)y(y^2+|x|^2)^{-(n+1)/2},\qquad (8)$$

$$\infty>y\to+0;$$

$$W_s(x)=(\sqrt{2}s)^n\exp(-s^2|x|^2),0<s\to\infty,\qquad (9)$$

它们依次称为Fejér核、Poisson核与Weierstrass核．(2)—(4)及(7)—(9)都是x的偶函数，在$x=0$邻近有愈来愈突起的钟状图形，除(2)外都是逼近单位．

任给R[T]上的逼近单位θ_s，

$$\Theta_s(x)=\theta_{s_1}(x_1)\cdots\theta_{s_n}(x_n),\ x=(x_1,\cdots,x_n),\ s=(s_1,\cdots,s_n) \quad (10)$$

是$R^n[T^n]$上的逼近单位．例如，

$$F_k(x)=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{k_j}\left(\sin\frac{k_jx_j}{2}\bigg/\sin\frac{x_j}{2}\right)^2,\ x=(x_1,\cdots,x_n) \quad (11)$$

是T^n上一逼近单位，其中$k=(k_1,\cdots,k_n),0<k_j\in Z(1\leqslant j\leqslant n)$

积分(1)的价值在于，在一定条件下可用$f*\theta_s$来逼近f，而$f*\theta_s$的性质通常较f为优．

8.3.2 定理(Fejèr)　设θ_s是G上的逼近单位．

(i)若$f\in L^\infty(G,E)$, $K\subset G$, $\lim\limits_{y\to 0}\sup\limits_{x\in K}\|f(x-y)-f(x)\|=0$,

则在K上$f*\theta_s\rightrightarrows f$．

(ii)若$f\in L^p(G,E)(1\leqslant p<\infty)$，则$\|f*\theta_s-f\|_p\to 0$．

证　(i)　取G的0-邻域V，任给$x\in K$，

$$\|(f*\theta_s-f)(x)\|\leqslant\left(\int_V+\int_{V^c}\right)\|f(x-y)-f(x)\|\,|\theta_s(y)|\,d\lambda(y)$$

$$\leqslant\sup_{x\in K,y\in V}\|f(x-y)-f(x)\|\,\|\theta_s\|_1+2\|f\|_\infty\int_{V^c}|\theta_s|\,d\lambda,$$

于是所要结论由定理假设及8.3.1之条件(iii)推出．

(ii)　依$\varphi_s(y)(x)=\|f(x-y)-f(x)\|\,|\theta_s(y)|$定义$\varphi_s:G\to L^p(G)$，则

$$\|f*\theta_s-f\|_p\leqslant\left\|\int\varphi_s(y)d\lambda(y)\right\|_p\leqslant\int\|\varphi_s(y)\|_p d\lambda(y)$$

(利用3.5.7)

$$=\int\|\tau_{-y}f-f\|_p\,|\theta_s(y)|\,d\lambda(y)=\int_{V^c}+\int_V\ ,$$

于是可如(i)一样(利用8.1.4)完成证明．　□

这样，$f*\theta_s$依范数收敛的问题就有了令人满意的解答．至于按点收敛，所需的条件要强得多．首先指出，不难证明以

下结果：

8.3.3 定理 设G上的逼近单位θ_s满足：(i)任给0-邻域$V\subset G$：$\sup_s\|\theta_s|V^c\|_\infty<\infty$；(ii)$\mathrm{supp}\,\theta_s\subset K$，$K$是与$s$无关的紧集．若$x$是$f\in L^1(G,E)$的连续点，则$(f*\theta_s)(x)\to f(x)$．

但8.3.3对连续性很差的f没什么意义．下面证明两个较精细的结果．设$G=\mathrm{R}^n$或T，则

$$\|(f*\theta_s-f)(x)\|\leqslant\int_{|y|<\delta}\|f(x-y)-f(x)\|\,|\theta_s(y)|\,d\lambda(y)$$

$$+\int_{|y|>\delta}g(y)\,|\theta_s(y)|\,d\lambda(y)+\|f(x)\|\int_{|y|>\delta}|\theta_s(y)|\,d\lambda(y)$$

$$=I_1+I_2+I_3,\tag{12}$$

其中$0<\delta<b$, $b=\infty$或π，$g(y)=\|f(x-y)\|$．下面保持这些记号．

8.3.4 定理 设$G=\mathrm{R}^n[\mathrm{T}]$上的逼近单位$\theta_s$有"优势函数"$h_s\in L^1([0,b))$：$h_s$在$[0,b)$上单调减，$\sup_s\|h_s\|_1<\infty$，$|\theta_s(x)|\leqslant h_s(|x|)(0\leqslant|x|<b)$．若$x$是$f\in L^1(G,E)$的$L$-点(3.6.2)，则$(f*\theta_s)(x)\to f(x)$．

证　令$F(r)=\int_{|y|\leqslant r}\|f(x-y)-f(x)\|d\lambda(y)$，则$F(r)$在$[0,b]$上绝对连续．$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta\in(0,1)$, $\forall r\in(0,\delta]$：$F(r)\leqslant\varepsilon r^n$．依(12)的记号，

$$I_1\leqslant\int_{|y|<\delta}\|f(x-y)-f(x)\|h_s(|y|)d\lambda(y)=\int_0^\delta h_s dF$$

$$=F(\delta)h_s(\delta)-\int_0^\delta F dh_s\leqslant\varepsilon\delta^n h_s(\delta)-\varepsilon\int_0^\delta r^n dh_s$$

$$=\varepsilon\int_0^\delta h_s dr^n\leqslant n\varepsilon\|h_s\|_1.$$

其次，当$\delta<|y|<b$时，$|\theta_s(y)|\leqslant h_s(|y|)\leqslant h_s(\delta)\leqslant\delta^{-1}\|h_s\|_1$. 取$\varphi\in L^\infty(G)\cap L^1(G)$：$\|g-\varphi\|_1<\delta\varepsilon$，则

$$I_2\leqslant\delta^{-1}\|h_s\|_1\|g-\varphi\|_1+\|\varphi\|_\infty\int_{|y|>\delta}|\theta_s(y)|d\lambda(y),$$

右端第一项$<\varepsilon\|h_s\|_1$. 至此已可见$\lim_s(I_1+I_2+I_3)=0$. □

8.3.5 定理 设$P_y(x),W_s(x)$如(8)(9)，x是$f\in L^1(\mathrm{R}^n,E)$的L-点，则$(f*P_y)(x)\to f(x),(f*W_s)(x)\to f(x)(y\to+0,s\to\infty)$.

证 只对W_s证明，关于P_y的证明是类似的. 设ε,δ如8.3.4之证明中一样，则类似地有(依(12))：

$$I_1\leqslant n\varepsilon(\sqrt{2}\,s)^n\int_0^\infty r^{n-1}\exp(-s^2r^2)dr=n(\sqrt{2})^{n-2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\varepsilon.$$

再取$\varphi\in L^\infty(\mathrm{R}^n)\cap L^1(\mathrm{R}^n)$：$\|g-\varphi\|_1<\delta^n\varepsilon$，则

$$I_2\leqslant\sup_s(\sqrt{2}\,s)^n\exp(-s^2\delta^2)\delta^n\varepsilon+\|\varphi\|_\infty\int_{|y|>\delta}W_s(y)d\lambda(y).$$

用微分法可求出右端第一项为$(n/e)^{n/2}\varepsilon$，由此看出所要证. □

不难验证核(3)(4)满足8.3.3之条件；(4)以自身作优势函数满足8.3.4之条件；对于(3)(7)，可分别取$2m\pi^2/(4+m^2x^2)$与$2s/(1+s^2x^2)$作为优势函数.

奇异积分(1)有两种典型的应用. 首先，设S是一实区间，$u(s,x)=(f*\theta_s)(x)$在$S\times G$内满足某个方程$L(u)=0$，且$\lim_{s\to s_0}u(s,x)=f(x)$（依范数收敛或按点收敛），则积分(1)给出方程$L(u)=0$的满足"边值条件"$u|_{s=s_0}=f$的解. 例如，设$f\in L^1(\mathrm{T}),g\in L^1(\mathrm{R}^n)$，令

$$u(re^{i\varphi})=(f*P_r)(\varphi)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\cdot f(e^{i\theta})d\theta;\quad(13)$$

$$u(x,y)=(g*P_y)(x)$$

$$=\pi^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\int\frac{y}{(\sqrt{y^2+|x-\zeta|^2})^{n+1}}\cdot g(\zeta)d\zeta, \quad (14)$$

$$(x,y)\in \mathrm{R}^n\times(0,\infty);$$

$$u(t,x)=(g*W_s)(x)=(4\pi t)^{-n/2}\int g(\zeta)\exp\left(-\frac{|x-\zeta|^2}{4t}\right)d\zeta, \quad (15)$$

$$s=\frac{1}{2\sqrt{t}},\quad (t,x)\in(0,\infty)\times\mathrm{R}^n,$$

则(13)在单位圆内($r<1$)满足 Laplace 方程$\Delta u=0$及边值条件$u|_{r=1}=f$；(14)在“上半空间”($y>0$)内满足$\Delta u=0$及边值条件$u|_{y=0}=g$；(15)在半空间$t>0$内满足传热方程$u_t=\Delta u$及边值条件$u|_{t=0}=g$. 在上述三种情况下，u到边值的收敛都是L^1收敛与几乎处处收敛(8.3.2—8.3.5).

另一方面，形如(1)的积分为解答某些函数空间中的逼近问题提供了一个一般工具.

8.3.6 定理 设$\Omega\subset\mathrm{R}^n$是一开集. 则(i)$\mathscr{D}(\Omega,E)$在$L^p(\Omega,E)(1\leqslant p<\infty)$中稠密；(ii)$\mathscr{D}(\Omega,E)$在$\mathscr{E}^r(\Omega,E)(0\leqslant r\leqslant\infty)$中稠密；(iii) 定义于$\Omega$内而系数在$E$中的多项式之全体在$\mathscr{E}^r(\Omega,E)(0\leqslant r\leqslant\infty)$中稠密.

证 取$\theta\in\mathscr{D}(\mathrm{R}^n)$：$\{0\}\prec\theta\prec B^n(0,1)$(5.1.5)；设$\theta_s$如(6).

(i)设$f\in C_c(\Omega,E)\subset C_c(\mathrm{R}^n,E)$，则当$s$充分小时$f*\theta_s\in\mathscr{D}(\Omega,E)$（参考8.2.3）. 依8.3.2，$\|f*\theta_s-f\|_p\to0(s\to0)$. 于是结合3.5.2看出$\mathscr{D}(\Omega,E)$在$L^p(\Omega,E)$中稠密.

(ii)取Ω中的紧集的穷竭序列$\{K_i\}$，$\varphi_i\in\mathscr{D}(\mathrm{R}^n)$，$K_i\prec\varphi_i\prec K_{i+1}$. 任给$f\in\mathscr{E}^r(\Omega,E)$，令$f_i=\varphi_i f$. 取$s_1>s_2>\cdots$，使得$s_i\to0$，$K_{i+1}+B^n(0,s_i)\subset\Omega$. 令$g_i=f_i*\theta_{s_i}$，则$g_i\in\mathscr{D}(\Omega,$

E). 任给紧集 $K\subset\Omega,\alpha\in\mathrm{N}^n$, $|\alpha|<r+1$, 当 i 充分大时 $K+B^n(0,s_i)\Subset K_i$. 因$\partial^\alpha f$在K上一致连续，故8.3.2推出：

$$\|\partial^\alpha g_i-\partial^\alpha f\|_K\leqslant\|\partial^\alpha(f_i-f)*\theta_{s_i}\|_K+\|\partial^\alpha f*\theta_{s_i}-\partial^\alpha f\|_K$$

$$=\|\partial^\alpha f*\theta_{s_i}-\partial^\alpha f\|_K\to 0(i\to\infty)$$

($\|f\|_K=\|f|K\|_\infty$)，这表明在$\mathscr{E}^r(\Omega,E)$中$g_i\to f$.

(iii) 设 $f\in\mathscr{D}(\Omega,E)$, W_s如(9), $f_s=f*W_s$. 则8.3.2推出$\partial^\alpha f_s\rightrightarrows\partial^\alpha f(\alpha\in\mathrm{N}^n,s\to\infty)$. 因$f_s(x)$可扩张为整函数

$$f_s(z)=\left(\frac{s}{\sqrt{\pi}}\right)^n\int_{\mathrm{R}^n}f(y)\exp(-s^2\sum_j(z_j-y_j)^2)dy,z\in\mathrm{C}^n,$$

故从其Taylor 展开式可得多项式h_k：

$$\sup_{|\alpha|<k,|x|<k}\|\partial^\alpha(f_k-h_k)(x)\|<\frac{1}{k},k=1,2,\cdots.$$

显然在$\mathscr{E}^r(\Omega,E)$中$h_k\to f$，结合(ii)得(iii)所要证. □

结合8.3.6之(iii)与1.9.6得到(与3.5.2对照)：

推论 1 若E可分，则$\mathscr{E}^r(\Omega,E)$与 $\mathscr{D}^r(\Omega,E)(0\leqslant r\leqslant\infty)$可分.

任给紧集 $K\subset\mathrm{R}^n$, $f\in C(K)$, 由1.4.8，可以认为$f\in C_c(\mathrm{R}^n)$. 于是从8.3.6推出经典的Weierstrass定理：

推论 2 每个$f\in C(K)$可用多项式一致逼近.

8.3.7 定理 设$\Omega\subset\mathrm{R}^n$是一开集，$f\in L^1_{loc}(\Omega,E)$. 若$\forall\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$: $\int\varphi f dx=0$，则$f\overset{a.e.}{=}0$.

证 由3.5.3，只需证对任给$g\in C_c(\Omega)$，有$\int gfdx=0$. 令$K=\mathrm{supp}g$. $\forall\varepsilon>0$，取$\psi\in\mathscr{D}(\Omega)$，$\|(g-\psi)|K\|_\infty<\varepsilon$；取$K$的邻域$V\subset\Omega$：$\int_{V\setminus K}\|\psi(x)f(x)\|dx<\varepsilon$；取$h\in\mathscr{D}(\Omega)$：$K\prec h\prec$

V；令$\varphi = h\psi$，则$\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$，$\int \varphi f dx = 0$，于是所要结论从下式看出：

$$\left\|\int g f dx\right\| \leqslant \left\|\int_K (g-\varphi) f dx\right\| + \left\|\int_{V\setminus K} \varphi f dx\right\|$$

$$< \varepsilon \|f|K\|_1 + \varepsilon. \qquad \square$$

参考文献：[9]，[14]，[15]，[22]，[23]，[38]，[57]，[65]，[73]，[75]，[78]．

习　题

1．设$f \in L^p(\mathrm{T}, E)$ $(1 \leqslant p < \infty)$，则"Steklov函数" $f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(y) dy$可表为奇异积分，由此得出 $\|f_h\|_p \leqslant \|f\|_p$，$\|f_h - f\|_p \to 0$ $(h \to +0)$．

2．设$f \in L^p$，则$\|f * P_r\|_p$是$r(0<r<1)$的增函数．

3．$V_m(x) = \frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{2m}$ $(m \geqslant 1)$ 是一逼近单位，由此推出每个$f \in C(\mathrm{T}, E)$可用三角多项式一致逼近．

§4　Fourier 级数

本节中λ记T^n上的正规化Haar测度，R^n中的标准内积写作$x \cdot y$，令$e_k(x) = e^{ik\cdot x}$$(k \in \mathrm{Z}^n, x \in \mathrm{R}^n)$．

8.4.1 定义　任给$f \in L^1(\mathrm{T}^n, E)(=L^1(\mathrm{T}^n, E, \lambda))$，称

$$\hat{f}(k) = (f * e_k)(0) = \int f(x) e^{-ik\cdot x} d\lambda(x),\ k \in \mathrm{Z}^n \quad (1)$$

为f的Fourier系数，称$\sum_{k\in \mathrm{Z}^n}\hat{f}(k)e_k$为$f$的Fourier级数．

(1)显然推出$\|\hat{f}(k)\| \leqslant \|f\|_1$；当$0 \neq k \in \mathrm{Z}^n$时，

$$\|2\hat{f}(k)\| = \|\hat{f}(k) - \int f(x) e^{-ik\cdot x + i\pi} d\lambda\|$$

$$\leqslant\int\left\|f(x)-f\left(x+\frac{\pi k}{|k|^{2}}\right)\right\|d\lambda=\|f-f_{a}\|_{1},\tag{2}$$

其中 $a=\pi k/|k|^{2}$. 因此8.1.4推出 $\hat{f}(k)\to 0(|k|\to\infty)$, 即 $\hat{f}\in C_{0}(Z^{n},E)$, $\hat{f}:k\longmapsto\hat{f}(k)$.

若$f\in C^{r}(T^{n},E)(0\leqslant r<\infty)$, $D=-i\partial$, 则对(1)用分部积分得

$$(D^{\alpha}f)^{\wedge}(k)=k^{\alpha}\hat{f}(k),\ |\alpha|\leqslant r,k\in Z^{n},\tag{3}$$

因此 $$\|\hat{f}(k)\|=o(|k|^{-r})\quad(|k|\to\infty).\tag{4}$$

从(1)还直接推出 $(f*g)^{\wedge}=\hat{f}\hat{g}$ ($f\in L^{1}(T^{n},E)$, $g\in L^{1}(T^{n})$).

Fourier 级数的收敛性依赖于被展开函数的性质. 对于充分"好"的函数, 收敛性是不成问题的.

8.4.2 定理 若$f\in C^{r}(T^{n},E)$, $n<r\leqslant\infty$, 则f的Fourier级数在$\mathscr{C}^{r-n-1}(T^{n},E)$中收敛于$f(x)$.

证 只需对$r=n+1$进行证明. 由$\int_{R^{n}}(1+|x|)^{-n-1}dx<\infty$与(4)推出: $\sum\hat{f}(k)e_{k}$绝对并一致收敛于某个$F\in C(T^{n},E)$. 今证$f=F$. 不妨设$E=C$ (否则考虑$\varphi\circ f,\varphi\in E'$), 令$g=f-F$, 则$\hat{g}=0$. 4.7.3推出$\{e_{k}\}$生成的代数$A$在$C(T^{n})$中稠密. $\forall\ \varepsilon>0$, 取$\varphi\in A$: $\|\varphi-g\|_{u}<\varepsilon$, 于是

$$\|g\|_{2}^{2}=\int g\bar{g}d\lambda=\int g(\bar{g}-\bar{\varphi})d\lambda\leqslant\varepsilon\|g\|_{1}\leqslant\varepsilon\|g\|_{2},$$

这推出$\|g\|_{2}=0$, 从而$g=0$. □

对$n=1$这一特殊情况可得到更精细的结果. 取定$f\in L^{1}(T,E)$, 考虑其Fourier级数的对称部分和

$$S_{m}(f)=\sum_{|k|\leqslant m}\hat{f}(k)e_{k}=f*D_{m},\tag{5}$$

其中D_m是Dirichlet核(§3(2))．任给$s\in E$，不难算出

$$S_m(f)(0)-s=\int_0^\pi g(y)\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)ydy, \tag{6}$$

其中 $$g(y)=[f(y)+f(-y)-2s]/2\pi\sin\frac{y}{2}. \tag{7}$$

特别， $$S_m(f)(0)=\int_0^\pi \varphi(y)\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)y}{y}dy, \tag{8}$$

$$\varphi(y)=[f(y)+f(-y)]\frac{y}{2\pi\sin(y/2)}. \tag{9}$$

下面利用(6)—(9)及以下两个引理来证明收敛定理8.4.5.

8.4.3 Riemann 引理 若$g\in L^1([a,b],E)$，$-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$，则

$$\lim_{|\beta|\to\infty}\int_a^b g(x)e^{i\beta x}dx=0. \tag{10}$$

证 可设$g\in C_c^1$(8.3.6)，于是(10)由分部积分得出． □

8.4.4 Dirichlet引理 设$\varphi\in L^1([0,b],E)$，$0<b\leqslant\infty$．若φ在任何区间$[0,\delta]$($0<\delta<b$)上囿变，则

$$\lim_{\beta\to+\infty}\int_0^b \varphi(x)\frac{\sin\beta x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\varphi(+0). \tag{11}$$

证 不妨设$b<\infty$，$\varphi(+0)=\varphi(0)$，进而可设$\varphi(0)=0$$\Big($否则以$\varphi(x)-\varphi(0)$换$\varphi(x)$，注意$\lim\limits_{\beta\to+\infty}\int_0^b x^{-1}\sin\beta x dx=\frac{\pi}{2}\Big)$．令$F(x)=\int_0^x t^{-1}\sin\beta t dt$，则

$$\left\|\int_0^\delta \varphi(x)dF(x)\right\|=\left\|\varphi(\delta)F(\delta)-\int_0^\delta Fd\varphi\right\|$$

$$\leqslant \|F\|_u[\|\varphi(\delta)\| + V_0^\delta(\varphi)] \to 0(\delta \to +0)$$

（参考3.7.2与3.7.7），结合(10)与以上事实推出(11)． □

8.4.5 定理 设 $f \in L^1(\mathrm{T}, E)$．则 $S_m(f)(x)$ 的收敛性仅与 f 在 x 邻近的性状有关（局部性原理）；若 f 囿变，或 $f(x \pm 0)$ 及 $f'_\pm(x) = \lim\limits_{y \to +0} y^{-1}[f(x \pm y) - f(x \pm 0)]$（所谓单边导数）存在，$s = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$，则 $S_m(f)(x) \to s(m \to \infty)$．

证 可设 $x = 0$．因(8)右端可写成 $\int_0^\delta + \int_\delta^\pi$ $(0 < \delta < \pi)$，而(10)推出 $\lim\limits_m \int_\delta^\pi = 0$．故 $\lim\limits_m S_m(f)(0)$ 之存在性与值决定于 $f(y)$ 在 $|y| < \delta$ 内的性状．若 f 囿变，则(9)亦囿变，于是(11)推出 $S_m(f)(0) \to \frac{\pi}{2}\varphi(+0) = s$．若 $f'_\pm(0)$ 存在，则(7)在 $[0, \pi]$ 上可积，于是(10)推出 $S_m(f)(0) - s \to 0$． □

Carleson[17]证明了：若 $f \in L^2(\mathrm{T})$，则 $S_m(f) \xrightarrow{a.e.} f$．这一结果又被Hunt改进成对任何 $f \in L^p(\mathrm{T})(p > 1)$ 成立．因此若 $f \in C(\mathrm{T})$，则 $S_m(f) \xrightarrow{a.e.} f$．不过连续性远不足以保证 $S_m(f)$ 处处收敛，以下是一深刻的否定结果．

8.4.6 定理 设正数列 $\{\beta_m\}$ 满足 $\sup\limits_{m>1} \beta_m \ln m = \infty$，则存在稠密 G_δ 集 $F \subset C(\mathrm{T}, E)$，使得对任何 $f \in F$，$A_f = \{x \mid \sup\limits_m \|\beta_m \cdot S_m(f)(x)\| = \infty\}$ 是T中的稠密 G_δ 集．

证 取定 x，考虑线性算子

$$L_m: C(\mathrm{T}, E) \to E, f \longmapsto \beta_m S_m(f)(x), m = 1, 2, \cdots.$$

取 $a \in E \setminus 0$，$\varphi_{mk} \in C(\mathrm{T})$：$\|\varphi_{mk}\|_u = 1$，$\varphi_{mk}(y) \xrightarrow{a.e.} \operatorname{sgn} D_m(x-y)$ $(k \to \infty)$，则

$$\beta_m \|a\| \|D_m\|_1 = \lim_k \|L_m(a\varphi_{mk})\| \leqslant \|L_m\| \|a\|,$$

因此$\|L_m\|\geqslant\beta_m\|D_m\|_1$．不难由§3(2)导出以下估计：

$$\|D_m\|_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin mx|}{x}dx+O(1)=\frac{4}{\pi^2}\ln m+O(1),\quad(12)$$

由此得$\sup\limits_m\|L_m\|=\infty$，故$F_x=\{f\in C(\mathrm{T},E)\,|\sup\limits_m\beta_m\|S_m(f)(x)\|=\infty\}$是稠密$G_\delta$集(1.6.4之推论)．取可数稠子集$\{x_i\}\subset(-\pi,\pi)$，则$F=\bigcap F_{x_i}$是$C(\mathrm{T},E)$中的稠密$G_\delta$集(1.3.8)．任给$f\in F$，$A_f=\bigcap\limits_k\bigcup\limits_m\{x\,|\beta_m\|S_m(f)(x)\|>k\}$显然是稠密$G_\delta$集． □

关于$S_m(f)$收敛问题的复杂性源于"D_m非逼近单位"这一事实．与此相对照，8.3.2与8.3.4直接推出：

8.4.7 定理 令$\sigma_k(f)=f*F_k$，F_k如§3(11)．若$f\in C^r(\mathrm{T}^n,E)(0\leqslant r\leqslant\infty)$，则在$\mathscr{E}^r(\mathrm{T}^n,E)$中$\sigma_k(f)\to f(|k|\to\infty)$；若$f\in L^p(\mathrm{T}^n,E)(1\leqslant p<\infty)$，则$\|\sigma_k(f)-f\|_p\to0(|k|\to\infty)$；若$f\in L^1(\mathrm{T},E)$，则$\sigma_k(f)\xrightarrow{\text{a.e.}}f(k\to\infty)$．

8.4.7有一些重要推论．首先直接看出：

推论 1 系数在E中的三角多项式之集在$\mathscr{E}^r(\mathrm{T}^n,E)(0\leqslant r\leqslant\infty)$中稠密；$\{e_k\,|k\in\mathrm{Z}^n\}$是$L^2(\mathrm{T}^n)$的一个Hilbert基（参考1.10.6）；若$E$是Hilbert空间，则每个$f\in L^2(\mathrm{T}^n,E)$可展开为在$L^2(\mathrm{T}^n,E)$中收敛的Fourier级数$f=\sum\hat{f}(k)e_k$，且成立Parseval等式$\|f\|_2^2=\sum\|\hat{f}(k)\|^2$（参考3.5.6）．

其次，若$f\in L^1(\mathrm{T}^n,E)$，$\hat{f}=0$，则$\sigma_k(f)=0$，故有

推论 2 $L^1(\mathrm{T}^n,E)\to C_0(\mathrm{Z}^n,E)$，$f\longmapsto\hat{f}$是一单射．

然而$f\longmapsto\hat{f}$却远非满射．例如，令$A(\mathrm{Z})=\{\hat{f}\,|f\in L^1(\mathrm{T})\}$，则因(12)推出$\|D_m\|_1/\|\hat{D}_m\|_u=\|D_m\|_1$无界，从而逆射"$A(\mathrm{Z})\to L^1(\mathrm{T}),\hat{f}\longmapsto f$"不连续，因此$A(\mathrm{Z})$是$C_0(\mathrm{Z})$中的瘦集(1.6.1之推论1)．可见即使$a_k=o(1)$，$\{a_k\}\subset\mathrm{C}$，三角级数$\sum a_ke_k$成为Fourier级数的机会也很少．判定一个$\{a_k\}$是否属于$A(Z)$是一个重要课题，试看一个这方面的结果：

8.4.8 定理 设$\{a_k\}_{k\in Z}\subset C$, $\sigma_m=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{|j|\leqslant k}a_je_j$. 则$\{a_k\}$是某个$f\in L^1[f\in L^p, 1<p\leqslant\infty]$的Fourier系数$\Longleftrightarrow\{\sigma_m\}$在$L^1$中收敛$[\sup_m\|\sigma_m\|_p<\infty]$.

证 若$a_k=\hat{f}(k)$, $f\in L^p(\mathrm{T})(1\leqslant p\leqslant\infty)$, 则直接看出

$$\sigma_m=\sigma_m(f)=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}S_k(f), m=1,2,\cdots. \qquad (13)$$

当$p<\infty$时$\|\sigma_m-f\|_p\to 0\ (m\to\infty)$; 当$p=\infty$时$\|\sigma_m\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty\cdot\|F_m\|_1=\|f\|_\infty$.

反之, 若$\sup_m\|\sigma_m\|_p<\infty(1<p\leqslant\infty)$, 则1.8.8推出有子列$\{m_i\}$: 在$L^p=(L^{p'})'(p^{-1}+p'^{-1}=1)$中$\{\sigma_{m_i}\}$弱收敛于某个$f$, 于是

$$\hat{f}(k)=\int f\bar{e}_kd\lambda=\lim_i\int\sigma_{m_i}\cdot\bar{e}_kd\lambda$$

$$=\lim_i(\sigma_{m_i}*e_k)(0)=a_k, \qquad k\in Z.$$

当$\|\sigma_m-f\|_1\to 0$时显然同样得出$\hat{f}(k)=a_k$. □

依8.4.7之推论1, 对任给$f, g\in L^2(\mathrm{T})$有

$$\int f\bar{g}d\lambda=\sum_{k\in Z}\hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}. \qquad (14)$$

实际上(14)亦可能在其它条件下成立.

8.4.9 定理 设$f, g\in L^1(\mathrm{T})$. 若(i)$\sup_m\|S_m(g)\|_\infty<\infty$, 或(ii) g囿变, 则(14)成立.

证 若(i)满足, 则1.8.8推出有子列$\{m_i\}$: $\{S_{m_i}(g)\}$在$L^\infty=(L^1)'$中弱收敛于某个h. 因

$$\hat{h}(k)=\int h\bar{e}_kd\lambda=\lim_i\int S_{m_i}(g)\bar{e}_kd\lambda=\hat{g}(k),$$

故可设$g=h$. 再利用弱收敛性, 得

$$\int f\bar{g}d\lambda=\lim_i\int f\overline{S_{m_i}(g)}d\lambda=\lim_i\sum_{|k|\leq m_i}\hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}.$$

因以上结论可用到$\{m\}$的任一子列的子列，故(14)成立．当g固变时，考察8.4.4，8.4.5之证明不难看出$\sup_m\|S_m(g)\|_u<\infty$，于是可用已证结论． □

称$\sigma_m(f)=f*F_m$为f的Cesàro平均，相应的Fourier级数求和法称为Cesàro求和法．一般地，若θ_s是T上一逼近单位，$f*\theta_s$有Fourier展开：

$$f*\theta_s=\sum_{k\in Z}\hat{\theta}_s(k)\hat{f}(k)e_k, \tag{15}$$

则可用(15)近似代替f的Fourier级数，从而得到Fourier级数的一种求和法．这类求和法的实质在于通过引进因子$\hat{\theta}_s(k)$而使可能发散的级数$\sum\hat{f}(k)e_k$变得收敛．对于Cesàro求和法，所述的因子是$\hat{F}_m(k)=1-\frac{|k|}{m}$，$|k|\leq m=1, 2,\cdots$，当$|k|>m$时$\hat{F}_m(k)=0$．若以核$P_r$(§3(4))代替$F_m$，则得到所谓Abel-Poisson求和法，对于它有$\hat{P}_r(k)=r^{|k|}(k\in Z,0<r<1)$，因此对任给$f\in L^1(T,E)$有

$$f*P_r=\sum_{k\in Z}r^{|k|}\hat{f}(k)e_k. \tag{16}$$

关于$f*P_r$显然亦有类似于8.4.7的结果．下面指出，$S_m(f)$、$\sigma_m(f)$及$A_r(f)=f*P_r$这三种和的按点收敛性是递次扩大的，这由以下结果推出：

8.4.10 定理 设$\{a_k\}_0^\infty\subset E$是一有界序列，$S_k=a_0+\cdots+a_k$，$\sigma_k=\sum_0^k S_j/(k+1)$．则(i) $S_k\to S\Rightarrow\sigma_k\to S$；(ii)$\sigma_k\to S\Rightarrow\sum_0^\infty a_k r^k\to S(r\to 1-0)$．

证 (i)是平凡的，今证(ii)．任给$\varepsilon>0$，设当$k>m$时$|\sigma_k-S|<\varepsilon$，利用$(1-r)^{-2}=\sum_0^\infty(k+1)r^k$得

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k - S\right\|$$

$$= (1-r)^2 \left\|\sum_{k=0}^{\infty}(S_0+\cdots+S_k)r^k - \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)Sr^k\right\|$$

$$= (1-r)^2\left\|\sum_{k=0}^{\infty}(\sigma_k - S)(k+1)r^k\right\|$$

$$\leqslant (1-r)^2 \sum_{k=1}^{m}(k+1)\|\sigma_k - S\| + \varepsilon,$$

由此看出$\sum_0^{\infty} a_k r^k \to S(r\to 1-0)$. □

参考文献：[14]，[17]，[23]，[65]，[68]，[83]．

习　题

1．设$f\in L^1(\mathrm{R},E)$，$\varphi\in L^{\infty}(\mathrm{R})$，$\sup_x\left|\int_0^x \varphi dt\right|<\infty$，则

$$\lim_{\beta\to\infty}\int f(x)\varphi(\beta x)dx = 0.$$

2．设$f\in L^1(\mathrm{T},E)$，$0\neq k\in\mathrm{Z}$，则$\|\hat{f}(k)\|\leqslant V_0^{2\pi}(f)/2\pi|k|$．

3．设$f\in C(\mathrm{T}^n,E)$．则$f\in C^{\infty}\Longleftrightarrow\forall\alpha\in\mathrm{N}^n$，$\sup_k\|k^{\alpha}\hat{f}(k)\|<\infty$．

§5　Fourier 变换

本节中约定dx，$d\xi$等记R^n上的正规化Haar测度．

8.5.1 **定义**　任给$f\in L^1(\mathrm{R}^n,E)$，称

$$\hat{f}(\xi)=\int f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx,\quad \xi\in\mathrm{R}^n \tag{1}$$

为f的Fourier变式，称映射$f\longmapsto\hat{f}$为Fourier变换．

(1)可写作$\hat{f}(\xi)=(f*e_\xi)(0)$，$e_\xi(x)=e^{ix\cdot\xi}$．用如同§4(2)的式子可指明$\lim_{|\xi|\to\infty}\hat{f}(\xi)=0$，因此$\hat{f}\in C_0(\mathrm{R}^n,E)$，且$\|\hat{f}\|_\infty\leqslant\|f\|_1$．

与Fourier级数展开相类似的问题是：当$f\in L^1$满足什么条

件时，"Fourier积分"$\int \hat{f}(\xi)e_\xi d\xi$收敛于$f$？下面的解法颇类似于Fourier级数的求和法.

8.5.2 引理 设R^n上一逼近单位θ_s满足条件：(i)$\hat{\theta}_s\in L^1$，$\theta_s{}^{\wedge\wedge}=(\hat{\theta}_s)^\wedge=\check{\theta}_s$；(ii)$\sup\limits_s\|\hat{\theta}_s\|_u<\infty$；(iii)$\lim\limits_s\hat{\theta}_s(\xi)=1$；(iv)$f*\theta_s\xrightarrow{a.e.}f(\forall f\in L^1)$，则当$f\in L^1(R^n,E)$且$\hat{f}\in L^1$时几乎处处成立反演公式：

$$f(x)=\int\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi. \tag{2}$$

证 利用条件(i)及Fubini 定理推出

$$f*\theta_s=\int\hat{\theta}_s(\xi)\hat{f}(\xi)e_\xi d\xi. \tag{3}$$

于是(2)由控制收敛定理推出. □

与§4(15)对照，(3)可称之为积分$\int\hat{f}(\xi)e_\xi d\xi$的"$\theta$-平均"，因子$\hat{\theta}_s(\xi)$对应(15)中的$\theta_s(k)$. 取$\theta_s=W_s$(见§3(9))，则

$$\hat{W}_s(\xi)=\exp(-|\xi|^2/4s^2)=(\sqrt{2}s)^{-n}W_s(\xi/2s^2), \tag{4}$$

可见W_s满足8.5.2之条件(对于(iv)用8.3.5). 于是得到：

8.5.3 定理 设$f\in L^1(R^n,E)$，$\hat{f}\in L^1$. 则反演公式(2)几乎处处成立；当f连续时(2)对所有$x\in R^n$成立.

推论 1（唯一性定理）若$f\in L^1$，$\hat{f}=0$，则$f\overset{a.e.}{=\!=}0$.

(2)可缩写成$f^{\wedge\wedge}=\check{f}$，由此显然推出：

推论 2 若$L^1(R^n,E)$的一子空间$\mathscr{A}$满足：$f\in\mathscr{A}\Rightarrow\hat{f},\check{f}\in\mathscr{A}$，则$\mathscr{A}\to\mathscr{A}$，$f\longmapsto\hat{f}$是一拓扑同构.

当$n=1$时，亦有类似于8.4.5的较精细的结果. 设$f\in L^1(R,E)$，$f(x\pm0)$存在，$S(x)=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$，则

$$S_\beta(x)=\int_{-\beta}^{\beta}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi=\int_0^\infty \varphi_x(\xi)\frac{\sin\xi}{\xi}d\xi;$$

$$S_\beta(x)-S(x)=\int_0^\infty g_x(\xi)\sin\beta\xi d\xi,$$

其中 $$\varphi_x(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}[f(x+\xi)+f(x-\xi)],$$

$$g_x(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\xi^{-1}[f(x+\xi]+f(x-\xi)-2S(x)].$$

于是如8.4.5一样从8.4.3及8.4.4推出：

8.5.4 定理 设$f\in L^1(\mathrm{R},E)$.若f在任何有限区间上囿变或$f'_\pm(x)$存在，则$S_\beta(x)\to S(x)(\beta\to+\infty)$.

Fourier变换的基本初等性质综述于下：

8.5.5 定理 设$f,\varphi\in L^1(\mathrm{R}^n,E),g\in L^1(\mathrm{R}^n),a\in\mathrm{R}^n$，则

$$(\tau_a f)^\wedge=e_a\hat{f},\quad (e_a f)^\wedge=\tau_{-a}\hat{f}; \tag{5}$$

$$P(D)\hat{f}=(\check{P}f)^\wedge,(P(D)f)^\wedge=P\hat{f}; \tag{6}$$

$$(f*g)^\wedge=\hat{f}\hat{g},\quad \hat{f}*\hat{g}=(fg)^\wedge; \tag{7}$$

$$\int(f(x),\varphi(x))dx=\int(\hat{f}(\xi),\hat{\varphi}(\xi))d\xi, \tag{8}$$

(6)中P是R^r上的r次常系数多项式，$D=-i\partial$，前一式要求$\check{P}f\in L^1$，后一式要求$\partial^\alpha f\in C_0(\mathrm{R}^n,E)(|\alpha|<r)$；(7)的后一式要求$\hat{f}$或$\hat{g}$可积；(8)要求$E$是Hilbert空间，$\hat{f}$或$\hat{\varphi}$可积。

证 (5)(6)及(7)的前一式之证明是直接的，对于(6)的后一式只要用分部积分．若$\hat{f}\in L^1$，则

$$(\hat{f}*\hat{g})(\xi)=\int\hat{f}(\xi-\eta)d\eta\int g(x)e^{-ix\cdot\eta}dx$$

$$=\int g(x)e^{-ix\cdot\xi}dx\int\hat{f}(\xi-\eta)e^{ix\cdot(\xi-\eta)}d\eta$$

$$=\int f(x)g(x)e^{-ix\cdot\xi}dx=(fg)^{\wedge}(\xi).$$

若E是Hilbert空间，$\hat{f}\in L^1$，则$|(f(x),\varphi(x))|\leqslant\|f(x)\|\|\varphi(x)\|\leqslant\|\hat{f}\|_1\|\varphi(x)\|$，可见(8)之左端存在，于是

$$\int(f(x),\varphi(x))\,dx=\int\left(\int\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi,\ \varphi(x)\right)dx$$

$$=\int dx\int(\hat{f}(\xi),\varphi(x)e^{-ix\cdot\xi})d\xi$$

$$=\int\left(\hat{f}(\xi),\int\varphi(x)e^{-ix\cdot\xi}dx\right)d\xi$$

$$=\int(\hat{f}(\xi),\hat{\varphi}(\xi))d\xi.$$ □

(7)与显然的等式$\widehat{f^*}=\overline{\hat{f}}$($f\in L^1(\mathrm{R}^n)$，$f^*=\overline{f^{\vee}}$，参看§2)一起推出：$L^1(\mathrm{R}^n)\to C_0(\mathrm{R}^n)$，$f\longmapsto\hat{f}$是一连续的(*)代数同态．由此容易导出以下结果：

8.5.6 定理 若$\varphi(z)$在$|z|<R$内解析，$\varphi(0)=0$，$f\in L^1(\mathrm{R}^n)$，$\|f\|_1<R$，则$\varphi\circ\hat{f}$是某个$g\in L^1(\mathrm{R}^n)$的Fourier变式．

证 设$\varphi(z)=\sum_1^\infty a_kz^k(|z|<R)$，$f_k=\overbrace{f*\cdots*f}^{k\text{个}}$，则$\|f_k\|_1\leqslant\|f\|_1^k(k\geqslant1)$，因此$\sum a_kf_k$在$L^1$中收敛于某个函数$g$，

$$\hat{g}=\sum_k a_k\hat{f}_k=\sum_k a_k\hat{f}^k=\varphi\circ\hat{f},$$

上式中的级数在$C_0(\mathrm{R}^n)$中收敛（即一致收敛）． □

对于Fourier变换，能否运用反演公式(2)是至关重要的．f的光滑性不足以保证(2)成立（与8.4.2对照，本质差别在于T^n是紧群而R^n非紧），而对$f(x)$在$|x|\to\infty$时的"增长"应加的限制变得重要起来．

8.5.7 定义 对任给$f\in C^\infty(\mathrm{R}^n,E)$，$\alpha,\beta\in\mathrm{N}^n$，令

$$\|f\|_{\alpha,\beta}=\|x^\alpha\partial^\beta f(x)\|_\infty,\tag{9}$$

$\mathscr{S}(\mathrm{R}^n,E)=\{f\in C^\infty(\mathrm{R}^n,E)\mid\forall\alpha,\beta\in\mathrm{N}^n:\|f\|_{\alpha,\beta}<\infty\}$，$\mathscr{S}(\mathrm{R}^n)$

$=\mathscr{S}(\mathrm{R}^n,C)$，$\mathscr{S}(\mathrm{R}^n,E)$ 也简写作$\mathscr{S}$，称任何 $f\in\mathscr{S}$ 为速降函数．称 $f:\mathrm{R}^n\to E$ 为缓增函数，若 $\exists r>0$，$f(x)(1+|x|)^{-r}\in L^\infty$．引入记号：

$$\mathscr{O}_M=\{f\in C^\infty(\mathrm{R}^n)\mid\forall\alpha\in\mathrm{N}^n:\partial^\alpha f\text{是缓增函数}\}. \tag{10}$$

易见$\mathscr{S}$依半范族(9)是一F-空间，它有一基本半范族 $\{\|\cdot\|_{P,Q}:P,Q$是R^n上的多项式$\}$，

$$\|f\|_{P,Q}=\|P\cdot Q(D)f\|_u,\quad f\in\mathscr{S}. \tag{11}$$

8.5.8 定理 空间$\mathscr{S}$有以下性质：(i) 若 $X\subsetneq Y$ 记"有连续包含映射$i:X\subset Y$ 且 $\overline{i(X)}=Y$"(依Treves)，则$\mathscr{D}(\mathrm{R}^n,E)\subsetneq\mathscr{S}(\mathrm{R}^n,E)\subsetneq L^p(\mathrm{R}^n,E)(1\leqslant p<\infty)$；(ii) 若 $P=\sum\limits_{|\alpha|<r}a_\alpha(x)D^\alpha$，$a_\alpha\in\mathscr{O}_M$，则$P\in L(\mathscr{S}(\mathrm{R}^n,E))$；(iii)$\mathscr{S}(\mathrm{R}^n,m)=\mathscr{S}(\mathrm{R}^n,\mathrm{C}^m)$是Montel空间（参照2.4.5，2.4.4，1.9.8）．

证 (i) 显然有连续的包含$\mathscr{D}\subset\mathscr{S}$．任给$f\in\mathscr{S}$，

$$\|f\|_p^p\leqslant\|(1+|x|^2)^{n+1}f\|_\infty\int(1+|x|^2)^{-n-1}\|f(x)\|^{p-1}dx,$$

可见有连续的包含$\mathscr{S}\subset L^p$．稠密性由8.3.6推出．

(ii) 只需证对任给$\varphi\in\mathscr{O}_M:\mathscr{S}\to\mathscr{S},f\longmapsto\varphi f$为连续线性算子．任给$f\in\mathscr{S}$，利用Leibniz公式易见$\varphi f\in\mathscr{S}$．若在$\mathscr{S}$中$f_k\to f$，$\varphi f_k\to g$，则依逐点收敛有$f_k\to f,\varphi f_k\to\varphi f=g$，于是所要结论由闭图象定理推出．

(iii) 若A是$\mathscr{S}(\mathrm{R}^n,m)$的有界无限子集，则$A$亦在$\mathscr{E}(\mathrm{R}^n,m)$中有界，从而有 $\{f_k\}\subset A$，在$\mathscr{E}$中 $f_k\to f(2.4.4)$．$\forall\alpha,\beta\in\mathrm{N}^n$，由 $\sup\limits_k\|f_k\|_{\alpha,\beta}<\infty$推出$\|f\|_{\alpha,\beta}<\infty$，故 $f\in\mathscr{S}$．进而不难推出在$\mathscr{S}$中$f_k\to f$，于是(iii)得证．□

空间$\mathscr{S}$的好处在于对它有以下良好结果：

8.5.9 定理 $\mathscr{S}(\mathrm{R}^n,E)\to\mathscr{S}(\mathrm{R}^n,E),f\longmapsto\hat{f}$是一拓扑同构．

证 由1.6.1之推论1及8.5.3之推论2，只需证$\forall f\in\mathscr{S}$：$\hat{f}\in\mathscr{S}$且$\mathscr{S}\to\mathscr{S}$，$f\longmapsto\hat{f}$是连续映射．设$f\in\mathscr{S}(\mathrm{R}^n,E)$，任给$\mathrm{R}^n$上的多项式$P,Q$，依(6)有

$$P\cdot Q(D)\hat{f}=P\cdot(\check{Q}f)^{\wedge}=(P(D)(\check{Q}f))^{\wedge}\in C_0^{-},$$

故$\hat{f}\in\mathscr{S}$．若在$\mathscr{S}$中$f_k\to f,\hat{f}_k\to g$，则依8.5.8之(i)有：

$$\begin{aligned}\|\hat{f}-g\|_u&\leqslant\|\hat{f}-\hat{f}_k\|_u+\|\hat{f}_k-g\|_u\\&\leqslant\|f-f_k\|_1+\|\hat{f}_k-g\|_u\to0(k\to\infty),\end{aligned}$$

可见$\hat{f}=g$，于是闭图象定理推出映射$f\longmapsto\hat{f}$连续． □

显然8.5.5对速降函数恒成立．(7)推出当$f\in\mathscr{S}(\mathrm{R}^n,E)$，$g\in\mathscr{S}(\mathrm{R}^n)$时$f*g\in\mathscr{S}(\mathrm{R}^n,E)$；(8)表明当$E$是Hilbert空间时$\mathscr{S}(\mathrm{R}^n,E)\to\mathscr{S}(\mathrm{R}^n,E),f\longmapsto\hat{f}$依$L^2$范数是等距同构．

8.5.10 Plancherel定理 若E是Hilbert空间，则存在唯一等距同构$F:L^2(\mathrm{R}^n,E)\to L^2(\mathrm{R}^n,E)$，使得$\forall f\in L^1\cap L^2$：$F(f)=\hat{f}$．称$F$为$L^2$上的Fourier变换，且仍记$F(f)=\hat{f}$．

证 因$\mathscr{S}$在L^2中稠密，故$\mathscr{S}(\mathrm{R}^n,E)\to\mathscr{S}(\mathrm{R}^n,E),f\longmapsto\hat{f}$唯一地扩张为一个等距线性映射$F:L^2(\mathrm{R}^n,E)\to L^2(\mathrm{R}^n,E)$．任给$f\in L^2(\mathrm{R}^n,E)$，易见$F^2(\check{f})=f$，故$F$为同构．设$f\in L^1(\mathrm{R}^n,E)\cap L^2(\mathrm{R}^n,E)$，今证$F(f)=\hat{f}$．首先设$E=\mathbf{C}$，则$h=f*f^*\in C(\mathrm{R}^n)\cap L^1,\hat{h}=|\hat{f}|^2\geqslant0$，故由Fatou定理及(3)有

$$\|\hat{h}\|_1\leqslant\varliminf_{\delta\to\infty}\int\hat{W}_\delta(\xi)\hat{h}(\xi)d\xi=h(0),$$

可见$\hat{h}\in L^1$．利用反演公式得：

$$\|f\|_2^2=(f*f^*)(0)=h(0)=\int\hat{h}(\xi)d\xi=\|\hat{f}\|_2^2.$$

取$\{f_k\}\subset\mathscr{S}$：$\|f_k-f\|_2\to0$，则$\|\hat{f}_k-\hat{f}\|_2\to0$．另一方面$\|\hat{f}_k-F(f)\|_2\to0$，因此$F(f)\xlongequal{\text{a.e.}}\hat{f}$．对一般的$E$，$\forall\varphi\in E'$：$\varphi\circ F(f)=F(\varphi\circ f)\xlongequal{\text{a.e.}}(\varphi\circ f)^{\wedge}=\varphi\circ\hat{f}$，由3.2.2之推论3，$F(f)\xlongequal{\text{a.e.}}\hat{f}$． □

任给$f\in L^2(\mathrm{R}^n,E)$，令$f_k=f\chi_{B(0,k)}(k=1,2,\cdots)$，则

$$\hat{f}(\xi)=\lim_k \hat{f}_k(\xi)=\lim_k \int_{|x|\leqslant k} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx; \tag{12}$$

同理
$$f(x)=\lim_k \int_{|\xi|\leqslant k} \hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi, \tag{13}$$

以上两式中的极限是关于$L^2(\mathrm{R}^n,E)$中的范数取的．

L^1函数Fourier 变换的许多性质对L^2函数有适当的推广．例如(7)在以下条件下仍然成立：$f\in L^2(\mathrm{R}^n,E)$，E是 Hilbert 空间，$g\in L^1(\mathrm{R}^n)$（对前者）或$g\in L^2(\mathrm{R}^n)$(对后者)．证前一式如下：取$f_k\in L^1$，$\|f_k-f\|_2\to 0$，则

$$\|\hat{f}_k\hat{g}-(f*g)^\wedge\|_2=\|(f_k-f)*g\|_2\to 0;$$

$$\|\hat{f}_k\hat{g}-\hat{f}\hat{g}\|_2\leqslant\|f_k-f\|_2\|\hat{g}\|_\infty\to 0$$

（参考8.5.10，8.2.2），由此推出$(f*g)^\wedge=\hat{f}\hat{g}$．

参考文献 [14]，[22]，[41]，[60]，[65]，[73]，[75]，[78]，[85]．

习　题

1．$(e^{-|x|})^\wedge(\xi)=(\sqrt{\pi})^{-1}(\sqrt{2})^n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)(1+|\xi|^2)^{-(n+1)/2}$，由此推出$\hat{P}_y(\xi)=e^{-y|\xi|}$，$P_y$如§3(8)；$\hat{F}_s(\xi)=\left(1-\frac{|\xi|}{2s}\right)\chi_{[-2s,2s]}$，$F_s$如§3(7)．

2．若$f\in L^1(\mathrm{R}^n,E)$，则$f(x)\overset{a.e.}{=}\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\hat{f}(\xi)\exp(-\varepsilon|\xi|^2+ix\cdot\xi)d\xi$ $\overset{a.e.}{=}\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\hat{f}(\xi)\exp(-\varepsilon|\xi|+ix\cdot\xi)d\xi$．

3．若$\varphi(x)=\exp(-|x|^2/2)$，则$\hat{\varphi}=\varphi$．

4．设$x>e$时$g(x)=1/\ln x$，$0\leqslant x\leqslant e$时$g(x)=x/e$，$g(-x)=-g(x)$，则$g\in C_0(\mathrm{R})$一致连续，但$\forall f\in L^1(\mathrm{R})$，$\hat{f}\neq g$．

§6 局部紧Abel群上的Fourier变换

经典 Fourier 分析的许多结果实际上仅依赖于 Lebesgue 测度的平移不变性，因而可推广于任何采用 Haar 测度的局部紧群．在一定意义上，现代调和分析就是局部紧群上的 Fourier 分析；局部紧Abel 群上的调和分析与经典 Fourier 分析尤为接近．

以下设 G 是第二可数局部紧Abel加群，λ 是 G 上的Haar测度，当 G 是紧群时约定 $\lambda(G)=1$．

与 $\mathbf{R}^n$ 中的函数族 $\{e^{ia\cdot x}|\ a\in\mathbf{R}^n\}$ 相当的是"特征"概念．

8.6.1 **定义** 称任何连续群同态 $\chi: G\to\mathbf{T}$ 为 G 上的特征，其全体依逐点乘法构成一个群，记作 $\hat{G}$，称为 G 的对偶群．任给 $f\in L^1(G,E)(=L^1(G,E,\lambda))$，$\mu\in M(G)$，分别称

$$\hat{f}(\chi)=(f*\chi)(0)=\int f\bar{\chi}d\lambda \tag{1}$$

与

$$\hat{\mu}(\chi)=(\mu*\chi)(0)=\int\bar{\chi}d\mu\ \ (\chi\in\hat{G}) \tag{2}$$

为 f 与 μ 的Fourier变式，令 $A(\hat{G})=\{\hat{f}|\ f\in L^1(G)\}$．

今指出当 $G=\mathbf{R}^n[\mathbf{T}^n]$ 时，(1)与 §5(1)[§4(1)]一致．任给 $\varphi\in\hat{\mathbf{R}}^n$，必 $\varphi\in C^\infty$(7.3.4)．设 $d\varphi(0)=ia\cdot dx=i\sum a_jdx_j$，$a=(a_j)\in\mathbf{C}^n$，则 $d\varphi(x)/\varphi(x)=\varphi(-x)d\varphi(x+y)|_{y=0}=d\varphi(0)$，由此解出 $\varphi(x)=e^{ia\cdot x}$．条件 $|\varphi(x)|\equiv1$ 推出 $a\in\mathbf{R}^n$；$\varphi\in\hat{\mathbf{T}}^n\Longleftrightarrow a\in\mathbf{Z}^n$．这样，

$$\mathbf{R}^n\to\hat{\mathbf{R}}^n,\ a\longmapsto e^{ia\cdot x} \tag{3}$$

与

$$\mathbf{Z}^n\to\hat{\mathbf{T}}^n,\ k\longmapsto e^{ik\cdot x} \tag{4}$$

是群同构，因此可以认为：$\hat{\mathbf{R}}^n=\mathbf{R}^n$；$\hat{\mathbf{T}}^n=\mathbf{Z}^n$．

8.6.2 定理 设$M=\mathcal{X}(L^1(G))$(4.5.4)；任给$\chi\in\hat{G}$，令$\chi'(f)=\hat{f}(\chi)(f\in L^1(G))$，则$\hat{G}\to M,\chi\longmapsto\chi'$是一双射.

证 给定$\chi\in\hat{G}$，显然$\chi'\in(L^1(G))'$，且$\forall f,g\in L^1(G)$：

$$\chi'(f*g)=\int\overline{\chi(x)}\,d\lambda(x)\int f(y)g(x-y)d\lambda(y)$$

$$=\int f(y)\overline{\chi(y)}\,d\lambda(y)\int g(x-y)\overline{\chi(x-y)}d\lambda(x)$$

$$=\chi'(f)\chi'(g).$$

由$\chi'(|f|\chi)=\|f\|_1$看出$\chi'\neq0$. 取$\varphi\in L^1(G)$：$\chi'(\varphi)=1$，则$\forall a\in G$：

$$\chi(a)=\chi(a)(\varphi*\chi)(0)=(\tau_a\varphi*\chi)(0)=\chi'(\tau_a\varphi),$$

可见χ由χ'唯一确定，即$\hat{G}\to M,\chi\longmapsto\chi'$是单射.

任给$m\in M$、设$\varphi\in L^1(G)$：$m(\varphi)=1$. 令$\chi(x)=m(\varphi_x)$ $(\varphi_x=\tau_x\varphi)$，则

$$\chi(x+y)=m(\varphi*\varphi_{x+y})=m(\varphi_x*\varphi_y)=\chi(x)\chi(y).$$

因$\forall n\in\mathbb{Z}$：$|\chi(x)|^n=|\chi(nx)|\leqslant\|\varphi_{nx}\|_1=\|\varphi\|_1$，故必$|\chi(x)|=1$. 由8.1.4之推论，$\chi(x)$连续，故$\chi\in\hat{G}$. 下面指出$\forall f\in L^1(G)$：$m(f)=\chi'(f)$. 取$g\in L^\infty(G)$：$m(f)=\int fg\,d\lambda$(3.5.4). 于是

$$m(f)=m(f*\varphi)=\int g(x)d\lambda(x)\int f(y)\varphi(x-y)d\lambda(y)$$

$$=\int f(y)d\lambda(y)\int\varphi(x-y)g(x)d\lambda(x)$$

$$=\int f(y)\,m(\tau_{-y}\varphi)d\lambda(y)=\chi'(f). \qquad \square$$

下面将$\hat{G}$等同于M，从而$L^1(G)$上的Fourier变换重合于Gelfand表示(4.5.5). 于是直接从4.5.8得出：

推论 $\hat{G}$依使每个$\hat{f}(f\in L^1(G))$连续的最弱拓扑（下面称弱拓扑）是一个LCH；$\forall f\in L^1(G)$：$\hat{f}\in C_0(\hat{G})$；$L^1(G)\to C_0(\hat{G})$，$f\longmapsto\hat{f}$是一(*)代数同态（等式$\widehat{f^*}=\overline{\hat{f}}$可直接验证）.

8.6.3 定理 $\hat{G}$依弱拓扑是第二可数的局部紧群.

证 任给紧集$K\subset G,\varepsilon>0$，令

$$P(K,\varepsilon)=\{\chi\in\hat{G}\mid\forall x\in K:\ |\chi(x)-1|<\varepsilon\}. \qquad (5)$$

依1.2.3可验证，以所有$P(K,\varepsilon)$作$1\in\hat{G}$的基邻域$\hat{G}$是一拓扑群，其拓扑暂且称为"P拓扑". $\forall f\in L^1(G),\varepsilon>0$，取紧集$K\subset G$：$\int_{K^c}|f|\,d\lambda<\varepsilon$. 若$\chi,\chi_0\in\hat{G},\chi\bar{\chi}_0\in P(K,\varepsilon)$，则

$$|\hat{f}(\chi)-\hat{f}(\chi_0)|\leqslant\left(\int_K+\int_{K^c}\right)|f||\chi-\chi_0|\,d\lambda<\varepsilon\|f\|_1+2\varepsilon,$$

可见$\hat{f}$依P拓扑连续，故P拓扑不弱于弱拓扑. 另一方面，设$P(K,\varepsilon)$如(5)，取$f\in L^1(G)$，$\hat{f}(1)=1$；取G的0-邻域U，使当$x,y\in G$，$x-y\in U$时$\|f_x-f_y\|_1<\varepsilon/3$(8.1.4)；设$a_0=0$，$K\subset\bigcup_1^n(a_i+U)$，则$N=\{\chi\in\hat{G}\mid\ |\hat{f}_{a_i}(\chi)-1|<\varepsilon/3,0\leqslant i\leqslant n\}$是$1\in\hat{G}$依弱拓扑的邻域. 任给$\chi\in N,x\in a_i+U(1\leqslant i\leqslant n)$，

$$\begin{aligned}|\chi(x)-1|&\leqslant|\chi(x)-\chi(x)\hat{f}(\chi)|+|\hat{f}_x(\chi)\\&-\hat{f}_{a_i}(\chi)|+|\hat{f}_{a_i}(\chi)-1|<\varepsilon,\end{aligned}$$

可见$N\subset P(K,\varepsilon)$. 这表明$P$拓扑重合于弱拓扑. 依1.8.4与1.8.7，$\hat{G}$可分且可度量化，从而是第二可数的. □

Fourier变换的反演问题依赖于正定函数概念.

8.6.4 定义 称一函数$\varphi\in C(G)$为正定的，若对任给有限组$\{x_1,\cdots,x_n\}\subset G$，$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}\subset\mathbb{C}$，成立

$$\sum_{j,k}\alpha_j\bar{\alpha}_k\varphi(x_j-x_k)\geqslant 0. \qquad (6)$$

易见$\chi\in\hat{G}$与$f*f^*(f\in L^2(G))$是正定的. 正定函数φ有性质，(i)$\varphi^*=\bar{\varphi}$；(ii)$|\varphi(x)|\leqslant\varphi(0)$；(iii)$\varphi$一致连续. 以证(iii)为例：在(6)中令$x_1=0$，$x_2=x,x_3=y$，$\alpha_1=2[1-\mathrm{Re}\varphi(y-x)]$，$\alpha_2=-\alpha_3=\overline{\varphi(x)}-\overline{\varphi(y)}$，$\varphi(0)=1$，则得$|\varphi(x)-\varphi(y)|^2\leqslant 2[1-\mathrm{Re}\varphi(y-x)]$.

8.6.5 Bochner 定理 设$\varphi:G\to\mathbb{C}$. 则φ正定$\Longleftrightarrow$存在正

测度 $\mu\in M(\hat{G})$，$\varphi(x)=\int\chi(x)d\mu(\chi)(x\in G)$.

证　设φ正定，可设$\varphi(0)=1$. 令$L(f)=\int f\varphi d\lambda$，则 $L\in(L^1(G))'$且$\|L\|=\|\varphi\|_\infty=1$(3.5.4). 若$f\in C_c(G)$，$\{A_j\}$是supp$f$的一分解(3.1.1)，$x_j\in A_j$，则$\sum f(x_j)\overline{f(x_k)}\varphi(x_j-x_k)\lambda(A_j)\cdot\lambda(A_k)\geqslant 0$，由此推出

$$L(f*f^*)=\iint f(x)\overline{f(y)}\varphi(x-y)d\lambda(x)d\lambda(y)\geqslant 0. \quad (7)$$

易见(7)亦对$f\in L^1$成立，因此L是(*)代数$L^1(G)$上的正泛函(4.7.8). 令$(f,g)=L(g^**f)$（参看4.7.9），则

$$|L(f)|\leqslant|L(f)-(f,g)|+\sqrt{(f,f)}+\sqrt{(f,f)}\,|\sqrt{(g,g)}-1|. \quad (8)$$

固定$f\in L^1(G)$. $\forall\varepsilon>0$，取G的紧0-邻域V，使得$\forall x\in G$，$y,z\in V$：$|\varphi(x-y)-\varphi(x)|<\varepsilon$，$|\varphi(y-z)-1|<\varepsilon$；令$g=\chi_V/\lambda(V)$. 则可直接验证$|L(f)-(f,g)|<\varepsilon\|f\|_1$，$|(g,g)-1|<\varepsilon$. 于是(8)推出$|L(f)|^2\leqslant(f,f)=L(h)$，$h=f*f^*$. 令$h^n=\overbrace{h*\cdots*h}^{n个}$，则从$|L(f)|^2\leqslant L(h)\leqslant[L(h^2)]^{1/2}$归纳地得出$|L(f)|^2\leqslant[L(h^m)]^{1/m}(m=2^n)$，因此$|L(f)|^2\leqslant\|\hat{h}\|_\infty=\|\hat{f}\|_\infty^2$(参考4.5.3,4.5.6). 由此推出，$F:A(\hat{G})\to\mathbf{C},\hat{f}\longmapsto L(f)$是一连续线性泛函，且$\|F\|\leqslant 1$. 依1.7.1,3.5.5，有$\mu\in M(\hat{G})$：

$$L(f)=\int\hat{f}(\chi^{-1})d\mu(\chi)=\int f(x)d\lambda(x)\int\chi(x)d\mu(\chi),$$

可见$\varphi(x)=\int\chi(x)d\mu(\chi)$（注意$\varphi$连续！）. 由$\|\mu\|=\|F\|\leqslant 1=\varphi(0)=\mu(\hat{G})$推出$\mu(\hat{G})=\|\mu\|$，由此看出$\mu$是正测度.

逆命题的证明是直接的. □

8.6.6 定理　设P是$L^1(G)$中的正定函数生成的子空间.

则存在$\hat{G}$上的Haar测度ρ，使得对任给$f\in P$，有$\hat{f}\in L^1(\hat{G},\rho)$，且成立**反演公式**：

$$f(x)=\int\hat{f}(\chi)\chi(x)d\rho(\chi),\quad x\in G. \tag{9}$$

证 任给$f,h\in P$，由8.6.5有$\mu,\nu\in M(\hat{G})$：

$$f(x)=\int\chi(x)d\mu(\chi),\quad h(x)=\int\chi(x)d\nu(\chi). \tag{10}$$

由此易推出$\forall g\in L^1(G)$：$(f*g)(0)=\int\hat{g}(\chi)d\mu(\chi)$，从而

$$\int\hat{g}\hat{h}d\mu=(f*g*h)(0)=(h*g*f)(0)=\int\hat{g}\hat{f}d\nu.$$

因$A(\hat{G})$在$C_0(\hat{G})$中稠密(4.7.3)，故$\hat{h}d\mu=\hat{f}d\nu$. 这表明

$$L(\varphi)=\int(\varphi/\hat{h})d\nu,\quad \varphi\in C_c(\hat{G}) \tag{11}$$

与h的选取无关，只要在suppφ上$\hat{h}>0$. 这样的$h\in P$存在：任给$\chi_0\in$suppφ，取$u\in L^1(G)$：$\hat{u}(\chi_0)\neq0$，不妨设$u\in C_c(G)$. 因当χ邻近χ_0时$(u*u^*)^\wedge(\chi)=|\hat{u}(\chi)|^2>0$，故有有限个$u_j\in C_c(G)$：$h=\sum u_j*u_j^*\in P$，在supp$\varphi$上$\hat{h}(\chi)=\sum|\hat{u}_j(\chi)|^2>0$，$h$合于(11)的要求. 于是(11)定义一正线性泛函，它决定$\hat{G}$上一正测度ρ，显然$\rho\neq0$. 设φ,h如(11)，$\chi_0\in\hat{G}$，$\psi(\chi)=\varphi(\chi_0^{-1}\chi)$，$h_1=h\chi_0$，则$\hat{h}_1(\chi)=\hat{h}(\chi\chi_0)$，$h_1(x)=\int\chi(x)d\nu(\chi\chi_0)$，

$$L(\psi)=\int[\psi(\chi)/\hat{h}_1(\chi)]d\nu(\chi\chi_0)=L(\varphi),$$

这表明ρ是Haar测度. 由

$$\int\varphi\hat{f}d\rho=L(\varphi\hat{f})=\int(\varphi\hat{f}/\hat{h})d\nu=\int\varphi d\mu$$

推出$d\mu=\hat{f}d\rho$，$\hat{f}\in L^1(\hat{G},\rho)$. 在(10)中令$d\mu=\hat{f}d\rho$得出(9). □

任给$x\in G$，令$x'(\chi)=\chi(x)$ $(\chi\in\hat{G})$，易见$x'\in G^{\wedge\wedge}=(\hat{G})^\wedge$. Pontryagin证明了以下著名结果（参看[38]）：

8.6.7 对偶定理 $G \to G^{\wedge\wedge}, x \longmapsto x'$ 是一拓扑同构.

这一结果显然可与1.8.2相类比. 若令

$$A^{\perp}=\{\chi \in \hat{G} \mid \forall a \in A: \chi(a)=1\}, A \subset G;$$
$$F^{\perp}=\{x \in G \mid \forall \chi \in F: \chi(x)=1\}, F \subset \hat{G} \tag{12}$$

(参照§1.7(3)), 则$G^{\perp}=\{1\}$, 从而由8.6.7推出$\hat{G}^{\perp}=\{0\}$, 这一等式正好与Hahn-Banach定理($X'^{\perp}=\{0\}$)相当.

8.6.8 唯一性定理 $\forall \mu \in M(G)[M(\hat{G})]: \hat{\mu}=0 \Rightarrow \mu=0$.

证 只需对$\mu \in M(\hat{G})$证明. 由$\hat{\mu}(x)=\int \overline{\chi(x)} d\mu(\chi)=0$推出

$$\int \hat{f} d\mu=\int d\mu(\chi) \int f(x) \overline{\chi(x)} d\lambda(x)=\int f(x) \hat{\mu}(x) d\lambda(x)=0$$

$(f \in L^1(G))$. 因$A(\hat{G})$在$C_0(\hat{G})$中稠密, 故$\mu=0$. □

8.6.9 Plancherel 定理 存在唯一等距同构$F: L^2(G) \to L^2(\hat{G})$, 使得$\forall f \in L^1 \cap L^2$: $F(f)=\hat{f}$(称映射F为$L^2(G)$上的Fourier变换).

证 若$f \in L^1(G) \cap L^2(G)$, 则$g=f * f^* \in P$(记号依8.6.6), 于是

$$\|f\|_2^2=g(0)=\int \hat{g} d\rho=\|\hat{f}\|_2^2.$$

因$L^1 \cap L^2$在L^2中稠密, 故$L^1(G) \cap L^2(G) \to L^2(\hat{G}), f \longmapsto \hat{f}$唯一地扩张为一个等距线性映射$F: L^2(G) \to L^2(\hat{G})$. 下面说明在$L^2(\hat{G})$中$(\operatorname{Im} F)^{\perp}=0$(这推出$F$为双射). 任取$\varphi \in (\operatorname{Im} F)^{\perp}$, $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$, 令$d\mu=\varphi \hat{f} d\rho$, 则$\mu \in M(\hat{G})$. 任给$x \in G$,

$$\hat{\mu}(x)=\int \overline{\chi(x)} \varphi(\chi) \hat{f}(\chi) d\rho(\chi)=\int \varphi(\tau_{-x} f)^{\wedge} d\rho=0,$$

故$\mu=0$, 从而$\varphi \hat{f} \stackrel{a.e.}{=} 0$(关于$\rho$). 由此不难推出$\varphi \stackrel{a.e.}{=} 0$. □

8.6.10 定理 设G是紧的. 则$\hat{G}=\{\chi_i\}$是离散群, 它构成$C(G)$与$L^p(G)(1 \leqslant p<\infty)$的基本集且是$L^2(G)$的 Hilbert 基;

任给Hilbert空间E，每个$f\in L^2(G,E)$可展开为在$L^2(G,E)$中收敛的Fourier级数$f=\sum\hat{f}(\chi_i)\chi_i$，且有等距同构$L^2(G,E)\to l^2(\hat{G},E)$，$f\longmapsto\hat{f}$（$\hat{f}$依(1)）.

证　任给$\chi\in P(G,1)$（记号依(5)），由$\chi(G)$是T的紧子群推出$\chi=1$，可见$\hat{G}$是离散的（第二可数性推出$\hat{G}$是可数的）.8.6.8与1.7.2之推论4一起推出$\hat{G}$是$L^p(G)(1\leqslant p<\infty)$的基本集；4.7.3推出$\hat{G}$是$C(G)$的基本集. 任给$\chi_i\in\hat{G},a\in G$，有$\int\chi_i d\lambda=\int(\tau_a\chi_i)d\lambda=\chi_i(a)\int\chi_i d\lambda$，因此当$\int\chi_i d\lambda\neq 0$时必$\chi_i=1$. 这推出$\int\chi_i\bar{\chi}_j d\lambda=\delta_{ij}$，从而$\hat{G}$构成$L^2(G)$的Hilbert基(1.10.6). 定理最后一个结论直接从3.5.6推出（参照8.4.7之推论1）. □

最后，考虑一个应用以上结论的例子.

8.6.11 例　设$C_b(G)$记G上有界连续函数之空间，其中采用上确界范数. 若$f\in C_b(G)$，$\{f_a\,|a\in G\}$ ($f_a=\tau_a f$)在$C_b(G)$中的闭包H是紧的，则说f是G上的**殆周期函数**. 对应$a\longmapsto f_a$在H中诱导出一群结构，使H成为一紧Abel群. 定义$\varphi(f_a)=f(a)$，则易见φ可连续地延拓到H上. 由8.6.10，任给$\varepsilon>0$，存在有限集$\{\varphi_i\}\subset\hat{H}$，$\{a_i\}\subset$C，使得$\|\sum a_i\varphi_i-\varphi\|_u<\varepsilon$，于是

$$|\sum a_i\varphi_i(f_a)-f(a)|<\varepsilon\quad(\forall a\in G).\tag{13}$$

令$\chi_i(a)=\varphi_i(f_a)$，则$\chi_i\in\hat{G}$. 于是(13)表明$\|\sum a_i\chi_i-f\|_u<\varepsilon$. 特别，$\mathrm{R}^n$上的殆周期函数恒可用形如$e^{ia\cdot x}(a\in\mathrm{R}^n)$的函数的有限线性组合一致逼近.

参考文献：[9]，[22]，[38]，[71]，[77]，[85]，[86].

习　题

1. $L^1(G)$有单位元$\Longleftrightarrow G$是离散群.

2. 若$f\in L^1(G,E)$，$\hat{f}=0$，则$f\overset{a.e.}{=\!=}0$.

3. $P[P\cap L^2(G)]$在$L^1(G)[L^2(G)]$中稠密（P依8.6.8）.

4. 若H是G的闭子群，则$(G/H)^\wedge\cong H^\perp$，$\hat{G}/H^\perp\cong\hat{H}$.

§7 线性表示

当考察某类数学结构时，现代数学中流行的作法是：从其中选定一种“标准的”结构M，然后通过研究到M的“同态”或“表示”来阐明该类结构.通常采用$L(E)$作为标准的代数，而取$\mathrm{GL}(E)$作为标准的拓扑群，E是B-空间或Hilbert 空间. 为确定起见，下面设E是一可分Hilbert空间，G是第二可数局部紧群，λ是G上的Haar测度，A是一个$(*)$代数，e记A或G的单位元，$I=1_E$.

8.7.1 定义 若$U:A\to L(E)$是一$(*)$代数同态，当A含单位元e时$U(e)=I$，则称U是A(关于E)的一个$(*)$表示. 若$U:G\to\mathrm{GL}(E)$是一群同态，使得$\forall x\in E$：$G\to E$，$a\longmapsto U(a)\cdot x$连续，则称U为G（关于E）的一个连续线性表示；若$\forall a\in G$：$U(a)\in\mathrm{U}(E)=\{T\mid T\in L(E)$是酉算子$\}$，则称$U$为酉表示. 为简便计，下面将以上两种情况下的$U$概称为（$A$或$G$的)表示，$U(a)$也写作$U_a$.

设U是A或G关于E的一个表示，规定一些常用术语如下：说一子空间$F\subset E$对U不变，若$\forall a$：$U_a(F)\subset F$. 若$E=\oplus E_i$是一直和[Hilbert和]，U_i是A或G关于E_i的表示，$U(a)\cdot(\sum x_i)=\sum U_i(a)x_i(x_i\in E_i)$，则说$U$是$\{U_i\}$的直和[Hilbert和]，写作$U=\oplus U_i$. 设$V$是另一个(关于$E_1$的)表示，若存在拓扑[等距]同构$T:E\to E_1$，使得$V_a=TU_aT^{-1}$，则说$U$与$V$相似[等价]. 若$U$没有$E$，$0$之外的闭不变子空间，则称$U$为**既约表示**；若$U$相似于既约表示的直和，则说$U$是**完全可约**的. 任给$B\subset E$，以$\langle B\rangle$记$B$生成的$E$的闭子空间. 若有$\xi\in E$，

$\langle\{U_a\xi\}\rangle=E$，则称$U$为**循环表示**，称$\xi$为**循环向量**．显然，$U$是既约的$\Longleftrightarrow$每个$x\in E\setminus 0$是循环向量．若$U$是$(*)$表示或酉表示，$F=\bigcap \mathrm{Ker}U_a$，则$F$与$F^{\perp}$都对$U$不变，且$F^{\perp}=\langle\bigcup(\mathrm{Ker}\,U_a)^{\perp}\rangle=\langle\bigcup \mathrm{Im}U_a\rangle$；当$F=0$时说$U$是**非退化的**．

8.7.2 定理 设U是$A[G]$关于E的$(*)$表示[酉表示]，则E可表为Hilbert和$E=E_0\oplus E_1\oplus\cdots$，其中$E_0=\bigcap \mathrm{Ker}U_a$；$U$是$\{U_i\}$的Hilbert和，$U_i$记$U$在$E_i$上的限制，当$i\geqslant 1$时$U_i$是循环表示．

证 若$E_0\neq E$，取$E_0^{\perp}\setminus 0$的可数稠密子集$\{x_i\}$，令$E_1=\langle\{U_a\cdot x_1\}\rangle$．若$E\neq E_0\oplus E_1$，则必有最小的$i$，使得$x_i$在$(E_0\oplus E_1)^{\perp}$上有非零正投影$y_i$，令$E_2=\langle\{U_a\cdot y_i\}\rangle$．经有限或可数个这样的步骤后得出所要分解． □

8.7.3 定理 若U是A的一个表示，则$\|U_a\|\leqslant\|a\|$，因此U是连续同态（与"$\forall\, m\in\mathcal{X}(A)$：$|m(a)|\leqslant\|a\|$"对照！）．

证 可设A含单位元e，否则可将A嵌入含单位元e的B-代数$\tilde{A}=A\oplus\mathbf{C}e$(§4.5中所述的"附加"单位元的作法显然亦适用于非交换代数)，$\tilde{A}$依对合$(a+\beta e)^*=a^*+\bar{\beta}e(a\in A,\beta\in\mathbf{C})$成为$(*)$代数，$U$通过$U(a+\beta e)=U(a)+\beta I$扩张为$\tilde{A}$的一个表示．

任给$a\in A$，显然$\sigma(U_a)\subset\sigma(a)$（记号依§4.5），于是

$$\|U_a\|^2=\|U_a^*U_a\|=\|U(a^*a)\|=r(U(a^*a))$$
$$\leqslant r(a^*a)\leqslant\|a^*a\|\leqslant\|a\|^2. \qquad □$$

$(*)$表示与正泛函(4.7.8)之间有密切联系．

8.7.4 定理 设A是含单位元e的(B^*)代数．(i)若U是A关于E的表示，$\xi\in E$，则$f(a)=(U_a\xi,\xi)$是A上的正泛函；(ii)任给A上的正泛函f，存在Hilbert空间H及A关于H的表示U，$\xi\in H$，使$f(a)=(U_a\xi,\xi)(a\in A)$，且$\xi$是$U$的循环向量．

证 验证(i)是直接的，今证(ii)．不妨设$f\neq 0$．令$g(x,y)=f(y^*x)$，$N=\{x\in A\,|\,g(x,x)=0\}$．显然$N$是$A$的线性子空间．令$H_0=A/N$，$\tilde{x}=x+N(x\in A)$，$(\tilde{x},\tilde{y})=g(x,y)$，则易验证$(\tilde{x},\tilde{y})$是$H_0$上的内积．给定$x\in A$，将4.7.9用到正泛函$\varphi(a)=f(x^*ax)$得

$$(\widetilde{ax},\widetilde{ax})=g(ax,ax)=\varphi(a^*a)\leqslant\varphi(e)\|a\|^2=\|\tilde{x}\|^2\|a\|^2, \tag{1}$$

其中$\|\tilde{x}\|^2=(\tilde{x},\tilde{x})$．(1)表明$\tilde{x}=0\Rightarrow\widetilde{ax}=0$，从而$\tilde{x}=\tilde{y}\Rightarrow\widetilde{ax}=\widetilde{ay}$，于是由$U_a\tilde{x}=\widetilde{ax}$定义一合理的线性算子$U_a:H_0\to H_0$．(1)表明$\|U_a\|\leqslant\|a\|$，因此$U_a$可延拓到$H_0$的完备化$H$(如令$H$是$H_0$在$H_0''$中的闭包)上．直接看出$A\to L(H)$，$a\longmapsto U_a$是一代数同态，$U_e=I$．任给$a,x,y\in A$，

$$(\widetilde{a^*x},\tilde{y})=g(a^*x,y)=g(x,ay)=(\tilde{x},\widetilde{ay})$$

(参看4.7.9)，可见$U_{a^*}=U_a^*$，U是一(*)表示．令$\xi=\tilde{e}$，则$(U_a\xi,\xi)=(\tilde{a},\tilde{e})=g(a,e)=f(a)$，$\xi$是$U$的循环向量．□

下面考虑G的酉表示．首先建立酉表示与(*)表示之间的一个重要联系．

8.7.5 定理 若G是幺模群，则G的酉表示之全体与$L^1(G)$的非退化(*)表示之全体成一一对应，相互对应的表示有相同的闭不变子空间．

证 就G为Abel加群的情况给出证明．给定表示$U:G\to \mathrm{U}(E)$，对任给$f\in L^1(G)$，$x\in E$，令

$$U(f)x=\int(U_sx)f(s)d\lambda(s), \tag{2}$$

则$U(f)\in L(E)$，且$\|U(f)\|\leqslant\|f\|_1$．不难验证$f\longmapsto U(f)$是$L^1(G)$的一个(*)表示．例如证"$U(f*g)=U(f)U(g)$"于下：

$$U(f*g)x=\int(U_s x)d\lambda(s)\int f(t)g(s-t)d\lambda(t)$$

$$=\int f(t)d\lambda(t)\int(U_{s+t}x)g(s)d\lambda(s)$$

$$=\int(U_t U(g)x)f(t)d\lambda(t)=U(f)U(g)x.$$

给定$a\in G, x\in E$. 取G的0-邻域基$\{V_n\}$; 取$\varphi_n\in C(G)$: $\varphi_n\geqslant 0$, $\operatorname{supp}\varphi_n\subset a+V_n$, $\|\varphi_n\|_1=1$. 任给 $\varepsilon>0$, 取 n 充分大, 使得$s\in a+V_n\Rightarrow\|(U_a-U_s)x\|<\varepsilon$, 于是

$$\|(U(\varphi_n)-U_a)x\|\leqslant\int_{a+V_n}\|(U_s-U_a)x\|\varphi_n(s)d\lambda(s)\leqslant\varepsilon, \quad (3)$$

可见$U(\varphi_n)x\to U_a x(n\to\infty)$, 这表明表示 $a\longmapsto U_a$ 由表示 $f\longmapsto U(f)$唯一决定. 若$x\neq 0$, 则由(3)看出 n 充分大时$U(\varphi_n)x\neq 0$, 因此$f\longmapsto U(f)$是非退化表示. 从(2)(3)直接看出表示$a\longmapsto U_a$与$f\longmapsto U(f)$有相同的闭不变子空间.

现在设V是 $L^1(G)$关于E的一个非退化表示. 容易看出, 若F是$\bigcup_f \operatorname{Im}V(f)$生成的$E$的子空间, 则$\overline{F}=E$. 设$\varphi_n, a$仍如上述, $f\in L^1(G)$, 则$\|\varphi_n * f-\tau_{-a}f\|_1\to 0$(8.3.2), 于是依8.7.3有$\|V(\varphi_n * f)-V(\tau_{-a}f)\|\to 0(n\to\infty)$. 令

$$U_a(V(f)x)=V(\tau_{-a}f)x=\lim_n V(\varphi_n)V(f)x, \qquad (4)$$

则U_a自然地扩张为F(从而E)上的线性算子, 它满足$U_a V(f)=V(\tau_{-a}f)$, $\|U_a\|\leqslant\varliminf_n\|V(\varphi_n)\|\leqslant 1$. 显然$U_{a+b}=U_a U_b$, $U_0=I$. 从$\|U_a x\|\leqslant\|x\|=\|U_{-a}U_a x\|\leqslant\|U_a x\|$推出 $U_a\in \mathrm{U}(E)$. (4) 表明$a\longmapsto U_a x$是连续映射, 因此$a\longmapsto U_a$是G的一个酉表示. 给定x, $y\in E$, 泛函$f\longmapsto(V(f)x,y)$属于$(L^1(G))'$, 于是有 $h\in L^\infty(G)$: $(V(f)x,y)=\int fh d\lambda$, 从而对任给$f,g\in L^1(G)$有:

$$\begin{aligned}(V(f)V(g)x,y)&=\int h(s)d\lambda(s)\int f(t)g(s-t)d\lambda(t)\\&=\int f(t)d\lambda(t)\int h(s)g(s-t)d\lambda(s)\\&=\int(V(\tau_{-t}g)x,y)f(t)d\lambda(t)\\&=\left(\int(U_tV(g)x)f(t)d\lambda(t),y\right)\\&=(U(f)V(g)x,y),\end{aligned}$$

其中 $U(f)$ 依(2). 这就推出 $V(f)|F=U(f)|F$，从而 $V(f)=U(f)$. □

如以下基本定理所指明的，G 有"足够多"的既约酉表示（与1.7.2相对照）.

8.7.6 定理(Gelfand-Raikov, 1944) 任给 $a\in G\setminus e$，存在 G 关于某个 E 的既约酉表示 U：$U_a\neq I$.

下面指出证明的几个步骤(详细证明参看[38])，借以说明8.7.5的作用. 设 G 是 Abel 加群，取 G 的对称 0-邻域 V，使 $\lambda(V)<\infty$，$a\overline{\in}V+V$. 令 $\varphi=\chi_V$，则 $2\lambda(V)=\|\tau_{-a}\varphi-\varphi\|_1\neq0$，由此可推出存在 $L^1(G)$ 的既约表示 T：$T(\tau_{-a}\varphi)\neq T(\varphi)$(这是难点所在!). 依8.7.5，$T$ 决定 G 的既约酉表示 U，它必满足 $U_a\neq I$，否则将有

$$\begin{aligned}T(\tau_{-a}\varphi)x&=\int(U_sx)\varphi(s-a)d\lambda(s)\\&=\int(U_sU_ax)\varphi(s)d\lambda(s)=T(\varphi)x!\end{aligned}$$

关于紧群的酉表示可得到丰富的信息. 为简便计，我们仍限于考虑Abel群.

8.7.7 定理 设 U 是紧Abel群 G 关于 E 的酉表示. (i)若 U 是既约的，则 $\dim E=1$，且 $\exists\chi\in\hat{G}$：$U_a=\chi(a)I$；G 的既约酉表示之全体与 $\hat{G}$ 成一一对应；(ii) 设 $\hat{G}=\{\chi_i\}$，$P_i=U(\chi_i)$（依

(2))，则 P_i 是正投影算子，$E_i=\mathrm{Im}P_i$ 对 U 不变，$E=\bigoplus E_i$；
(iii)若 $E=L^2(G)$, $U_a=\tau_{-a}$，则 $P_i=\chi_i*$(用(ii)的记号)，E_i 是 U 的仅有的1维不变子空间.

证 (i)设 $x,y,z\in E$，$\int(x,U_sz)(U_sz,y)d\lambda(s)$ 关于 (x,y) 是Hermite双线性的，其绝对值 $\leqslant\|z\|^2\|x\|\|y\|$，故依1.10.10有

$$\int(x,U_sz)(U_sz,y)d\lambda(s)=(T_zx,y),\tag{5}$$

其中 $T_z\in L(E)$. 易验明 $T_zU_a=U_aT_z$. 今证 $T_z=\alpha(z)I$. 可设 T_z 是自伴的，以 $\{P_t|t\in\mathrm{R}\}$ 记其谱族，则 $P_tU_a=U_aP_t$(4.8.2)，由此推出 $\mathrm{Im}P_t$ 是 U 的闭不变子空间，从而 $P_t=0$ 或 I，于是§4.8(7)推出 $T_z=\alpha(z)I$. 由(5)，

$$\alpha(z)\|x\|^2=\int|(U_sz,x)|^2d\lambda(s)=\int|(z,U_{-s}x)|^2d\lambda(s)$$
$$=\int|(U_sx,z)|^2d\lambda(s)=\alpha(x)\|z\|^2,$$

可见 $\alpha(x)=c\|x\|^2$，c 是正常数. 任给法正交系 $\{x_i\}\subset E$，

$$\lambda(G)=\int\|U_sx_1\|^2d\lambda(s)\geqslant\int\sum_i|(U_sx_1,x_i)|^2d\lambda(s)$$
$$=\sum_i\alpha(x_i)\|x_1\|^2=c+c+\cdots$$

(参考§1.10(6))，可见 $\dim E<\infty$（至此尚未用到 G 的交换性!）. 任给 $a\in G$，取 U_a 的特征值 $\chi(a)$，则 $E_a=\mathrm{Im}(U_a-\chi(a)I)$ 是 U 的不变子空间（G 的可换性用于此!），因此 $E_a=0$, $U_a=\chi(a)I$, $\dim E=1$（否则 U 必非既约），显然 $\chi\in\hat{G}$. 每个 $\chi\in\hat{G}$ 决定 G 的一个既约酉表示是明显的.

(ii)从 $\chi_i^*=\chi_i$, $\chi_i*\chi_j=\delta_{ij}\chi_i$ 推出 $P_i^*=P_i$, $P_iP_j=\delta_{ij}P_i$，可见 P_i 是正投影算子且 E_i 互相正交(1.10.9). 因 $\{\chi_i\}$ 是 $L^1(G)$ 的基本集(8.6.10)，故 $\bigcap(\mathrm{Im}P_i)^\perp=\bigcap\mathrm{Ker}P_i=\bigcap_f\mathrm{Ker}\,U(f)=0$ (8.7.5)，因此 $E=\bigoplus E_i$(1.10.7). 利用(2)不难看出 $P_iU_a=$

U_aP_i，由此推出E_i对U不变．

(iii)若$U_a=\tau_{-a}$，则对任给$f\in L^1(G)$，$u,v\in L^2(G)$有：

$$(U(f)u,v)=\int(\tau_{-s}u,v)f(s)d\lambda(s)$$

$$=\int(f*u)\bar{v}d\lambda=(f*u,v),$$

可见$U(f)=f*$；$P_iu=\chi_i*u=\hat{u}(\chi_i)\chi_i$，$\dim E_i=1$．若$C\varphi\subset L^2(G)$是$U$的1维不变子空间，则依(i)有$\tau_a\varphi=\chi_i(a)\varphi$，$C\varphi=C\chi_i=E_i$． □

参考文献：[22]，[23]，[38]，[64]，[85]．

习　题

1．设U,V是A的循环表示，循环向量分别为x,y，$(U_ax,x)=(V_ay,y)$ $(\forall a\in A)$，则U与V等价．

2．设U是$A[G]$关于E的$(*)$表示[酉表示]，$P\in L(E)$是正投影算子，则$\mathrm{Im}P$对U不变$\Longleftrightarrow U_aP=PU_a$．

§8　Lie 群的表示

本节中设G是一n维Lie群，下面将沿用上章及上节的术语与记号．若E是一m维实(或复)向量空间，则$\mathrm{GL}(E)$可等同于$\mathrm{GL}(m)$（或$\mathrm{GL}(m;\mathbf{C})$）．由此容易看出，任何连续线性表示$U:G\to\mathrm{GL}(E)$必定是连续群同态，从而为Lie群同态(7.3.4)，下面称这样的U为G的一个(m维)表示．当$U:G\to\mathrm{GL}(E)$是一表示时显然$(a,x)\longmapsto U_ax$是G对E的一个Lie群作用(7.5.1)．反之，Lie群作用标准地产生Lie群的表示：

8.8.1 定理　设θ是G对流形M的Lie群作用，$x\in M$，$ax=x(\forall a\in G)$．则$G\to\mathrm{GL}(M_x)$，$a\longmapsto\theta_{a*}|M_x$是$G$的表示．

证　任给$X\in M_x$，设$\beta:a\longmapsto(0,X)$，则分解

$$G\xrightarrow{\beta}TG\times TM\cong T(G\times M)\xrightarrow{\theta_*}TM$$

表明$G\to M_x, a\longmapsto\theta_{a*}(X)$连续，由此看出所要证. □

令$I_a=\lambda_a\circ\rho_a^{-1}$，将8.8.1用到$G$对自身的作用$G\times G\to G$，$(a,x)\longmapsto I_a(x)$，得到$G$的所谓伴随表示：

$$\mathrm{Ad}: G\to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}), a\longmapsto I_{a*}|G_e, \tag{1}$$

其中已置$\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G)=G_e$. (1)又诱导出Lie代数同态

$$\mathrm{ad}=(\mathrm{Ad})_*: \mathfrak{g}\to L(\mathfrak{g})=\mathrm{Lie}\,\mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \tag{2}$$

（参看7.2.5），称ad为“$\mathfrak{g}$的伴随表示”．伴随表示有一些重要的应用，下面举两个例子．首先建立

8.8.2 引理 $\mathrm{ad}_X(Y)=[X,Y]$, $X,Y\in\mathfrak{g}$.

证 只要证$(\mathrm{ad}_XY)_e=[X,Y]_e$. 设$\theta$是$X$的流(5.7.2)，$h(t)=\exp tX$，则$\theta_t=\rho_{h(t)}$(§7.3(3)). 于是(参考6.3.7)

$$(\mathrm{ad}_XY)_e=\left[\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(\exp tX)\,|_{t=0}\right](Y)(e)$$

$$=\frac{d}{dt}[(\rho_{h(t)}^{-1})_*(\lambda_{h(t)})_*Y_e]\,|_{t=0}$$

$$=\frac{d}{dt}[\theta_t^*Y(\theta(t,e))]\,|_{t=0}=[X,Y]_e. \quad \square$$

令$G_c=\{a\in G\,|\,\forall b\in G, ab=ba\}$，$\mathfrak{g}_c=\{X\in\mathfrak{g}\,|\,\forall Y\in\mathfrak{g}, XY=YX\}$，二者分别称为$G$与$\mathfrak{g}$的中心．8.8.2推出$\mathfrak{g}_c=\mathrm{Ker}(\mathrm{ad})$. 其次，显然$G_c\subset\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad})$；$G$是Abel群$\Longleftrightarrow G_c=G$. 在某种意义上，Ad刻划了“$G$对Abel群的偏离”．

8.8.3 定理 设G是连通Lie群. 则(i)$G_c=\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad})$，因此$G_c$是$G$的Lie子群且$\mathrm{Lie}(G_c)=\mathfrak{g}_c$（参考7.4.2之推论）；(ii) G是Abel群$\Longleftrightarrow\mathfrak{g}$是Abel Lie代数(参考7.2.4).

证 (i) 只需证$\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad})\subset G_c$. 任给$a\in\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad})$，$X\in\mathfrak{g}$，$I_a(\exp X)=\exp(\mathrm{Ad}_aX)=\exp X$(7.3.3)，即$a$与$\exp X$可换.

再由7.3.1之推论得$ax=xa(x\in G)$，可见$a\in G_c$.

(ii) 若$\mathfrak{g}$是Abel的，则$\mathrm{ad}(X)=0$(8.8.2). 因G连通，故$\mathrm{Ad}(a)=\mathrm{Ad}(e)=\mathrm{id}$，从而$G_c=\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad})=G$. □

8.8.4 定理 设H是连通Lie群G的连通Lie子群，则H是正规子群$\Longleftrightarrow\mathfrak{h}=\mathrm{Lie}(H)$是$\mathfrak{g}$中的理想.

证 任给$X\in\mathfrak{h},Y\in\mathfrak{g},a=\exp Y$，由7.3.3有

$$I_a(\exp X)=\exp(\mathrm{Ad}_a X)=\exp((\exp\mathrm{ad}_Y)(X)). \qquad (3)$$

若H是正规子群，则由$I_a(\exp tX)\in H(t\in\mathrm{R})$及(3)推出$(\exp\mathrm{ad}_{tY})(X)\in\mathfrak{h}$(参考§7.4(1)).由7.3.3与8.8.2,

$$(\exp\mathrm{ad}_{tY})(X)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\mathrm{ad}_{tY})^k(X)$$

$$=X+t[Y,X]+\frac{t^2}{2!}[Y,[Y,X]]+\cdots, \qquad (4)$$

因此$[Y,X]=\frac{d}{dt}(\exp\mathrm{ad}_{tY})(X)|_{t=0}\in\mathfrak{h}$，$\mathfrak{h}$是一理想.

反之，若$\mathfrak{h}$是理想，则(4)推出$(\exp\mathrm{ad}_Y)(X)\in\mathfrak{h}$，(3)推出$I_a(\exp X)\in H$；再利用$G,H$的连通性推出$\forall a\in G,x\in H$，$I_a(x)\in H$(参照8.8.3之证明)，$H$是正规子群. □

Lie群上存在Haar测度这一事实可以直接证明而不必用8.1.2：任取$\omega_e\in A^n(G_e^*)\setminus 0$，依7.2.2，$\omega_e$生成$G$上一左不变体积形式$\omega$，$\omega$决定$G$上一正测度$\mu$(参看§6.8). 任给$f\in C_c(G),a\in G$，依6.8.3有

$$\int fd\mu=\int f\omega=\int\lambda_a^*(f\omega)=\int(\lambda_a f)d\mu,$$

可见μ是一左Haar测度(参看§1). 若G是紧Lie群，从而是幺模的，则μ亦为右Haar测度(参看8.1.5).

8.8.5 定理 设G是紧Lie群，E是m维复[实]向量空间，U是G关于E的一个表示. 则总可以在E上适当定义内积，使

得 U 是一个酉表示[正交表示，即U_a恒为正交算子].

证 在 E 上任意取定一内积$(\cdot)$，令

$$(x,y)_1=\int(U_sx,U_sy)d\mu(s),x,y\in E, \tag{5}$$

μ 是 G 上的Haar 测度. 直接验知(5)是 E 上的一个内积. 任给 $a\in G$，由 μ 的右不变性推出

$$(U_ax,U_ay)_1=\int(U_{sa}x,U_{sa}y)d\mu(s)$$

$$=\int(U_sx,U_sy)d\mu(s)=(x,y)_1,$$

可见U_a关于内积$(\cdot)_1$是酉算子[正交算子](1.10.9). □

将8.8.5用到伴随表示得出：若 G 是紧Lie群，则存在G_e上的内积 g_e，使Ad关于 g_e 是一正交表示，即 $g_e(I_{a*}X,I_{a*}Y)=g_e(X,Y)(a\in G,X,Y\in G_e)$，从而$I_a^*g_e=g_e$. 设 g 是g_e生成的左不变Riemann 度量(7.2.2)，则 $g_a=(I_{a*}g_e)\cdot a=g_e\cdot a$，故 g 也是右不变的. 故得

推论 紧Lie群上存在双不变的Riemann度量.

8.8.6 定理 若 G 是紧Lie 群，则每个表示$U:G\to GL(E)$是完全可约的.

证 依8.8.5，可设 E 是内积空间，U 是酉表示或正交表示. 若 E_1 是 U 的不变子空间，$0<\dim E_1<\dim E$，则 $E=E_1\oplus E_1^\perp$，相应地得到 U 的分解$U=U_1\oplus U_2$，U_1,U_2分别为 U 在E_1与$E_1^\perp$上的限制. 重复以上分解必可将 U 表为既约表示的Hilbert和. □

注 以上两个定理亦适用于任意紧拓扑群，只是对紧Lie群的证明不依赖于8.1.2.

约定$\bar{A}^p(G)$记 G 上的双不变p-形式之全体，它对于阐明 G 的性质有非常重要的作用.

8.8.7 定理 设 G 是紧连通Lie群. 则 $\bar{A}^p(G)\subset Z^p(G)$，且

$\tilde{\Lambda}^p(G)\to H^p(G)$，$\omega\longmapsto[\omega]$是一单射(记号依§6.9).

证 取定$\omega\in\tilde{\Lambda}^p(G)$.首先证$d\omega=0$. 因易见$d\omega\in\tilde{\Lambda}^{p+1}(G)$，故只要对任给$X_i\in\mathfrak{g}$ $(0\leqslant i\leqslant p)$ 证$d\omega(X_0,\cdots,X_p)=0$. 利用$\omega$的不变性，依§6.3(17)并经适当变换后得

$$
\begin{aligned}
&-2d\omega(X_0,\cdots,X_p)\\
&=\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\sum_{i=0}^{p}\omega(X_0,\ \cdots,[X_j,X_i],\cdots,X_p),
\end{aligned}
$$

$\omega(X_0,\cdots,[X_j,X_i],\cdots,X_p)$中缺$X_i,X_j$. 于是证$d\omega=0$归于证：对任给$X_1,\cdots,X_p,Y\in\mathfrak{g}$，有

$$
\sum_{i=1}^{p}\omega(X_1,\cdots,[Y,X_i],\cdots,X_p)=0. \tag{6}
$$

令$h(t)=\exp tY$，则$[Y,X_i]_e=\frac{d}{dt}(I_{h(t)})_*X_i(e)\mid_{t=0}$(参看8.8.2之证明)，于是利用Leibniz规则及ω的双不变性有：

$$
\begin{aligned}
0&=\frac{d}{dt}(I^*_{h(t)}\omega_e)(X_1,\cdots,X_p)\mid_{t=0}\\
&=\frac{d}{dt}\omega_e((I_{h(t)})_*X_1,\cdots,(I_{h(t)})_*X_p)\mid_{t=0}\\
&=\sum_{i=1}^{p}\omega_e\left(X_1,\cdots,\frac{d}{dt}(I_{h(t)})_*X_i\mid_{t=0},\cdots,X_p\right)\\
&=\sum_{i=1}^{p}\omega_e(X_1,\cdots,[Y,X_i],\cdots,X_p),
\end{aligned}
$$

其中将$X_i(e)$简写成了X_i. 因G连通，这就证明了(6).

其次证$[\omega]=0\Rightarrow\omega=0$. 任给$\sigma\in\Lambda^p(G)$，定义

$$
\bar{\sigma}(X_1,\cdots,X_p)=\iint(\lambda_{s*}\rho_{t*}\sigma)(X_1,\cdots,X_p)d\mu(s)d\mu(t), \tag{7}
$$

其中$X_1,\cdots,X_p\in\mathscr{X}(G)$，$\mu$是$G$上的双不变Haar测度，$\mu(G)=1$.

不妨将 (7) 简写作 $\tilde{\sigma}=\iint s\cdot\sigma\cdot t ds dt$. 直接验知 $\tilde{\sigma}\in\tilde{A}^p(G)$，当 $\sigma\in\tilde{A}^p(G)$时$\tilde{\sigma}=\sigma$. 利用§6.3(17) 可验证$\widetilde{d\sigma}=d\tilde{\sigma}$. 现在设 $\omega=d\sigma,\sigma\in A^{p-1}(G)$，则

$$\omega=\tilde{\omega}=\widetilde{d\sigma}=d\tilde{\sigma}=0.$$ □

更精细的论证可以指明，实际上有 $\tilde{A}^p(G)\cong H^p(G)$. 这一事实有重要应用. 例如，若$G$是$n$维连通紧 Abel Lie 群(如 $G=\mathrm{T}^n$)，则 $H^p(G)\cong\tilde{A}^p(G)\cong A^p(G_e^*)$，从而 $\dim H^p(G)=\binom{n}{p}$，这就得到(参看§6.10(4))：

$$\chi(G)=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\dim H^p(G)=0 \tag{8}$$

参考文献：[12]，[22]，[45]，[83].

习　题

1. 若ω是紧Lie群G上的不变体积形式，$i(x)=x^{-1}(x\in G)$，则$i_*\omega=\omega$.
2. G上有一双不变的Riemann度量$\Longleftrightarrow\mathrm{Ad}(G)$在$\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$中相对紧.

§9　插值定理

在Fourier分析中，若希望将对L^p与L^q函数建立的某个结果推广于 $L^r(p\leqslant r\leqslant q)$ 函数，则可考虑应用所谓算子插值定理. 下面介绍若干初步结果.

约定以下记号：(Ω,μ)与(Ω',ν)记σ-有限测度空间，其中的可测函数之集分别记作M,M'，而可积简单函数之集分别记作S,S'. 设 $D\subset M$是一子空间，$S\subset D$，且若 $f\in D,0\leqslant r_1<r_2\leqslant\infty,A=\Omega(r_1<|f|\leqslant r_2)$，则 $f\chi_A\in D$. 任给线性算子 $T:D\to M',1\leqslant p,q\leqslant\infty$，令

$$\|T\|_{p,q}=\sup\{\|Tf\|_q\mid f\in D,\|f\|_p\leqslant1\}, \tag{1}$$

$L(p,q)=\{T\mid\|T\|_{p,q}<\infty\}$. 以$p'$记 p 的相伴数.

8.9.1 引理 设$f\in M, 1\leqslant p\leqslant\infty$，则

$$\|f\|_p=\sup\{|\int fgd\mu|\,|g\in M,\|g\|_{p'}\leqslant 1\}$$
$$=\sup\{|\int fgd\mu|\,|g\in S,\|g\|_{p'}\leqslant 1\}. \qquad (2)$$

证 若$\|f\|_p<\infty, 1<p\leqslant\infty$，则(2)直接从3.5.4及$S$在$L^{p'}$中稠密推出.若$\|f\|_1<\infty$，令$|f(x)|=\varphi(x)f(x)$，$|\varphi(x)|=1$，取$g_n\in S$：$g_n\xrightarrow{a.e.}\varphi$，$|g_n|\leqslant 1$，则控制收敛定理推出：

$$\|f\|_1=\int\varphi fd\mu=\lim_n\int g_nfd\mu,$$

由此同样得出(2)($p=1$)．若$\|f\|_p=\infty$，设$\Omega=\bigcup A_n$，$\mu A_n<\infty$，$A_1\subset A_2\subset\cdots$，令$e_n=\{x\in A_n||f(x)|\leqslant n\}$，$f_n=f\chi_{e_n}$，则$\|f_n\|_p<\infty$，$\|f_n\|_p\to\infty$．由已证结论，存在$g_n\in S$：$\|g_n\|_{p'}\leqslant 1$，

$$\|f_n\|_p<\left|\int f_ng_nd\mu\right|+\frac{1}{n}=\left|\int fg_n\chi_{e_n}d\mu\right|+\frac{1}{n},$$

$\varphi_n=g_n\chi_{e_n}\in S$，$\|\varphi_n\|_{p'}\leqslant 1$．由此显然得出(2)． □

8.9.2 Riesz-Thorin定理 设$T\in L(p_j,q_j)$，$j=0,1$；$p_t^{-1}=(1-t)p_0^{-1}+tp_1^{-1}$，$q_t^{-1}=(1-t)q_0^{-1}+tq_1^{-1}$，$k_t=\|T\|_{p_t,q_t}$，则$k_t\leqslant k_0^{1-t}k_1^t$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$．

注 当$0\leqslant t\leqslant 1$时，点(p_t^{-1},q_t^{-1})在以(p_j^{-1},q_j^{-1}) $(j=0,1)$为端点的线段上．不等式$k_t\leqslant k_0^{1-t}k_1^t$相当于$k_t$是$t$的凸函数，而$\{(p^{-1},q^{-1})|T\in L(p,q)\}$是平面凸子集．因此通常称8.9.2为**Riesz凸性定理.**

以下证明属于Thorin(1939)．

证 取定$t\in(0,1)$．为书写简便，令$\alpha=p^{-1}=p_t^{-1}$，$\beta=q^{-1}=q_t^{-1}$．设$f\in D$，$\|f\|_p\leqslant 1$，今证$\|Tf\|_q\leqslant k_0^{1-t}k_1^t$．

首先设$f=\sum a_j\chi_{A_j}\in S$．由8.9.1，只要对任给$g=\sum b_i\chi_{B_i}\in S'$，$\|g\|_{q'}\leqslant 1$，证明

$$\left|\int Tf\cdot gd\nu\right|\leqslant k_0^{1-t}k_1^t. \qquad (3)$$

设 $\alpha>0,\beta<1$，$a_j=|a_j|\varepsilon_j$，$b_l=|b_l|\delta_l$，$|\varepsilon_j|=|\delta_l|=1$，可设 $a_jb_l\neq0$。令

$$F(z)=\sum_{j,l}c_{jl}|a_j|^{p\alpha(z)}|b_l|^{q'\beta(z)},z\in\mathrm{C},\qquad(4)$$

其中 $\quad c_{jl}=\varepsilon_j\delta_l\int_{B_l}T(\chi_{A_j})dv$,

$$\alpha(z)=(1-z)p_0^{-1}+zp_1^{-1},1-\beta(z)=(1-z)q_0^{-1}+zq_1^{-1}.$$

$F(z)$是整函数且在$0\leqslant\mathrm{Re}z\leqslant1$内有界．当 $z=iy(y\in\mathrm{R})$ 时，$\varepsilon_j|a_j|^{p\alpha(z)}=\varepsilon_j'|a_j|^{p/p_0}$，$\delta_l|b_l|^{q'\beta(z)}=\delta_l'|b_l|^{q'/q_0'}$，$|\varepsilon_j'|=|\delta_l'|=1$，故

$$|F(iy)|=\left|\int T(\sum_j\varepsilon_j'|a_j|^{p/p_0}\chi_{A_j})(\sum_l\delta_l'|b_l|^{q'/q_0'}\chi_{B_l})dv\right|$$

$$\leqslant\|T(\sum_j(\cdots))\|_{q_0}\|\sum_l(\cdots)\|_{q_0'}\leqslant k_0\|\sum_j(\cdots)\|_{p_0}\|\sum_l(\cdots)\|_{q_0'}$$

$$=k_0\|f\|_p^{p/p_0}\|g\|_{q'}^{q'/q_0'}\leqslant k_0.$$

类似地可验证 $|F(1+iy)|\leqslant k_1(y\in\mathrm{R})$。于是4.1.7推出

$$\left|\int Tf\cdot gdv\right|=|F(t)|\leqslant k_0^{1-t}k_1^t.$$

若$\alpha=0,\beta=1$，则必$p=p_0=p_1$，$q=q_0=q_1$，此时没什么可证的；若 $\alpha=0,\beta<1$，则 $p=p_0=p_1$，对(4)稍作修改后以上证明依然可用；$\alpha>0,\beta=1$ 的情况仿此.

若 $f\in S$，则可取$\{g_n\}\subset S$：$|g_n|\leqslant|f|$，$g_n\xrightarrow{a.e.}f$(3.1.3)，于是$\|g_n\|_p\leqslant1$，$\|Tg_n\|_q\leqslant k_0^{1-t}k_1^t$．令 $f=f^0+f^1$，其中

$$f^0(x)=\begin{cases}f(x), & |f(x)|>1;\\0, & |f(x)|\leqslant1.\end{cases}\qquad(5)$$

不妨设 $p_0\leqslant p_1$，则 $f^j\in D\cap L^{p_j}(j=0,1)$．类似地将 g_n 分解成 $g_n^0+g_n^1$，易见$g_n^j\to f^j(j=0,1)$，于是由控制收敛定理有

$$\|T(g_n^j-f^j)\|_{q_j}\leqslant k_j\|g_n^j-f^j\|_{p_j}\to0(n\to\infty,j=0,1).$$

因L^{q_j}中的收敛列包含几乎处处收敛子列(3.5.1)，故有$\{g_n\}$的

子列$\{f_n\}$：$Tf_n \xrightarrow{a.e.} Tf$. 于是Fatou定理推出：

$$\|Tf\|_q \leqslant \varliminf_n \|Tf_n\|_q \leqslant k_0^{1-t} k_1^t.$$ □

保持以上的记号，从8.9.2推出：

8.9.3 定理 设$L^1 \cup L^2 \subset D$且T满足不等式：

$$\|Tf\|_\infty \leqslant \rho_1 \|f\|_1, \|Tf\|_2 \leqslant \rho_2 \|f\|_2, \qquad (6)$$

则当$1<p<2$时$L^p(\Omega) \subset D$，且T满足不等式：

$$\|Tf\|_{p'} \leqslant \rho_1^{(2/p)-1} \rho_2^{2/p'} \|f\|_p, f \in L^p(\Omega). \qquad (7)$$

证 (6)推出$\|T\|_{1,\infty} \leqslant \rho_1$, $\|T\|_{2,2} \leqslant \rho_2$，于是8.9.2推出：

$$\|T\|_{p,p'} \leqslant \rho_1^{(2/p)-1} \rho_2^{2/p'}, 1<p<2. \qquad (8)$$

任给$f \in L^p(\Omega)$，依(5)作分解$f=f^0+f^1$，则从$f^0 \in L^1, f^1 \in L^2$推出$f \in D$. (7)从(8)推出.

从8.9.3可得出一些重要的具体结论.

8.9.4 Hausdorff-Young不等式 设G是一局部紧Abel群，$1 \leqslant p \leqslant 2$，则对任给$f \in L^p(G)$可定义Fourier变式$\hat{f}$，且满足$\|\hat{f}\|_{p'} \leqslant \|f\|_p$.

证 因$\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$ ($f \in L^1$), $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ ($f \in L^2$，参看8.6.9)，故所要结论直接从8.9.3推出. □

下面的结果可看作8.9.4的某种变种.

8.9.5 定理(F.Riesz) 设(Ω, μ)是一σ-有限测度空间，$\{\varphi_n\}$是$L^2(\Omega)$的一法正交系，$\|\varphi_n\|_\infty \leqslant \rho < \infty$. 任给$f \in L^1 \cup L^2$，令$\hat{f}(n) = \int f \varphi_n d\mu$（可称为"Fourier系数"，参照3.5.6). 则对任给$f \in L^p(\Omega)$ $(1<p<2)$可定义$\hat{f}$，且$\hat{f} \in e^{p'}$

$$\|\hat{f}\|_{p'} \leqslant \rho^{(2/p)-1} \|f\|_p. \qquad (9)$$

若$\mu(\Omega)<\infty$, $c=(c_n) \in l^p$，则$\exists f \in L^{p'}(\Omega)$：$\hat{f}(n)=c_n$且$\|f\|_{p'} \leqslant \rho^{(2/p)-1} \|c\|_p$.

证 显然$\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \rho \|f\|_1$ ($f \in L^1$)；若$f \in L^2(\Omega)$，则

$$\|\hat{f}\|_2^2=\sum_n|\hat{f}(n)|^2=\sum_n|(f,\varphi_n)|^2\leqslant\|f\|_2^2$$

(§1.10(6)). 于是(9)从(7)推出. 若 $c=(c_n)\in l^p$, 令 $f_n=\sum_1^n c_k\varphi_k$, $c^n=(c_1,\cdots,c_n,0,\cdots)$, 则对任给 $g\in L^p(\Omega)$, $\|g\|_p\leqslant 1$ 有:

$$\left|\int f_n\bar{g}d\mu\right|=\left|\sum_{k=1}^n \bar{c}_k\hat{g}(k)\right|\leqslant\|c^n\|_p\|\hat{g}\|_{p'}$$

$$\leqslant\|c^n\|_p\rho^{(2/p)-1}\|g\|_p\leqslant\rho^{(2/p)-1}\|c^n\|_p.$$

于是8.9.1推出 $\|f_n\|_{p'}\leqslant\rho^{(2/p)-1}\|c^n\|_p$. 同理 $m>n$ 时有 $\|f_m-f_n\|_{p'}\leqslant\rho^{(2/p)-1}\|c^m-c^n\|_p$. 因此在 $L^{p'}$ 中 $f_n\to f$, 显然 $\|f\|_{p'}\leqslant\rho^{(2/p)-1}\|c\|_p$, $\hat{f}(n)=\lim_k\hat{f}_k(n)=c_n$. □

最后指出可从8.9.2重新推出8.2.1 (限于数值函数)。首先直接建立 $\|f*g\|_1\leqslant\|f\|_1\|g\|_1$, $\|f*\varphi\|_\infty\leqslant\|f\|_1\|\varphi\|_\infty$ (f, $g\in L^1(G)$, $\varphi\in L^\infty(G)$), 然后将8.9.2用到"卷积算子" $f*$ 得出 $\|f*g\|_p\leqslant\|f\|_1\|g\|_p$ ($f\in L^1,g\in L^p$). 这个不等式与不等式 $\|g*h\|_\infty\leqslant\|g\|_p\|h\|_{p'}$ ($g\in L^p,h\in L^{p'}$)一起表明, 算子 $g*$ 属于 $L(1,p)\cap L(p',\infty)$, 于是8.9.2推出

$$\|g*\varphi\|_r\leqslant\|g\|_p\|\varphi\|_q,\quad g\in L^p,\varphi\in L^q,\tag{10}$$

其中 $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1\geqslant 0$. (10)也称作关于卷积的Young不等式.

参考文献: [23], [58], [59], [72], [75], [78].

习　题

设 $1\leqslant p\leqslant 2$, $f,g\in L^p(\mathbb{R}^n)$, 则 $\int f\hat{g}dx=\int\hat{f}gdx$.

第九章 广义函数

首先由 L·Schwartz 系统地展开的广义函数论，带来了函数概念的根本变革，它的结论与方法已广泛渗透到现代分析与数学物理的各个领域，致使一些数学分支（如 Fourier 分析与偏微分方程论等）在一定程度上已"广义函数化"了．对于这个迄今仍很活跃的领域，本章的介绍自然是入门性的．

约定 Ω总记R^n的非空开子集；$\{e_i\}$记R^n或C^n的标准基．给定$\xi\in\mathrm{C}^n$，总意味着$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，而$\xi\cdot\eta=\sum\xi_i\cdot\eta_i$；若$f$，$g$是$\mathrm{C}^m$值函数，则令$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$．为简便计，$\mathrm{R}^n$上的正规化Haar测度就写作$dx$，$d\xi$等(读者当注意由此引起的某些公式的系数变化)．记号∂^α，∂_i，$\|f\|_{K,r}$，$\mathscr{E}^r(\Omega,m)$，$\mathscr{D}^r(\Omega,m)$等依§2.A；不必指明Ω，m时就用缩记号$\mathscr{E}^r$，$\mathscr{D}^r$．任给$\varphi\in C^r(\Omega,m)$，约定$\|\varphi\|_r=\max\limits_{|\alpha|\leqslant r}\|\partial^\alpha\varphi\|_\infty$．

§1 基本空间与广义函数

给定函数空间M，若每个$f\in M$确定（例如通过积分）某个函数空间$\mathscr{A}$（它是一LCS）上一连续线性泛函T_f，且$M\to\mathscr{A}'$，$f\longmapsto T_f$是单射，则可以认为$\mathscr{A}'$是M的一个扩张，而每个$f\in\mathscr{A}'$可看作"广义函数"．这种观点在逻辑上当然无可非议，但要能真正拓广经典函数概念，则有赖于"基本空间"$\mathscr{A}$的合理选择．首先，$\mathscr{A}$应由"充分好"的函数组成，使得在其中能顺利进行某些分析运算（如求微分，作 Fourier 变换

等)，而通过某一"对偶"程序就可将这些运算推广到$\mathscr{A}'$中；其次，$\mathscr{A}$应装备"足够强"的拓扑，以使$\mathscr{A}'$包含"足够多"的元素；最后，通常的函数空间（如L^p等）能自然地嵌入$\mathscr{A}'$中．满足以上要求的基本空间的典型例子有$\mathscr{D}$，$\mathscr{E}$及$\mathscr{S}$等(8.5.7)．

约定$\mathscr{D}'_r(\Omega,m)=(\mathscr{D}^r(\Omega,m))'$；$\mathscr{E}'_r(\Omega,m)$，$\mathscr{S}'(\mathrm{R}^n,m)$等仿此．当不必提到$\Omega$，$m$时，就用缩记号$\mathscr{D}'_r$，$\mathscr{E}'_r$，$\mathscr{S}'$等．

9.1.1 定义 当$\mathscr{A}=\mathscr{D}^r$，$\mathscr{E}^r$或$\mathscr{S}$时，称每个$f\in\mathscr{A}'$为关于基本空间$\mathscr{A}$的分布或广义函数(这两个术语将交替使用)，称$f(\varphi)$（亦写作$\langle f,\varphi\rangle$）为$f$在"检验函数"$\varphi\in\mathscr{A}$的值；称每个$f\in\mathscr{D}'_r(0\leqslant r<\infty)$为$r$阶分布；称每个$f\in\mathscr{D}'_F=\bigcup_{r>0}\mathscr{D}'_r$为有限阶分布；称$f\in\mathscr{S}'$为缓增分布．

利用§1.6(2)，§2.4(12)，§8.5(11)及1.9.3得到：

1° $\mathscr{E}^r(\Omega,m)$上一线性泛函f属于$\mathscr{E}'_r(0\leqslant r<\infty)$的充要条件是：存在紧集$K\subset\Omega$，$C>0$，使得$\forall\varphi\in\mathscr{E}^r(\Omega,m)$：

$$|f(\varphi)|\leqslant C\|\varphi\|_{K,r};\qquad(1)$$

$\mathscr{E}(\Omega,m)$上一线性泛函f属于$\mathscr{E}'\Longleftrightarrow$存在$r\in\mathrm{N}$，紧集$K\subset\Omega$，$C>0$，使得(1)对任何$\varphi\in\mathscr{E}(\Omega,m)$成立．

2° $\mathscr{S}(\mathrm{R}^n,m)$上一线性泛函$f$属于$\mathscr{S}'$的充要条件是：存在$\mathrm{R}^n$上的多项式$P$，$Q$及$C>0$，使得$\forall\varphi\in\mathscr{S}(\mathrm{R}^n,m)$：

$$|f(\varphi)|\leqslant C\|P\cdot Q(D)\varphi\|_u.\qquad(2)$$

3° $\mathscr{D}^r(\Omega,m)(0\leqslant r<\infty)$上一线性泛函$f$属于$\mathscr{D}'_r$的充要条件是：任给紧集$K\subset\Omega$，$\exists C>0$，使得$\forall\varphi\in\mathscr{D}^r(K,m)$：

$$|f(\varphi)|\leqslant C\|\varphi\|_r;\qquad(3)$$

$\mathscr{D}(\Omega,m)$上一线性泛函f属于$\mathscr{D}'\Longleftrightarrow$任给紧集$K\subset\Omega$，存在$r\in\mathrm{N}$，$C>0$，使得(3)对任何$\varphi\in\mathscr{D}(K,m)$成立．

显然$\mathscr{D}(\Omega,m)\cong(\mathscr{D}(\Omega))^m$，故§2.3(6)推出

$$\mathscr{D}'(\Omega,m)\cong(\mathscr{D}'(\Omega))^m\cong L(\mathscr{D}(\Omega),\mathbf{C}^m). \qquad (4)$$

任给 $f\in\mathscr{D}'(\Omega,m)$ ，$\varphi=\sum\varphi_i e_i\in\mathscr{D}(\Omega,m)$ ，令 $f_i(\varphi_i)=f(\varphi_i e_i)$，则$f(\varphi)=\sum f_i(\varphi_i)$，故可写 f 为$(f_1,\cdots,f_m)$ ，$f_i\in\mathscr{D}'(\Omega)$，称 f 是以f_i为**分量的向量值分布**．对$\mathscr{D}'_r$, $\mathscr{E}'_r$及$\mathscr{S}'$亦有类似结论．今后将主要考虑$m=1$的情况．

若X,Y是两个LCS，$X\hookrightarrow Y$(记号依8.5.8)，则由1.8.10推出包含 $i: X\subset Y$的对偶$i': Y'\to X'$是连续单射且$\overline{i'(Y')}=X'$，X',Y'中采用弱拓扑．因此,不妨认为$Y'\hookrightarrow X'$，且将i'看作包含映射．这样，从

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathscr{D} & \hookrightarrow & & & \mathscr{D}^r & \hookrightarrow & \mathscr{D}^s \\
\cap\downarrow & & & & \cap\downarrow & & \cap\downarrow \\
\mathscr{S} & \hookrightarrow & \mathscr{E} & \hookrightarrow & \mathscr{E}^r & \hookrightarrow & \mathscr{E}^s
\end{array} \qquad (0\leqslant s<r<\infty) \qquad (5)$$

推出

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathscr{D}' & \hookleftarrow & & & \mathscr{D}'_r & \hookleftarrow & \mathscr{D}'_s \\
\cup\uparrow & & & & \cup\uparrow & & \cup\uparrow \\
\mathscr{S}' & \hookleftarrow & \mathscr{E}' & \hookleftarrow & \mathscr{E}'_r & \hookleftarrow & \mathscr{E}'_s
\end{array} \qquad (0\leqslant s<r<\infty), \qquad (6)$$

(6)中各空间采用弱拓扑（今后总是如此)．因此 9.1.1 意义下的分布都可看作 $\mathscr{D}'$ 中的元，且在验证条件(1)—(3)时，只需考虑$\varphi\in\mathscr{D}$就够了．

因$\mathscr{D}$, $\mathscr{E}$, $\mathscr{S}$都是Montel空间(2.4.4, 8.5.8)，故1.9.10推出：

9.1.2 定理 $\mathscr{D}'$, $\mathscr{E}'$及$\mathscr{S}'$都是序列弱完备的，其中的序列弱收敛与强收敛等价．

当$f\in\mathscr{D}'_r(r<\infty)$时，$r$在某种程度上刻划了$f$的“正则性”，$r$愈小，$f$愈接近于经典函数．0阶分布也称为**Radon测度**，试看一些例子．

9.1.3 例 1° 显然$\mathscr{D}^0(\Omega)\hookrightarrow C_0(\Omega)$，$\mathscr{S}(\mathrm{R}^n)\hookrightarrow C_0(\mathrm{R}^n)$，因此 可以 认为 $M(\Omega)\subset\mathscr{D}_0'(\Omega)$， $M(\mathrm{R}^n)\subset\mathscr{S}'(\mathrm{R}^n)$ （参看3.5.5）；于是每个$\mu\in M(\Omega)$是Radon测度，依§3.5(8)有

$$\langle\mu,\varphi\rangle=\int\varphi d\mu,\ \varphi\in C_0(\Omega). \tag{7}$$

2° 任给Ω上的正测度μ，令$f(\varphi)=\int\varphi d\mu(\varphi\in C_c(\Omega))$，则对任给紧集$K\subset\Omega$，$\varphi\in C_c(K)$有$|f(\varphi)|\leqslant\mu K\|\varphi\|_u$，可见$f\in\mathscr{D}_0'$（参照(3)），或就说$\mu$（等同于$f$）是Radon测度.

3° 任何$f\in L^1_{loc}(\Omega,m)$决定一线性泛函T_f：

$$\langle T_f,\varphi\rangle=\int f\cdot\varphi dx,\ \varphi\in C_c(\Omega,m). \tag{8}$$

当$\varphi\in C_c(K,m)$，$K\subset\Omega$时$|\langle T_f,\varphi\rangle|\leqslant\|\varphi\|_u\int_K|f|\,dx$，可见$T_f\in\mathscr{D}_0'$. 不难从3.5.3推出：$T_f=0\Rightarrow f\overset{a.e.}{=\!=}0$，故不妨将$T_f$等同于$f$. 于是可以说，每个$f\in L^1_{loc}(\Omega,m)$是一 Radon 测度，称为**密度或正则分布**. 今后将直接写$\langle T_f,\varphi\rangle$为$\langle f,\varphi\rangle$($f\in L^1_{loc}$，$\varphi\in\mathscr{D}$).

4° 设$\varepsilon_a\in M(\mathrm{R}^n)$定义如§8.2(12)，则$\varepsilon_a$决定分布：

$$\langle\delta_a,\varphi\rangle=\int\varphi d\varepsilon_a=\varphi(a),\ \varphi\in C_c(\mathrm{R}^n). \tag{9}$$

称$\delta=\delta_0$为**δ-函数或Dirac测度**，它不是经典意义上的函数：任给$f\in L^1_{loc}(\mathrm{R}^n)$，取$\varphi_s\in C(\mathrm{R}^n)$：$\{0\}\prec\varphi_s\prec B^n(0,s)$，则$\langle f,\varphi_s\rangle\to0(s\to0)$，而$\delta(\varphi_s)=1$，可见$\delta\neq f$.

9.1.4 定理 $\mathscr{D}\hookrightarrow\mathscr{D}'$；$L^p\hookrightarrow\mathscr{D}'$；$L^p(\mathrm{R}^n)\hookrightarrow\mathscr{S}'(\mathrm{R}^n)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$.

证 显然有连续的包含$\mathscr{D}\subset\mathscr{D}'$；$\mathscr{D}=(\mathscr{D}')'$ (1.8.2). 当$\mathscr{D}$看作$\mathscr{D}'$的子集时记作D. 任给$\varphi\in D^\perp$(依§1.7(3))，$\varphi\in D$，

故$\langle\varphi,\varphi\rangle=\int|\varphi|^2dx=0$，从而$\varphi=0$. 于是由1.8.3之推论有$\bar{D}=\mathscr{D}'$. 定理其余结论由以下不等式推出：

$$|\langle f,\varphi\rangle|\leqslant\|f\|_{L^p}\|\varphi\|_{L^{p'}};$$

$$|\langle g,\psi\rangle|\leqslant\|g\|_{L^p}\|(1+|x|^2)^{-k}\|_{L^{p'}}\|(1+|x|^2)^k\psi\|_\infty,$$

其中$f\in L^p$，$\varphi\in\mathscr{D}$，$g\in L^p(\mathrm{R}^n)$，$\psi\in\mathscr{S}(\mathrm{R}^n)$，$k\in\mathrm{N}$充分大，$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. □

粗略地说，9.1.4表明广义函数空间$\mathscr{D}'$与"好函数"的空间$\mathscr{D}$其实是很接近的.

从习惯看来，广义函数的不自然之处在于，对于一般的$f\in\mathscr{D}'$根本谈不上"函数值$f(x)$". 当用到$f(x)$及$\langle f(x),\varphi(x)\rangle$ $(f\in\mathscr{D}',\varphi\in\mathscr{D})$ 这类记号时，只是为了强调检验函数以x为自变量. 虽然广义函数不是"点的函数"，但还是能说及它的局部性质. 任给非空开集$U\subset\Omega$，有自然的嵌入$\mathscr{D}(U,m)\subset\mathscr{D}(\Omega,m)$，于是每个$f\in\mathscr{D}'(\Omega,m)$导出$f|\mathscr{D}(U,m)\in\mathscr{D}'(U,m)$，称后者为$f$在$U$内的限制并写作$f|U$. 关于广义函数的一个性质$P$称为"局部的"，若$\forall f\in\mathscr{D}'(\Omega,m)$：$f$具有$P\Longleftrightarrow f$在每点$x\in\Omega$的某邻域内的限制具有$P$.

9.1.5 **定理** 设$\{U_\alpha\}$是Ω的一个开覆盖，$U_\alpha\subset\Omega$，$\{f_\alpha\in\mathscr{D}'(U_\alpha,m)\}$满足$f_\alpha|U_\alpha\cap U_\beta=f_\beta|U_\alpha\cap U_\beta$，则存在唯一的$f\in\mathscr{D}'(\Omega,m)$：$f|U_\alpha=f_\alpha(\forall\alpha)$；且当$f_\alpha\in\mathscr{D}'_r(\forall\alpha)$时$f\in\mathscr{D}'_r$. 换言之，"$f\in\mathscr{D}'$"或"$f\in\mathscr{D}'_r$"是局部性质.

证 取Ω上从属于$\{U_\alpha\}$的单位分解$\{\lambda_\alpha\}$，定义$f(\varphi)=\sum f_\alpha(\lambda_\alpha\varphi)(\varphi\in\mathscr{D}(\Omega,m))$，则不难验证$f\in\mathscr{D}'(\Omega,m)$，$f|U_\alpha=f_\alpha$. 设$\forall\alpha$：$f_\alpha\in\mathscr{D}'_r$；对任给紧集$K\subset\Omega$，取有限个有界开集$V_i$：$K\subset\bigcup V_i$，$\forall i$，$\exists\alpha$：$V_i\subset U_\alpha$. 依(3)，

$$|f(\varphi)|\leqslant\mathrm{const}\|\varphi\|_r\quad(\forall\varphi\in\mathscr{D}(V_i,m)),$$

取K上从属于$\{V_i\}$的单位分解$\{\rho_i\}$，任给$\varphi\in\mathscr{D}(K,m)$有：

$$|f(\varphi)| = |\sum_i f(\rho_i\varphi)| \leqslant \text{const}\sum_i \|\rho_i\varphi\|_r \leqslant \text{const}\|\varphi\|_r.$$

（估计$\|\rho_i\varphi\|_r$时利用Leibniz公式），由此可见$f\in\mathscr{D}'_r$. □

9.1.5特别推出“$f=0$”（$f\in\mathscr{D}'(\Omega,m)$）是局部性质．若令

$$\text{supp}f=\Omega\backslash\{x\,|\,\text{存在}\,x\,\text{的邻域}\,U:\ f|U=0\};\qquad(10)$$

$$\text{singsupp}f=\Omega\backslash\{x|\ \text{存在}\,x\,\text{的邻域}\,U:\ f|U\in C^\infty\},\qquad(11)$$

则$\Omega\backslash\text{supp}f\,[\Omega\backslash\text{singsupp}f]$是使得$f$在其内为零［属于$C^\infty$］的最大开集，分别称supp$f$与singsupp$f$为$f$的**支集**与**奇支集**．显然singsupp$f\subset$supp$f$；若$\varphi,\psi\in\mathscr{D}$在supp$f$的某邻域内相等，则$f(\varphi)=f(\psi)$.

参考文献：[18]，[30]，[41]，[46]，[60]，[64]，[78]，[85].

习　题

1．设$\{x_i\}\subset\Omega$，$(a_i)\in l^1$，定义$f(\varphi)=\sum a_i\varphi(x_i)$（$\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$），则$f\in\mathscr{D}'_0(\Omega)$.

2．$L^1_{loc}\hookrightarrow\mathscr{D}'$，$\mathscr{E}\hookrightarrow\mathscr{D}'$.

3．在$\mathscr{D}'(\mathrm{R})$中$\sin kx\to0$，$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\ \dfrac{\sin kx}{x}\to\delta\ (k\to\infty)$.

4．若$f\in\mathscr{D}'$有紧支集，则$f\in\mathscr{D}'_F$.

5．称$f\in\mathscr{D}'$为“正分布”，若$0\leqslant\varphi\in\mathscr{D}\Rightarrow f(\varphi)\geqslant0$．一个分布“为正分布”是局部性质.

6．设$\Omega=(0,\infty)\subset\mathrm{R}$，$f(\varphi)=\sum_1^\infty\varphi^{(n)}(1/n)$（$\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$）．则$f$是$\Omega$上的无限阶分布，它不能扩张为R上的分布.

§2　广义函数的运算

将经典函数的某些运算推广于广义函数，可循以下一般模

式：给定$A\in L(\mathscr{D})$，若有$B\in L(\mathscr{D})$，使得

$$\langle Af,\varphi\rangle=\langle f,B\varphi\rangle,\ f,\ \varphi\in\mathscr{D} \tag{1}$$

（f与Af看作分布），则称B为A的转置或形式转置，记作A^t. 依1.8.9，$(A^t)'\in L(\mathscr{D}')$；若仍记$(A^t)'$为$A$，则(1)成为当$f\in\mathscr{D}'$时$Af$的定义式，这就将$A$扩张到了$\mathscr{D}'$上. 一般说来，$A$可能原来就定义在一个比$\mathscr{D}$更大的经典函数空间$D$中，对于$f\in D\subset\mathscr{D}'$，$Af$往往与分布意义下的$Af$一致. 试看几个例子.

1° 设$h\in\mathrm{Diff}(\Omega',\Omega)$，$f\in C(\Omega)$，$\varphi\in\mathscr{D}(\Omega')$，则（§6.8(2)）

$$\int_{\Omega'}f(h(x'))\varphi(x')dx'=\int_{\Omega}f(x)\varphi(h^{-1}(x))\,|J(h^{-1})|dx, \tag{2}$$

其中$J(h^{-1})$记h^{-1}的Jacobi行列式. 因$\mathscr{D}(\Omega')\to\mathscr{D}(\Omega)$，$\varphi\longmapsto|J(h^{-1})|\varphi\circ h^{-1}$是连续性算子（2.4.5,2.4.6），故由等式

$$\langle h^*f,\varphi\rangle=\langle f,|J(h^{-1})|\varphi\circ h^{-1}\rangle,\ \varphi\in\mathscr{D}(\Omega') \tag{3}$$

决定一连续线性算子$h^*:\mathscr{D}'(\Omega)\to\mathscr{D}'(\Omega')$，$f\longmapsto h^*f$. h^*f也写作$f\circ h$，当$f\in C(\Omega)$时，$f\circ h$有通常的意义. 这就将"复合函数"概念部分地推广到了广义函数. 常见的例子是：任给$f\in\mathscr{D}'(\mathrm{R}^n)$，$f$的平移$\tau_af(a\in\mathrm{R}^n)$与反射$\check{f}$决定于公式

$$\langle\tau_af,\varphi\rangle=\langle f,\tau_{-a}\varphi\rangle,\ \langle\check{f},\varphi\rangle=\langle f,\check{\varphi}\rangle(\forall\varphi\in\mathscr{D}).$$

2° 给定微分算子$P=\sum_{|\alpha|\leqslant r}a_\alpha D^\alpha$，其中$a_\alpha\in C^\infty(\Omega,M_{pm})$，$M_{pm}=L(\mathrm{C}^m,\mathrm{C}^p)$，$D=-i\partial$. 任给$f\in C^r(\Omega,m)$，$\varphi\in\mathscr{D}(\Omega,p)$，重复运用分部积分得到：

$$\begin{aligned}\int Pf\cdot\varphi dx&=\sum_\alpha\int D^\alpha f\cdot a_\alpha^t\varphi dx\\&=\sum_\alpha\int f\cdot(-D)^\alpha(a_\alpha^t\varphi)dx=\int f\cdot P^t\varphi dx,\end{aligned}$$

其中 $$P^t=\sum_{|\alpha|\leqslant r}(-D)^\alpha a_\alpha^t\in L(\mathscr{D}(\Omega,p),\mathscr{D}(\Omega,m)) \tag{4}$$

（参看2.4.5），a_α^t记a_α的转置（看作算子）. 于是由

$$\langle Pf,\varphi\rangle=\langle f,P'\varphi\rangle,\quad \varphi\in\mathscr{D}(\Omega,p) \tag{5}$$

决定一连续线性算子 $P:\mathscr{D}'(\Omega,m)\to\mathscr{D}'(\Omega,p)$，仍写作 $P=\sum a_\alpha D^\alpha$，当 $f\in C^r(\Omega,m)$时，Pf 有通常的意义．若$m=p$，$a_\alpha=\tilde{a}_\alpha I$，$\tilde{a}_\alpha\in C^\infty(\Omega)$，则就认为$a_\alpha\in C^\infty(\Omega)$．若$a_\alpha=\text{const}(|\alpha|\leqslant r)$，则$P'=\sum a_\alpha(-D)^\alpha=P(-D)$．(5)的两个简单特例是：

$$\langle D^\alpha f,\varphi\rangle=\langle f,(-D)^\alpha\varphi\rangle; \tag{6}$$

$$\langle af,\varphi\rangle=\langle f,a\varphi\rangle, \tag{7}$$

其中$f\in\mathscr{D}'(\Omega,m)$，$a\in C^\infty(\Omega)$，$\varphi\in\mathscr{D}(\Omega,m)$．这就将微分与乘 C^∞ 函数的运算推广到了任何广义函数．今后若未说明，涉及微分时总是分布意义上的．

将(6)用到Heaviside函数 $H=\sqrt{2\pi}\,\chi_{[0,\infty)}$ 及 $f(x)=\ln|x|$ 得：

$$\langle H',\varphi\rangle=\langle H,-\varphi'\rangle=\varphi(0);$$

$$\langle f,-\varphi'\rangle=-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\varphi'(x)\ln|x|dx=P\cdot\int_{\mathrm{R}}\frac{\varphi(x)}{x}dx,$$

后一积分是主值意义上的．以上结果写作：

$$H'=\delta;\quad (\ln|x|)'=P\cdot\left(\frac{1}{x}\right). \tag{8}$$

微分算子P的连续性使得逐项微分 $P(\sum u_n)=\sum Pu_n$ 是合理的，只要$\sum u_n$在$\mathscr{D}'$中收敛．这一事实充分显示出广义函数的优越性．

3° 若$P=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant r}a_\alpha D^\alpha$，$a_\alpha\in\mathscr{O}_M$(§8.5(10))，则类似于(5)的公式决定一连续线性算子 $P:\mathscr{S}'\to\mathscr{S}'$；特别，任给 $a\in\mathscr{O}_M$，$f\in\mathscr{S}'$，有$af\in\mathscr{S}'$；这一事实可缩写成 $\mathscr{O}_M\cdot\mathscr{S}'\subset\mathscr{S}'$，因此称$\mathscr{O}_M$为$\mathscr{S}'$的乘子空间．

自然提出微分与乘法的逆运算问题．对于前者，在1维情况下有以下肯定结果：

9.2.1 定理 任给$f\in\mathscr{D}'(\mathrm{R},m)$，存在"原函数"$u\in\mathscr{D}'$：

$u'=f$；f 的任何原函数可表成$u+\text{const}$.

证　不妨就$m=1$进行证明．令$I(\varphi)=\int\varphi dx(\varphi\in\mathscr{D})$，$dx$记通常的Lebesgue测度．取$\psi\in\mathscr{D}(\mathrm{R})$：$I(\psi)=1$．由

$$(T\varphi)(x)=\int_{-\infty}^{x}[I(\varphi)\psi(t)-\varphi(t)]dt,\ \varphi\in\mathscr{D}$$

定义出$T\in L(\mathscr{D})$，于是$u=f\circ T\in\mathscr{D}'$．任给$\varphi\in\mathscr{D}$，从$\langle u,-\varphi'\rangle=\langle f,-T\varphi'\rangle=\langle f,\varphi\rangle$推出$u'=f$．若$w'=f$，$v=u-w$，则

$$\begin{aligned}\langle v,\varphi\rangle&=\langle v,I(\varphi)\psi\rangle+\langle v,-(T\varphi)'\rangle\\&=v(\psi)I(\varphi)+\langle v',T\varphi\rangle=v(\psi)I(\varphi),\end{aligned}$$

可见$v=\text{const}$.　□

9.2.1可用来证明以下正则性结果：

9.2.2 定理　设$P=\sum_0^m a_j(d/dx)^j$，$a_j\in C^\infty(\mathrm{R})$，$a_m=1$．若$u\in\mathscr{D}'(\mathrm{R})$，$Pu=f\in C(\mathrm{R})$，则$u\in C^m(\mathrm{R})$.

证　令$v=(u,u',\cdots,u^{(m-1)})$，则$Pu=f$可写成$v'=av+b$，$a\in C^\infty(\mathrm{R},M_m(\mathrm{C}))$，$b\in C(\mathrm{R},m)$．取方程$w'=-a^tw$的一基本解组(皆为$C^\infty$函数，参看§2.6)构成$m\times m$矩阵$X$，取$X^tb$的原函数$v_1$(以上$v,b,v_1$皆当作列向量)，则$(X^tv-v_1)'=(X')^tv+X^t(av+b)-X^tb=(-a^tX)^tv+X^tav=0$．由9.2.1，$X^tv-v_1=\text{const}$，这推出$v\in C^1$，从而$u\in C^m$.　□

除法问题的提法如下：给定$g\in C^\infty(\Omega)$，$f\in\mathscr{D}'(\Omega)$，求出$u\in\mathscr{D}'(\Omega)$，使得$gu=f$．困难发生在g有零点的情况，仅当g是较特殊的函数（如多项式或整函数）时得到系统的研究（参考[18]）．下面只对1维情况给出一个简单的结果．

9.2.3 定理　设$f\in\mathscr{D}'(\mathrm{R})$，$g\in C^\infty(\mathrm{R})$除$x=a$外无零点，$g^{(j)}(a)=0$ $(0\leqslant j<k)$，$g^{(k)}(a)\neq0$．则方程$gu=f$在$\mathscr{D}'(\mathrm{R})$中可解，且其解有通式：$u(x)=u_0(x)+\sum_0^{k-1}c_j\delta^{(j)}(x-a)$，$u_0$是一特解．

证 不妨设$a=0$. 利用Taylor公式可将$g(x)$写成$x^k h(x)$, $h\in C^\infty(\mathrm{R})$无零点. 因$f$除$g$归于$f$除$h$后再用$x$除$k$次, 故$gu=f$的可解性归于$xv=f$的可解性, 而对后者可直接构成一个如下的解$v$:

$$\langle v,\varphi\rangle=\langle f,x^{-1}(\varphi-\varphi(0)\psi)\rangle,\ \varphi\in\mathscr{D},$$

其中$\psi\in\mathscr{D}$是满足$\psi(0)=1$的任给函数. 其次, 若$gu_j=f$ $(j=1,2)$, $u=u_1-u_2$, 则$gu=0$, 从而$x^k u=0$, 这推出$\operatorname{supp}u\subset\{0\}$. 利用下节将证明的9.3.4得出$u=\sum_0^r c_j\delta^{(j)}$. 利用$\langle x^k\delta^{(j)},\varphi\rangle=(-1)^j(x^k\varphi)^{(j)}|_{x=0}$, 直接计算得出$x^k u=\sum_k^r c_j\varepsilon_j\delta^{(j-k)}$, $0\neq\varepsilon_j\in\mathrm{R}$, 因此$c_j=0(k\leqslant j\leqslant r)$, 从而$u=\sum_0^{k-1}c_j\delta^{(j)}$. □

下面考虑分布的张量积. 设$\Omega=\Omega_1\times\Omega_2\subset\mathrm{R}^{n_1}\times\mathrm{R}^{n_2}=\mathrm{R}^n$, 约定$\mathscr{D}_i=\mathscr{D}(\Omega_i)$ $(i=1,2)$, $\mathscr{E}_i$仿此.

9.2.4 定理 设$\mathscr{D}_1\otimes\mathscr{D}_2$记$\{\varphi_1\otimes\varphi_2|\varphi_i\in\mathscr{D}_i,\ i=1,2\}$(记号$\varphi_1\otimes\varphi_2$见§1.1(3))生成的向量空间, 则$\mathscr{D}_1\otimes\mathscr{D}_2$在$\mathscr{D}(\Omega)$中稠密. 任给$f_i\in\mathscr{D}_i'(i=1,2)$, 存在唯一$f\in\mathscr{D}'(\Omega)$, 使得

$$f(\varphi_1\otimes\varphi_2)=f_1(\varphi_1)f_2(\varphi_2),\ \varphi_i\in\mathscr{D}_i,\ i=1,2;$$

$$\langle f_1(x),\ \langle f_2(y),\ \varphi(x,y)\rangle\rangle$$

$$=\langle f,\varphi\rangle=\langle f_2(y),\langle f_1(x),\varphi(x,y)\rangle\rangle,\ \varphi\in\mathscr{D}(\Omega). \tag{9}$$

称上述的f为f_1与f_2的张量积, 记作$f_1\otimes f_2$.

证 显然$\mathscr{D}_1\otimes\mathscr{D}_2\subset\mathscr{D}(\Omega)$. 任给$u\in\mathscr{D}(\Omega)$, 设$K_i$是$\operatorname{supp}u$在$\Omega_i$内的投影; 取紧集$L_i$: $K_i\Subset L_i\subset\Omega_i$; 取$\varphi_i\in\mathscr{D}_i$: $L_i\prec\varphi_i(i=1,2)$, 则$L_1\times L_2\prec\varphi_1\otimes\varphi_2$. 取多项式序列$\{u_k\}$, 使得在$\mathscr{E}(\Omega)$中$u_k\to u$(8.3.6); 令$v_k=(\varphi_1\otimes\varphi_2)u_k$, 则$v_k\in\mathscr{D}_1\otimes\mathscr{D}_2$, 在$\mathscr{D}(\Omega)$中$v_k\to u$. 可见$\mathscr{D}_1\otimes\mathscr{D}_2$在$\mathscr{D}(\Omega)$中稠密.

由2.4.7之推论, (9)之两端有意义且连续地依赖于φ. 当$\varphi=\varphi_1\otimes\varphi_2$ $(\varphi_i\in\mathscr{D}_i,\ i=1,2)$时, (9)之两端皆得$f_1(\varphi_1)\cdot f_2(\varphi_2)$. 于是利用$\overline{\mathscr{D}_1\otimes\mathscr{D}_2}=\mathscr{D}(\Omega)$得出定理结论. □

注 1° 从(9)看出$\mathrm{supp} f_1\otimes f_2=\mathrm{supp} f_1\times\mathrm{supp} f_2$，故$f_i\in\mathscr{E}'_i(i=1,2)\Rightarrow f_1\otimes f_2\in\mathscr{E}'(\Omega)$ （见9.3.1），此时(9)对任何$\varphi\in\mathscr{E}(\Omega)$成立.

2° 若以$\mathscr{D}'_1\otimes\mathscr{D}'_2$记$\{f_1\otimes f_2\mid f_i\in\mathscr{D}'_i,\ i=1,2\}$生成的向量空间，$\mathscr{E}'_1\otimes\mathscr{E}'_2$仿此，则依9.1.4与9.2.4有

$$\mathscr{D}'_1\otimes\mathscr{D}'_2\supset\mathscr{D}_1\otimes\mathscr{D}_2\hookrightarrow\mathscr{D}(\Omega)\hookrightarrow\mathscr{D}'(\Omega)$$

及 $$\mathscr{E}'_1\otimes\mathscr{E}'_2\supset\mathscr{D}_1\otimes\mathscr{D}_2\hookrightarrow\mathscr{D}(\Omega)\hookrightarrow\mathscr{E}'(\Omega),$$

由此推出$\mathscr{D}'_1\otimes\mathscr{D}'_2$与$\mathscr{E}'_1\otimes\mathscr{E}'_2$分别在$\mathscr{D}(\Omega)$与$\mathscr{E}(\Omega)$中稠密.

3° 可用积分记号将(9)形式地写作：

$$\int f_1(x)dx\int f_2(y)\varphi(x,y)dy=\int f_2(y)dy\int f_1(x)\varphi(x,y)dx.$$

因此称(9)为“关于分布的Fubini定理”；当f_1，f_2为经典函数时，(9)表达了通常的Fubini定理. 若在(9)中令$f_1=f$，$f_2=1$，则得以下公式：

$$\langle f(x),\int\varphi(x,y)dy\rangle=\int\langle f(x),\varphi(x,y)\rangle dy,\ \varphi\in\mathscr{D}(\Omega). \tag{10}$$

从§2.4(2)(16)及2.4.7可推出与(10)对应的以下结果：

9.2.5 定理 设$f\in\mathscr{D}'(\Omega_1)$，$\varphi\in C^\infty(\Omega_1\times\Omega_2)$. 若(i) $f\in\mathscr{E}'$，或(ii) $\forall y_0\in\Omega_2$，存在y_0的邻域V，紧集$K\subset\Omega_1$，使得$\forall y\in V$：$\varphi^y\in\mathscr{D}(K)$ $(\varphi^y(x)=\varphi(x,y))$，则成立：

$$\langle f(x),\ \partial_y^\alpha\varphi(x,y)\rangle=\partial_y^\alpha\langle f(x),\ \varphi(x,y)\rangle. \tag{11}$$

可形式地将(10)与(11)看作“在积分号下取积分与取微分的规则”. 类似的观点可用到公式：

$$\langle\int f(x,y)dy,\ \varphi(x)\rangle=\int\langle f(x,y),\varphi(x)\rangle dy, \tag{12}$$

$$\langle\partial_y^\alpha f(x,y),\ \varphi(x)\rangle=\partial_y^\alpha\langle f(x,y),\varphi(x)\rangle, \tag{13}$$

其中$f^y\in\mathscr{D}'(\Omega_1)$ $(f^y(x)=f(x,y))$，且(12)(13)之右端对任

何$\varphi\in\mathscr{D}(\Omega_1)$存在．依9.1.2，由(12)(13)所确定的$\int f dy$与$\partial_y^\alpha f$是$\mathscr{D}'(\Omega_1)$中的元．

参考文献：[18]，[30]，[41]，[46]，[60]，[78]．

习 题

1．$D^\alpha(au)=\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^{\alpha-\beta}aD^\beta u$，$a\in C^\infty(\Omega,M_{pm})$，$u\in\mathscr{D}'(\Omega,m)$．

2．设$f\in L^1_{loc}(\mathrm{R}^n,m)$，$F(x)=\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_n}f(t)dt$，则$\partial_1\cdots\partial_nF=f$．

3．设$f\in\mathscr{D}'(\mathrm{R}^n,m)$，若$\tau_a f=f(a\in\mathrm{R}^n)$，则$f\equiv\mathrm{const}$．

4．若$P=\sum_{|\alpha|\leq r}a_\alpha D^\alpha$，则$P\mathscr{D}'_s\subset\mathscr{D}'_{r+s}$．

5．$\sum_1^\infty\frac{\sin kx}{k}=\frac{\pi-x}{2}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{-\infty}^{\infty}H(x-2k\pi)$，$\sum_1^\infty\cos kx=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(x-2k\pi)$．

6．设$f\in\mathscr{D}'$，则在$\mathscr{D}'$中$\lim_{h\to0}f(x+h)=f(x)$．

7．若在$\mathscr{D}'$中$f_j\to f$，在$\mathscr{E}$中$g_j\to g$，则$g_jf_j\to gf$．

8．$\delta(x,y)=\delta(x)\otimes\delta(y)$，$(x,y)\in\mathrm{R}^k\times\mathrm{R}^l$．

§3 结构定理

本节解答如下问题：一定类型的广义函数可由一定性质的经典函数经适当运算表示出来．

9.3.1 定理 设$f\in\mathscr{D}'(\Omega)$，则以下条件互相等价：(i) $f\in\mathscr{E}'$；(ii) f有紧支集；(iii) 任给$\mathrm{supp}f$的邻域V，f可表为有限和$\sum\partial^\alpha f_\alpha$：$f_\alpha\in C_c(V)$．

证 若f满足§1(1)，则依那里的记号有$\mathrm{supp}f\subset K$．若$g\in C_c(\Omega)$，$\alpha\in\mathrm{N}^n$，$K=\mathrm{supp}g$，则对任给$\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$有：

$$|\langle\partial^\alpha g,\varphi\rangle|\leq\int|g\partial^\alpha\varphi|dx\leq\|g\|_{L^1}\|\varphi\|_{K,|\alpha|},$$

可见$\partial^{\alpha} g \in \mathscr{E}'$．这就证得(iii)⇒(i)⇒(ii)．难点在于证(ii)⇒(iii)．

设$A=\operatorname{supp} f$是紧集，$A \Subset V \subset U$．设$f \in \mathscr{D}_F'$（参看§1 习题4），$s=r+n$，k是满足$|\alpha| \leqslant s$的$\alpha \in \mathrm{N}^n$之个数．取A的紧邻域W：$W \Subset V$；令$E=L^1(W)$．任给$\varphi \in \mathscr{D}(W)$，

$$|f(\varphi)| \leqslant \text{const} \|\varphi\|_r \leqslant \text{const} \sup_{|\alpha| \leqslant s} \left\| \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} \partial^{\alpha} \varphi dy \right\|_{\infty}$$
$$\leqslant \text{const} \sup_{|\alpha| \leqslant s} \|\partial^{\alpha} \varphi\|_{L^1}, \tag{1}$$

这表明$F:(\partial^{\alpha}\varphi)_{|\alpha| \leqslant s} \longmapsto f(\varphi)$是$E^k$的某子空间上的连续线性泛函．由Hahn-Banach定理、§2.3(6)及3.5.4，存在$\{f_{\alpha} \in L^{\infty}(W) | |\alpha| \leqslant s\}$，使得对任给$\varphi \in \mathscr{D}(W)$有

$$f(\varphi)=\sum_{\alpha} \int (-1)^{|\alpha|} f_{\alpha} \cdot \partial^{\alpha} \varphi dx=\langle \sum_{\alpha} \partial^{\alpha} f_{\alpha},\ \varphi \rangle,$$

于是$f=\sum \partial^{\alpha} f_{\alpha}$．补充定义$f_{\alpha} | W^c=0$，则$f_{\alpha} \in L_c^{\infty}(\mathrm{R}^n)$．余下的问题是说明$f_{\alpha}$可“改造”为$C_c$函数．首先，任给$g \in L_{loc}^1(\mathrm{R}^n)$，$g$可表成$\partial^e h$，其中$e=(1, \cdots, 1) \in \mathrm{N}^n$，

$$h(x)=\text{const} \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_n} g(y) dy. \tag{2}$$

因此不妨设已得$f=\sum \partial^{\alpha} f_{\alpha}$，$f_{\alpha} \in C(\mathrm{R}^n)$．取$\lambda \in \mathscr{D}$；$W \prec \lambda \prec V$．对任给$\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$，

$$\langle f, \varphi \rangle=\langle \sum_{\alpha} \partial^{\alpha} f_{\alpha}, \lambda \varphi \rangle=\sum_{\alpha} \langle f_{\alpha}, (-\partial)^{\alpha}(\lambda \varphi) \rangle$$
$$=\sum_{\alpha} \sum_{\beta \leqslant \alpha} (-1)^{|\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} \langle f_{\alpha}, \partial^{\alpha-\beta} \lambda \partial^{\beta} \varphi \rangle$$
$$=\langle \sum_{\alpha} \sum_{\beta \leqslant \alpha} (-1)^{|\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} (-\partial)^{\beta} (\partial^{\alpha-\beta} \lambda \cdot f_{\alpha}), \varphi \rangle,$$

由此看出所要证．□

9.3.2 定理 设$f \in \mathscr{D}'(\Omega)$，则$f=\sum_{\alpha \in \mathrm{N}^n} \partial^{\alpha} f_{\alpha}$，其中$f_{\alpha} \in$

$C(\Omega)$；当$f\in\mathscr{D}'_F$时可要求以上和式只含有限项.

证 取Ω的局部有限开覆盖$\{V_i\}$，使得$\bar{V}_i$是紧集且$\bar{V}_i\subset\Omega$；取从属于$\{V_i\}$的单位分解$\{\lambda_i\}$. 令$f_i=\lambda_i f$，则$f_i\in\mathscr{E}'(V_i)$，且$f=\sum f_i$. 由9.3.1，

$$f_i=\sum_{|\alpha|\leqslant r_i}\partial^\alpha f_{i\alpha},\ f_{i\alpha}\in C_c(V_i).$$

当$\{i\mid r_i\geqslant|\alpha|\}\neq\varnothing$时令$f_\alpha=\sum_{r_i\geqslant|\alpha|}f_{i\alpha}$，否则令$f_\alpha=0$. 则

$$f=\sum_i\sum_{|\alpha|\leqslant r_i}\partial^\alpha f_{i\alpha}=\sum_\alpha\partial^\alpha\Big(\sum_{r_i\geqslant|\alpha|}f_{i\alpha}\Big)=\sum_\alpha\partial^\alpha f_\alpha,$$

$f_\alpha\in C(\Omega)$. 当$\sup_i r_i<\infty$时，除有限个α外$f_\alpha=0$. □

注 1° 设$f\in\mathscr{D}'_F(\mathrm{R}^n)$，$f=\sum\partial^\alpha f_\alpha$是一有限和. 重复运用类似于(2)的公式提高$\partial^\alpha f_\alpha$中微分的阶数，可将$f$表为$\partial^\beta g$，$g\in C(\mathrm{R}^n)$，$|\beta|$的最小值依赖于$f$的阶. 这就清楚地显示出，$f\in\mathscr{D}'_F$与连续函数的差距"是微分运算造成的".

2° 任给$f\in\mathscr{E}'(\Omega)$，令$f|(\mathrm{R}^n\backslash\mathrm{supp}f)=0$，则将$\mathscr{E}'(\Omega)$自然地嵌入到$\mathscr{E}'(\mathrm{R}^n)$中；于是注1°亦适用于$f\in\mathscr{E}'(\Omega)$.

9.3.3 定理 设$f\in\mathscr{D}'_r(\Omega)$，$A=\mathrm{supp}f$是紧集，$\varphi\in\mathscr{E}(\Omega)$，$\partial^\alpha\varphi|A=0\ (|\alpha|\leqslant r)$. 则$f(\varphi)=0$.

证 取紧集$K\subset\Omega$：$A\Subset K$. 任给$\varepsilon>0$，不难从5.4.6推出：存在有限个开集V_i,W_i及$g_i\in\mathscr{E}(\Omega)$，使得$A\subset\bigcup V_i$，$V_i\Subset W_i\Subset K$，$g_i|W_i=0$，$\|g_i-\varphi\|_r<\varepsilon$. 取$\bigcup V_i$上从属于$\{W_i\}$的单位分解$\{\lambda_i\}$，则$\sum\lambda_i g_i=0$. 于是依§1(3)有：

$$|f(\varphi)|\leqslant\sum_i|f(\lambda_i(g_i-\varphi))|$$

$$\leqslant\mathrm{const}\sum_i\|\lambda_i(g_i-\varphi)\|_{K,r}<\mathrm{const}\cdot\varepsilon,$$

由此看出$f(\varphi)=0$. □

9.3.4 定理 设$f\in\mathscr{D}'(\mathrm{R}^n)$. 则$\mathrm{supp}f=\{0\}$当且仅当$f=P(D)\delta$，$P$是某个常系数多项式.

证 设$\operatorname{supp}f=\{0\}$，可设$f\in\mathscr{D}'_r(r\in\mathrm{N})$．任给$\varphi\in\mathscr{D}(\mathrm{R}^n)$，令

$$\psi(x)=\varphi(x)-\sum_{|\alpha|\leqslant r}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha\varphi(0)x^\alpha,$$

则$f(\psi)=0$ (9.3.3)．于是

$$\begin{aligned}f(\varphi)&=\sum_{|\alpha|\leqslant r}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha\varphi(0)\langle f(x),x^\alpha\rangle\\&=\langle\sum_{|\alpha|\leqslant r}c_\alpha(-\partial)^\alpha\delta,\varphi\rangle,\end{aligned}$$

其中 $c_\alpha=\langle f(x),x^\alpha\rangle/\alpha!$．可见$f=\sum_{|\alpha|\leqslant r}c_\alpha(-iD)^\alpha\delta$．

逆命题是显然的． □

9.3.5 定理 $f\in\mathscr{S}'(\mathrm{R}^n)\Longleftrightarrow f=\partial^\beta g$，$\beta\in\mathrm{N}^n$，$g\in C(\mathrm{R}^n)$是缓增函数（参看8.5.7）．

证 若$g\in C(\mathrm{R}^n)$是缓增的，则有$k\in\mathrm{N}$：

$$\varphi(x)=g(x)(1+|x|^2)^{-k}\in L^\infty\subset\mathscr{S}'$$

(9.1.4)，于是$g(x)=(1+|x|^2)^k\varphi(x)\in\mathscr{S}'$，从而$\forall\beta\in\mathrm{N}^n$：$\partial^\beta g\in\mathscr{S}'$（参看上节）．

今设$f\in\mathscr{S}'(\mathrm{R}^n)$，则依§1(2)有多项式$h$，$r\in\mathrm{N}$：

$$|f(\varphi)|\leqslant\text{const}\cdot\sup_{|\alpha|\leqslant r}\|h\partial^\alpha\varphi\|_u,\quad\forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathrm{R}^n).$$

不难归纳地指明，对任给$\alpha\in\mathrm{N}^n$，$\varphi\in\mathscr{D}(\mathrm{R}^n)$有：

$$\|h\partial^\alpha\varphi\|_u\leqslant\text{const}\cdot\sup_{\beta\leqslant\alpha}\|\partial^\beta(h\varphi)\|_u.$$

因此 $$|f(\varphi)|\leqslant\text{const}\|h\varphi\|_r\leqslant\text{const}'\sup_{|\alpha|\leqslant s}\|\partial^\alpha(h\varphi)\|_{L^1},$$

其中$s=r+n$（参考(1)）．于是如同9.3.1之证明一样有$\{g_\alpha\in L^\infty(\mathrm{R}^n)\mid|\alpha|\leqslant s\}$，使得对任给$\varphi\in\mathscr{D}(\mathrm{R}^n)$有

$$f(\varphi)=\sum_{|\alpha|\leqslant s}\langle(-1)^{|\alpha|}g_\alpha,\partial^\alpha(h\varphi)\rangle,$$

故得

$$f=\sum_{|\alpha|\leqslant s}h\partial^\alpha g_\alpha.\tag{3}$$

现在运用证9.3.1时使用的方法将(3)改造成所需的形式．

首先，用形如(2)的式子将 g_α 转化为缓增连续函数．其次，$h\partial^\alpha g_\alpha=\sum\limits_{\beta\leqslant\alpha}\partial^\beta(h_{\alpha\beta}g_\alpha)$，$h_{\alpha\beta}$从 h 求导得到．因此可设$f=\sum\partial^\alpha f_\alpha$，$f_\alpha$是缓增连续函数．最后，依 9.3.2 后面注1°所述的理由，可从$f=\sum\partial^\alpha f_\alpha$得出$f=\partial^\beta g$，$g$ 是缓增连续函数． □

推论 $\mathscr{S}'\subset\mathscr{D}'_F$；若 $f\in L^1_{loc}(\mathrm{R}^n)$是缓增的，则$f\in\mathscr{S}'$；特别$\mathscr{S}'$包含了所有多项式．

9.3.5阐明了"缓增分布"一词的意义．

本节的所有结果都可推广到向量值分布，且证法无需任何本质的改动．

参考文献：[18]，[30]，[41]，[60]，[64]，[78]．

习　题

1．$f\in\mathscr{D}'_r\Longleftrightarrow f=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant r}\partial^\alpha f_\alpha$，$f_\alpha\in\mathscr{D}'_0$．

2．$|h\partial^\alpha\varphi|_u\leqslant\mathrm{const}\|h\varphi\|_r$，$|\alpha|\leqslant r$，$\varphi\in\mathscr{D}$．

3．$\mathscr{S}'$是$\mathscr{D}'$的具有以下性质的最小子空间：它包含 L^1，且对微分与乘多项式的运算封闭．

4．设$f\in\mathscr{D}'(\Omega)$，$K\subset\Omega$ 是紧集．则存 $g\in L^\infty(K)$与$m\geqslant0$，使得在K上有$f=\partial_1^m\cdots\partial_n^m g$．

§4　卷　　积

在以下两节及§8中我们要在广义函数的框架内重建Fourier分析的某些结果．首先推广卷积概念．任给$\mu,\nu\in M(\mathrm{R}^n)$，$\varphi\in\mathscr{D}$($\mathscr{D}=\mathscr{D}(\mathrm{R}^n)$，下面出现的记号$\mathscr{E}$，$\mathscr{S}$，$L^1$等仿此)，依§8.2(11)及§1(7)有

$$\langle\mu*\nu,\varphi\rangle=\int d\mu(x)\int\varphi(x+y)d\nu(y)=\langle\mu(x),\nu(\varphi_x)\rangle,\tag{1}$$

其中 $\varphi_x=\tau_x\varphi$．这就启示出以下定义：称由等式

$$\langle f*g,\varphi\rangle=\langle f(x),g(\varphi_x)\rangle\quad(\forall\,\varphi\in\mathscr{D})\tag{2}$$

决定的$f*g$为$f,g\in\mathscr{D}'$的卷积，只要(2)右端有意义.

9.4.1 定理 若$(f,g)\in(\mathscr{D}'\times\mathscr{E}')\cup(\mathscr{E}'\times\mathscr{D}')$，则$f*g=g*f\in\mathscr{D}'$，$\mathrm{supp}(f*g)\subset\mathrm{supp}f+\mathrm{supp}g$；$\mathscr{D}'\times\mathscr{E}'\to\mathscr{D}'$，$(f,g)\longmapsto f*g$分别对$f$，$g$为连续线性映射，且

$$\partial^\alpha(f*g)=\partial^\alpha f*g=f*\partial^\alpha g(\alpha\in\mathrm{N}^n).$$

证 若$f,g\in\mathscr{E}'$，则$f=\sum\partial^\alpha f_\alpha$，$g=\sum\partial^\beta g_\beta$，$f_\alpha,g_\beta\in C_c$(9.3.1)，于是不难由直接计算得出

$$f*g=\sum_{\alpha,\beta}\partial^{\alpha+\beta}(f_\alpha*g_\beta)=g*f\in\mathscr{E}',$$

其中$f_\alpha*g_\beta$依§8.2. 其次设$f,g\in\mathscr{D}'$，$A=\mathrm{supp}g$紧. 任给有界开集$U\subset\mathrm{R}^n$，取$U-A$的紧邻域V，$\tau\in\mathscr{D}$：$V\prec\tau$. 任给$\varphi\in\mathscr{D}(U)$，令$\psi(x)=g(\varphi_x)$，则易见$\psi\in\mathscr{D}(V)$（参考2.4.7），且当$x\in A$时$\varphi_x\in\mathscr{D}(V)$. 于是依(2)及已证结论有：

$$\begin{aligned}\langle f*g,\varphi\rangle&=\langle\tau f,\psi\rangle=\langle(\tau f)*g,\varphi\rangle\\&=\langle g*(\tau f),\varphi\rangle=\langle g(x),\langle f,\tau\varphi_x\rangle\rangle\\&=\langle g*f,\varphi\rangle,\end{aligned}$$

由U的任意性，得出$f*g=g*f\in\mathscr{D}'$. 保持A,U,φ,ψ的意义，假定$U\cap(\mathrm{supp}f+A)=\varnothing$，则必$\mathrm{supp}\psi\subset U-A\subset(\mathrm{supp}f)^c$，因此$f(\psi)=0$，这表明$\mathrm{supp}(f*g)\subset\mathrm{supp}f+\mathrm{supp}g$. 定理的余下结论是明显的. □

直接看出$\forall f\in\mathscr{D}'$：$f*\delta=f$，因此9.4.1推出，$\mathscr{E}'$是以δ为单位元的交换代数，9.4.4将指明这个代数是结合的.

9.4.2 定理 若$(f,g)\in(\mathscr{E}'\times\mathscr{E})\cup(\mathscr{D}'\times\mathscr{D})\cup(\mathscr{S}'\times\mathscr{S})$，则$f*g\in C^\infty$，且$(f*g)(x)=\langle f(y),g(x-y)\rangle=\langle\check{f},g_x\rangle$.

证 1° 设$(f,g)\in\mathscr{E}'\times\mathscr{E}$. 令$f=\sum\partial^\alpha f_\alpha$，$f_\alpha\in L^1_c$，则$f*g=\sum f_\alpha*\partial^\alpha g\in C^\infty$ (8.2.3)，

$$\begin{aligned}(f*g)(x)&=\sum\langle f_\alpha(y),\ (\partial^\alpha g)(x-y)\rangle\\&=\sum\langle\partial^\alpha f_\alpha(y),g(x-y)\rangle=\langle f(y),g(x-y)\rangle.\end{aligned}$$

2° 设$(f,g)\in\mathscr{D}'\times\mathscr{D}$, $A=\operatorname{supp}g$. 任给有界开集$U\subset\mathbf{R}^n$, 取如9.4.1证明中所述的τ，则$(f*g)|U=((\tau f)*g)|U\in C^\infty$, 且对任给$x\in U$有

$$(f*g)(x)=\langle\tau(y)f(y),\ g(x-y)\rangle=\langle f(y),g(x-y)\rangle.$$

由已证结论，现在可将(2)写成$\langle f*g,\varphi\rangle=\langle f,\check{g}*\varphi\rangle$.

3° 设$(f,g)\in\mathscr{S}'\times\mathscr{S}$. 若在$\mathscr{S}$中$\varphi_k\to\varphi$, $\check{g}*\varphi_k\to\psi$, 则在$L^1$中$\varphi_k\to\varphi$, $\check{g}*\varphi_k\to\check{g}*\varphi=\psi$ (8.2.2,8.5.8). 由闭图象定理，$\mathscr{S}\to\mathscr{S}$, $\varphi\longmapsto\check{g}*\varphi$是连续线性算子，因此由$\langle f*g,\varphi\rangle=\langle f,\ \check{g}*\varphi\rangle(\varphi\in\mathscr{S})$决定$f*g\in\mathscr{S}'$. 令$h(x)=\langle f(y),g(x-y)\rangle$, 则可归纳地指明$\partial^\alpha h(x)=\langle f(y),\partial^\alpha g(x-y)\rangle$，从而$h\in C^\infty$. $\forall\varphi\in\mathscr{D}$:

$$\langle f*g,\varphi\rangle=\langle f(y),\ \int g(x-y)\varphi(x)dx\rangle$$
$$=\int\langle f(y),g(x-y)\rangle\varphi(x)dx=\langle h,\varphi\rangle,$$

可见$f*g=h\in C^\infty$. □

9.4.2表明，如同在经典情况下一样，卷积可用来实现广义函数的光滑化. 取$\theta_s\in\mathscr{D}[\mathscr{E}]$, 使得在$\mathscr{D}'$中$\theta_s\to\delta$, 即对任给$\varphi\in\mathscr{D}$有

$$\varphi(0)=\lim_s\langle\theta_s,\varphi\rangle=\lim_s(\check{\varphi}*\theta_s)(0)\tag{3}$$

(由8.3.2，当θ_s是逼近单位时(3)必成立)，则对任给$f\in\mathscr{D}'$ $[\mathscr{E}']$有$f*\theta_s\in C^\infty$, 且在$\mathscr{D}'$中$f*\theta_s\to f*\delta=f$. 用此可证明类似于8.3.6的以下结果:

9.4.3 定理 任给$f\in\mathscr{D}'(\Omega)$，存在序列$\{g_i\}\subset\mathscr{D}(\Omega)$, $g_i\to f$.

证 设$\theta_s,K_i,\varphi_i,s_i$的意义如同8.3.6(ii)之证明，$f_i=\varphi_i f$, $g_i=f_i*\theta_{s_i}\in\mathscr{D}(\Omega)$, 则对任给$\psi\in\mathscr{D}(\Omega)$, i充分大时,

$$\langle g_i, \psi\rangle = \langle f_i, \check{\theta}_{\varepsilon_i} * \psi\rangle$$

$$= \langle f, \check{\theta}_{\varepsilon_i} * \psi\rangle \to \langle f, \psi\rangle \ (i\to\infty). \qquad \square$$

利用9.4.3，可将经典函数的某些性质过渡到广义函数．例如，当$\varphi\in C^\infty(\Omega)$，$f\in\mathscr{D}(\Omega)$时成立

$$\partial^\alpha(\varphi f) = \sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\partial^{\alpha-\beta}\varphi\partial^\beta f,\quad \alpha\in\mathrm{N}^n; \qquad (4)$$

通过一个极限过程，可知(4)亦对$f\in\mathscr{D}'(\Omega)$为真．

9.4.4 定理 若(i) $f, g, h\in\mathscr{D}'$，其中至少两个属于$\mathscr{E}'$，或 (ii) $f\in\mathscr{S}'$，$g, h\in\mathscr{S}$，则$(f*g)*h = f*(g*h)$．

证 若条件(i)满足，则由$\mathscr{D}$中卷积的结合性、卷积对各因子的连续性及9.4.3推出定理结论．在条件(ii)之下，对任给$\varphi\in\mathscr{D}$有

$$\langle (f*g)*h, \varphi\rangle = \langle f, \check{g}*(\check{h}*\varphi)\rangle = \langle f, (g*h)^\vee*\varphi\rangle,$$

由此亦得 $(f*g)*h = f*(g*h)$． $\square$

若用缩记号$A*B = \{a*b\,|\,a\in A, b\in B\}$，则由9.4.1与9.4.2有$\mathscr{D}'*\mathscr{E}'\subset\mathscr{D}'$，$\mathscr{S}'*\mathscr{S}\subset\mathscr{S}'$．后者还可大大加强．

9.4.5 定义 若 $g\in\mathscr{D}'$，对任给 $k\in\mathrm{N}$，存在分解式 $g=\sum_{|\alpha|\leqslant r_k}\partial^\alpha g_\alpha$，使得 $x^\beta g_\alpha\in L^\infty$ ($|\beta|\leqslant k$, $|\alpha|\leqslant r_k$)，则称g为速降分布．速降分布之全体记作$\mathscr{O}_C'$．

不难看出$\mathscr{S}\cup\mathscr{E}'\subset\mathscr{O}_C'\subset\mathscr{S}'$ (参考9.3.1, 9.3.5)．

9.4.6 定理 $\mathscr{S}'*\mathscr{O}_C'\subset\mathscr{S}'$ (与$\mathscr{O}_M\cdot\mathscr{S}'\subset\mathscr{S}'$对照，也称$\mathscr{O}_C'$为$\mathscr{S}'$关于卷积的乘子空间)．

证 只需对取定的$g\in\mathscr{O}_C'$证$\mathscr{S}\to\mathscr{S}$，$\varphi\longmapsto g*\varphi$是连续线性算子．设$\varphi\in\mathscr{S}$，任给$\beta$，$\gamma\in\mathrm{N}^n$，取充分大的$k\in\mathrm{N}$，设$g=\sum\partial^\alpha g_\alpha$满足9.4.5之条件，则

$$\|x^{\gamma}\partial^{\beta}(g*\varphi)\|_{\infty}\leqslant\sum_{\alpha}\|x^{\gamma}(g_{\alpha}*\partial^{\alpha+\beta}\varphi)\|_{\infty}$$

$$=\sum_{\alpha}\left\|\sum_{\delta\leqslant\gamma}\binom{\gamma}{\delta}(x^{\delta}g_{\alpha})*(x^{\gamma-\delta}\partial^{\alpha+\beta}\varphi)\right\|_{\infty}$$

$$\leqslant\text{const}\sum_{\alpha}\sum_{\delta\leqslant\gamma}\|x^{\delta}g_{\alpha}\|_{\infty}\|x^{\gamma-\delta}\partial^{\alpha+\beta}\varphi\|_{L^1}<\infty,$$

可见$g*\varphi\in\mathscr{S}$. 若在$\mathscr{S}$中$\varphi_j\to\varphi$, $g*\varphi_j\to\psi$, 则从$(g*\varphi_j)(x)=\langle g(y),\varphi_j(x-y)\rangle$ (9.4.2) 看出$g*\varphi_j$逐点收敛到$g*\varphi$, 因此$\psi=g*\varphi$. 于是要证结论从闭图象定理推出. □

$p\times m$ 个分布 $a_{ij}\in\mathscr{D}'$ 构成一个**矩阵值分布** $a=(a_{ij})\in\mathscr{D}'(\mathrm{R}^n,M_{pm})$. 若另有 $b=(b_{jk})\in\mathscr{D}'(\mathrm{R}^n,M_{mq})$, 自然规定卷积$a*b=(c_{ik})$, 只要$c_{ik}=\sum_j a_{ij}*b_{jk}$有意义. 前述的卷积性质自然地推广于矩阵值分布的卷积, 只要这些性质不与矩阵的形式运算规则相抵触. 任给$f\in\mathscr{D}'$, $a=(a_{ij})\in\mathscr{D}'(\mathrm{R}^n,M_{pm})$, 约定$f*a=a*f=(f*a_{ij})$, 只要 $f*a_{ij}$ 皆存在.

给定$a\in\mathscr{D}'(\mathrm{R}^n,M_{pm})$, $b\in\mathscr{D}'(\mathrm{R}^n, M_{pq})$, 称

$$a*u=b \tag{5}$$

为以 a 为核、以 u 为未知函数的**卷积方程**; $a*u=0$ 是对应的**齐次方程**. (5)统一了几类重要的方程: 若令$a=\sum_{|\alpha|\leqslant r}a_{\alpha}D^{\alpha}\delta$, $a_{\alpha}\in M_{pm}$, $b\in\mathscr{D}'(\mathrm{R}^n,p)$, 则

$$a*u=\sum_{\alpha}a_{\alpha}D^{\alpha}(\delta*u)=\sum_{\alpha}a_{\alpha}D^{\alpha}u=Pu,$$

其中$P=\sum_{|\alpha|\leqslant r}a_{\alpha}D^{\alpha}$, 此时 (5) 变成常系数线性偏微分方程组 $Pu=b$; 若令 $a=K+\delta$, $K\in L^1_{loc}(\mathrm{R})$, 设supp$K\cup$supp$u\cup$supp$b\subset[0,\infty)$, 则(5)成为“第一类Volterra积分方程”:

$$u(x)+\int_0^x K(x-t)u(t)dt=b(x).$$

若$a*E=\delta$, 则称E为方程(5)的**基本解**; 相应地, 若$PE=\delta$, P是线性微分算子, 则称E为方程 $Pu=b$ 或微分算子 P

的基本解. 以下结果初步指明了基本解的意义.

9.4.7 定理 设 $a, b \in \mathscr{E}'$, $E \in \mathscr{D}'$, $a * E = \delta$. 则 $u = E * b$ 满足(5); (5)在 $\mathscr{E}'$中至多一个解.

证 显然 $a*(E*b) = (a*E)*b = \delta*b = b$. 若 $a*v = b$, $v \in \mathscr{E}'$, 则 $v = \delta*v = (E*a)*v = E*b$. □

判定基本解的存在性通常是很困难的问题.

参考文献: [20], [30], [41], [60], [64], [78].

习 题

1. 设 $f \in \mathscr{D}'$, 则 $f = 0 \Longleftrightarrow \forall \varphi \in \mathscr{D}$: $f * \varphi = 0$.
2. 若 $(f, g) \in \mathscr{S}' \times \mathscr{S}$, 则 $f * g = g * f$.
3. 每个 $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ 可用多项式逼近.
4. 设 $f(x) = \exp(i|x|^2)$, 则 $f \in \mathscr{O}_C'$.

§5 Fourier 变 换

拓扑同构 $\mathscr{S}(\mathrm{R}^n, m) \to \mathscr{S}(\mathrm{R}^n, m)$, $\varphi \longmapsto \hat{\varphi}$(8.5.9) 的对偶 $\mathscr{S}'(\mathrm{R}^n, m) \to \mathscr{S}'(\mathrm{R}^n, m)$, $f \longmapsto \hat{f}$亦为拓扑同构, 称它为对缓增分布的Fourier变换. 任给 $f \in \mathscr{S}'$, $\hat{f}$ 决定于公式:

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle, \quad \varphi \in \mathscr{S}. \tag{1}$$

反演公式 $\varphi = \varphi^{\wedge\wedge\vee}$($\varphi \in \mathscr{S}$, 参看 §8.5(2)) 推出反演公式 $f = f^{\wedge\wedge\vee}$($f \in \mathscr{S}'$). 若 $f = (f_1, \cdots, f_m) \in \mathscr{S}'(\mathrm{R}^n, m)$, 显然 $\hat{f} = (\hat{f}_1, \cdots, \hat{f}_m)$. 通过取对偶, §8.5(5)(6)直接过渡到 $f \in \mathscr{S}'$的情况.

对于 $f \in L^1$, 不难验证 $\hat{f}$ (依8.5.1) 满足(1); 若 $f \in L^2$, $\hat{f}$依 8.5.10, 取 $\{f_k\} \subset \mathscr{S}$: $\|f_k - f\|_{L^2} = \|\hat{f}_k - \hat{f}\|_{L^2} \to 0$, 则在 $\mathscr{S}'$中 $f_k \to f$, $\hat{f}_k \to \hat{f}$, 于是对任给 $\varphi \in \mathscr{S}$ 有:

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \lim_k \langle \hat{f}_k, \varphi \rangle = \lim_k \langle f_k, \hat{\varphi} \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle.$$

由此可见, L^1与L^2函数(从而L^p函数, $1 < p < 2$) 的 Fourier 变

换与它们作为广义函数的Fourier变换一致.

9.5.1 例 1° 直接看出$\hat{\delta}=1$，从而$\hat{1}=\delta$.

2° 设$H(x)=\sqrt{2\pi}\,\chi_{[0,\infty)}$，$\varphi\in\mathscr{D}(\mathrm{R})$，$\mathrm{supp}\varphi\subset[-a,a]$，则

$$\begin{aligned}\langle H,\hat{\varphi}\rangle&=\sqrt{2\pi}\int_0^\infty dy\int_{-a}^a\varphi(x)e^{-ixy}dx\\&=\lim_{b\to+\infty}\sqrt{2\pi}\int_{-a}^a\varphi(x)dx\int_0^b e^{-ixy}dy\\&=(-i)P\cdot\int_{-\infty}^\infty\frac{\varphi(x)}{x}dx+\lim_{b\to+\infty}\int_0^a\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\\&\quad\cdot\cos bx dx+\lim_{b\to+\infty}\int_0^a[\varphi(x)+\varphi(-x)]\frac{\sin bx}{x}dx\\&=-i\left\langle P\cdot\left(\frac{1}{x}\right),\ \varphi\right\rangle+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\varphi(0)\end{aligned}$$

（其中用到8.4.3与8.4.4），故得

$$\hat{H}(x)=-iP\cdot\left(\frac{1}{x}\right)+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(x). \qquad (2)$$

§8.5(7)的推广依赖于$\mathscr{O}_M$与$\mathscr{O}'_C$的以下关系：

9.5.2 定理 $\mathscr{O}_M\longrightarrow\mathscr{O}'_C$，$f\longmapsto\hat{f}$是一双射.

证 设$f\in\mathscr{O}_M$. 依8.5.7，任给$k\in\mathrm{N}$，存在$r\in\mathrm{N}$：

$$(1+|x|^2)^{-r}\partial^\alpha f(x)\in L^\infty.\ (|\alpha|\leqslant k)$$

令$g(x)=(1+|x|^2)^{-r-n-1}f(x)$，则$(1+|x|^2)^{-n-1}\partial^\alpha g(x)\in L^\infty$ $(|\alpha|\leqslant k)$，$\hat{f}=(1-\Delta)^{r+n+1}\hat{g}$，当$|\alpha|\leqslant k$时，$\|\xi^\alpha\hat{g}(\xi)\|_\infty=\|(\partial^\alpha g)^\wedge\|_\infty\leqslant\|\partial^\alpha g\|_{L^1}<\infty$. 由9.4.5，$\hat{f}\in\mathscr{O}'_C$. 其次设$f\in\mathscr{O}'_C$. 任给$\beta\in\mathrm{N}^n$，令$k=|\beta|+n+1$. 依9.4.5，$f=\sum_{|\alpha|\leqslant r}D^\alpha f_\alpha$，$x^\gamma f_\alpha\in L^\infty(|\gamma|\leqslant k,\ |\alpha|\leqslant r)$. 于是

$$D^\beta\hat{f}(\xi)=\sum_{|\alpha|\leqslant r}D^\beta(\xi^\alpha\hat{f}_\alpha(\xi))$$

$$= \sum_{|\alpha| \leqslant r, \delta \leqslant \beta} \binom{\beta}{\delta} (D^{\beta-\delta}\xi^\alpha)((-x)^\delta f_\alpha))^\wedge(\xi),$$

由此看出$D^\beta \hat{f}(\xi)$是通常意义的偏导数，且

$$|D^\beta \hat{f}(\xi)| \leqslant \mathrm{const}(1+|\xi|)^r \sum_{\alpha,\delta} \|x^\delta f_\alpha\|_{L^1} \leqslant \mathrm{const}(1+|\xi|)^r.$$

由8.5.7，$\hat{f} \in \mathscr{O}_M$. 由此得出定理结论. □

9.5.3 定理 设$f \in \mathscr{S}'(\mathrm{R}^n)$，$g \in \mathscr{O}'_C$，$h \in \mathscr{O}_M$，则

$$(f*g)^\wedge = \hat{f}\hat{g};\quad (fh)^\wedge = \hat{f}*\hat{h}. \tag{3}$$

证 只需证第一式. 任给$\varphi \in \mathscr{S}$，

$$\langle f*g, \varphi\rangle = \langle f(x), g(\tau_x \varphi)\rangle = \langle f(x), \langle \hat{g}, e_{-x}\varphi\rangle\rangle$$
$$= \langle f, (\hat{g}\varphi)^\wedge\rangle = \langle \hat{f}\hat{g}, \varphi\rangle,$$

其中$e_{-x}(y) = e^{-ix\cdot y}$. 由此可见$(f*g)^\wedge = \hat{f}\hat{g}$. □

$f \in \mathscr{S}'$在"无穷远处"的性状强烈地影响到$\hat{f}$的正则性；若$f \in \mathscr{E}'$，则$\hat{f}$属于"充分好"的函数类.

9.5.4 Paley-Wiener定理 若$f \in \mathscr{E}'(\mathrm{R}^n)$，$\mathrm{supp} f \subset \bar{B}^n(0,\delta)$，则

$$\hat{f}(\xi) = \langle f(t),\ e^{-i\xi\cdot t}\rangle,\ \xi \in \mathrm{R}^n; \tag{4}$$

且

$$h(z) = \langle f(t),\ e^{-iz\cdot t}\rangle,\ z \in \mathrm{C}^n \tag{5}$$

是整函数（其中$z\cdot t = x\cdot t + iy\cdot t$，$z = x+iy$），它满足

$$|h(z)| \leqslant C(1+|z|)^r e^{\delta|y|}, \tag{6}$$

$C>0$，$r \in \mathrm{N}$与z无关. 称$h(z)$为f的"Fourier-Laplace变式"，且就写作$\hat{f}(z)$. 任给满足(6)的整函数$h \in H(\mathrm{C}^n)$，必存在$f \in \mathscr{E}'$：$\hat{f}(z) = h(z)$，$\mathrm{supp} f \subset \bar{B}^n(0,\delta)$.

证 设$f = \sum D^\alpha f_\alpha$，$f_\alpha \in L^\infty_c(\mathrm{R}^n)$(9.3.1)，则$\hat{f} \in \mathscr{O}_M$，$\forall \xi \in \mathrm{R}^n$，

$$\hat{f}(\xi) = \sum \xi^\alpha \hat{f}_\alpha(\xi) = \sum \xi^\alpha \langle f_\alpha(t), e^{-i\xi\cdot t}\rangle$$
$$= \sum_\alpha \langle f_\alpha(t), (-D_t)^\alpha e^{-i\xi\cdot t}\rangle = \langle f(t), e^{-i\xi\cdot t}\rangle.$$

直接看出(5)是整函数. 取$g \in C^\infty(\mathrm{R})$，$(-\infty,1] \prec g \prec (-\infty,2)$；令

$$\varphi_z(t)=g((|t|-\delta)|z|)e^{-iz\cdot t},\ t\in\mathbf{R}^n,$$

则对任给 $z\in\mathbf{C}^n\backslash 0$，$\varphi_z\in\mathscr{D}$，$\operatorname{supp}\varphi_z\subset B^n(0,\delta+2|z|^{-1})$，当 $|t|<\delta+|z|^{-1}$ 时 $\varphi_z(t)=e^{-iz\cdot t}$。取 $r\in\mathbf{N}$：$|f(\varphi)|\leqslant\text{const}\|\varphi\|_r$ $(\varphi\in\mathscr{D})$，则

$$\begin{aligned}|h(z)|&=|f(\varphi_z)|\leqslant\text{const}\|\varphi_z\|_r\\&\leqslant\text{const}\sup_{|\alpha|\leqslant r,|t|\leqslant\delta+2/|z|}\sum_{\beta\leqslant\alpha}|z^\beta e^{y\cdot t}\partial_t^{\alpha-\beta}g((|t|-\delta)|z|)|\\&\leqslant\text{const}(1+|z|)^r e^{\delta|y|},\quad z=x+iy\in\mathbf{C}^n.\end{aligned}$$

反之，若 $h\in H(\mathbf{C}^n)$ 满足(6)，则 $h|\mathbf{R}^n\in\mathscr{S}'$(9.3.6)，于是有 $f\in\mathscr{S}'$，$\hat{f}=h|\mathbf{R}^n$。设 θ_s 如8.3.6证明中所述，则 $h_s(z)=\hat{\theta}_s(z)h(z)\in H(\mathbf{C}^n)$，$h_s|\mathbf{R}^n=(f*\theta_s)^\wedge$。取充分大的 $k\in\mathbf{N}$，由(6)，

$$\begin{aligned}|h_s(z)|&\leqslant\text{const}(1+|z|)^{-k}e^{\delta|y|}(1+|z|)^{k+r}|\hat{\theta}_s(z)|\\&\leqslant\text{const}(1+|z|)^{-k}e^{\delta|y|}\sum_{|\alpha|\leqslant k+r}|(\partial^\alpha\theta_s)^\wedge(z)|\\&\leqslant\text{const}(1+|z|)^{-k}e^{(\delta+s)|y|}\sum_{|\alpha|\leqslant k+r}\|\partial^\alpha\theta_s\|_{L^1}\\&\leqslant\text{const}(1+|z|)^{-k}e^{(\delta+s)|y|}\quad(z=x+iy),\end{aligned}\tag{7}$$

于是可定义 C^∞ 函数

$$g_s(t)=\int h_s(x)e^{ix\cdot t}dx,\ t\in\mathbf{R}^n.$$

任给 $z_2,\cdots,z_n\in\mathbf{C}$，在 (x_1,y_1) 平面中的矩形 $|x_1|\leqslant a$，$0\leqslant y_1\leqslant y_1^0$ 上应用Cauchy定理并利用(7)，不难推出：

$$\int_{-\infty}^{\infty}h_s(z)e^{iz\cdot t}dx_1=\int_{-\infty}^{\infty}h_s(z^0)e^{iz^0\cdot t}dx_1,\tag{8}$$

其中 $z=(x_1,z_2,\cdots,z_n)$，$z^0=(x_1+iy_1^0,z_2,\cdots,z_n)$。对每个坐标建立类似于(8)的等式，就得到 $g_s(t)$ 的新表达式：

$$g_s(t)=\int h_s(z)e^{iz\cdot t}dx,\ t\in\mathbf{R}^n,\ z=x+iy\in\mathbf{C}^n.\tag{9}$$

令 $z=x+ibt$，则当 $|t|>\delta+s$ 时，由(7)(9)有：

$$|g_s(t)| \leqslant \text{const}\int(1+|x|)^{-k}e^{b|t|(\delta+s-t)}dx \to 0(b\to+\infty),$$

可见$\text{supp}g_s\subset \bar{B}^n(0,\delta+s)$，于是$g_s=g_s^{\vee\wedge\wedge}=h_s^{\vee\wedge}=f*\theta_s$。若$\varphi\in \mathscr{D}$，$\text{supp}\varphi\cap\bar{B}^n(0,\delta)=\varnothing$，$s$ 充分小，则$\varphi g_s=0$，于是$\langle f,\varphi\rangle=\lim\limits_{s\to 0}\langle g_s,\varphi\rangle=0$，可见$\text{supp}f\subset\bar{B}^n(0,\delta)$。整函数$\hat{f}(z)$与$h(z)$在$\mathrm{R}^n$上重合，故必定$\hat{f}(z)=h(z)$ $(z\in\mathrm{C}^n)$。 □

9.5.5 定理 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathrm{R}^n)\Longleftrightarrow\hat{\varphi}\in H(\mathrm{C}^n)$，且$\exists\delta>0$，$\forall k>0$：

$$|\hat{\varphi}(z)|\leqslant\text{const}(1+|z|)^{-k}e^{\delta|y|},\ z=x+iy\in\mathrm{C}^n. \quad (10)$$

证 首先指出，若在9.5.4中$f\in\mathscr{D}$，则(6)中可令$r=0$。今设$\varphi\in\mathscr{D}$，则将(6)用到$(D^\alpha\varphi)^\wedge(z)$ $(|\alpha|\leqslant k)$ 得出 (10)。反之，若(10)满足，则$|\hat{\varphi}(\xi)|\leqslant\text{const}(1+|\xi|)^{-k}(\xi\in\mathrm{R}^n)$，

$$\varphi(x)=\int\hat{\varphi}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi,$$

在积分号下可微分任意次，结合9.5.4得出$\varphi\in\mathscr{D}$。 □

考虑一个求Fourier变换的特殊例子。约定$\delta_a=\tau_{-a}\delta$。

9.5.6 引理 设$f_s=\sum\limits_{k\in\mathrm{Z}^n}\delta_{sk}$ $(0\neq s\in\mathrm{R})$，则

$$\hat{f}_s=(\sqrt{2\pi}/s)^n f_{2\pi/s}.$$

证 直接验证$f_s*\delta_{sk}=f_s(k\in\mathrm{Z}^n)$，因此$\hat{f}_s=e_{-sk}\hat{f}_s$，$\text{supp}\hat{f}_s\subset\{x|\,e^{isk\cdot x}=1\}=\frac{2\pi}{s}\mathrm{Z}^n$。取充分小的 0-邻域 $U\subset\mathrm{R}^n$，任给$\varphi\in\mathscr{D}(U)$，可设$\varphi(x)=\varphi(0)+\sum\limits_j\varphi_j(x)\sin\frac{s}{2}x_j$，$\varphi_j\in\mathscr{D}(U)$。从$\hat{f}_s=e_{sk}\hat{f}_s$ $(k\in\mathrm{Z}^n)$ 推出$\hat{f}_s(x)\sin\frac{s}{2}x_j=0(1\leqslant j\leqslant n)$，因此$\langle\hat{f}_s,\varphi\rangle=c\varphi(0)$（$c$ 是待定系数），可见$\hat{f}_s|U=c\delta$。因

$$\hat{f}_s=\sum_k\hat{\delta}_{sk}=\sum_k e_{sk}=\sum_k\tau_{2\pi l/s}e_{sk}=\tau_{2\pi l/s}\hat{f}_s\quad(l\in\mathrm{Z}^n),$$

故 $$\hat{f}_s=\sum_k \tau_{2\pi k/s}(c\delta)=c\hat{f}_{2\pi/s}.$$

取 $\varphi\in\mathscr{D}(U)$，使$\int\varphi dx\neq 0$，则对任给$x\in\mathrm{R}^n$有：

$$\langle f_s, e_x\varphi\rangle=\langle\hat{f}_s,\tau_x\varphi\rangle=c\langle f_{2\pi/s},\tau_x\varphi\rangle,$$

或即 $$\sum_k\phi(sk)e^{isk\cdot x}=c\sum_k\varphi\left(x+\frac{2\pi k}{s}\right). \tag{11}$$

(11)两端在 $|x_j|\leqslant\pi/s$ $(1\leqslant j\leqslant n)$ 上积分得出

$$c=(\sqrt{2\pi}/s)^n. \qquad \square$$

任给$\varphi\in\mathscr{S}$，从(11)得出**Poisson求和公式**：

$$\sum_k\phi(sk)=(\sqrt{2\pi}/s)^n\sum_k\varphi(2\pi k/s). \tag{12}$$

9.5.7 定理 设 $f\in\mathscr{D}'$是周期的，即 $\tau_{2\pi k}f=f(\forall k\in\mathrm{Z}^n)$，则

$$f=\sum c_k e_k,\quad \hat{f}=\sum c_k\delta_k. \tag{13}$$

证 取$h\in\mathscr{D}$，$[-\pi,\pi]^n\prec h$，令$\psi=h/\sum_k\tau_{2\pi k}h$，则对任给$\varphi\in\mathscr{D}$，有

$$\begin{aligned}\langle f,\varphi\rangle&=\langle f,\varphi\sum_k\tau_{2\pi k}\psi\rangle=\langle f,\psi\sum_k\tau_{2\pi k}\phi\rangle\\&=\langle f(x),\psi(x)\sum_k(e_{-x}\varphi)^\wedge(2\pi k)\rangle\\&=(2\pi)^{-n/2}\langle f,\psi\sum_k e_{-k}\varphi(k)\rangle=\langle\sum_k c_k\delta_k,\varphi\rangle,\end{aligned}$$

其中$c_k=(2\pi)^{-n/2}\langle f,\psi e_{-k}\rangle$。由此得出(13)。 $\square$

在§8中我们将从另一途径考察周期分布。

参考文献：[22]，[30]，[41]，[46]，[60]，[64]，[78]。

习 题

1. 若$f\in L^1_{loc}(\mathrm{R}^n)$是缓增的 (8.6.7)，则在$\mathscr{S}'$中

$$\hat{f}(\xi)=\lim_{k\to\infty}\int_{|x|<k}f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx.$$

2. 设$f\in\mathscr{S}'$，则$\mathrm{supp}f=\{0\}\Longleftrightarrow f=\hat{P}$，$P$是多项式。

3. 设$f\in L^1(\mathrm{T}^n)$，$\hat{f}$依8.4.1，则在$\mathscr{D}'$中$f=\sum\hat{f}(k)e_k$.

4. 设$f\in\mathscr{S}'(\mathrm{R}^n)$，$a\in\mathrm{O}(n)$，则$(f\circ a)^\wedge=\hat{f}\circ a$.

§6 偏微分方程的基本解

对于一个$r(>0)$阶常系数线性微分算子

$$P(D)=\sum_{|\alpha|\leqslant r}a_\alpha D^\alpha \tag{1}$$

(或方程 $P(D)u=f, f\in\mathscr{D}'$)，其基本解的意义说明如下：若 $P(D)E=\delta$，$Q=E*:\mathscr{E}'\to\mathscr{D}'$，$u\longmapsto E*u$，则从 $P(D)(E*u)=E*P(D)u=u(\forall u\in\mathscr{E}')$ 推出Q是$P(D)$的"逆"，因而$u=Qf$表出方程$P(D)u=f\in\mathscr{E}'$的解．将解方程$P(D)u=f$归结为求$P(D)$在某种意义下的逆，这正是现代微分算子理论的基本思想．

Ehrenpreis(1954)与Malgrange (1955) 证明了以下基本结果：

9.6.1 定理 微分算子(1)恒存在基本解．

证 首先建立一个辅助不等式：

$$|f(z)|\leqslant C\rho^{-r}\int_{\mathrm{T}^n}|(fP)(z+\rho\zeta)|\,d\lambda(\zeta), z\in\mathrm{C}^n, \tag{2}$$

其中$f\in H(\mathrm{C}^n)$ (4.2.1)，$\rho>0$，C与f，ρ，z无关，λ是T^n上的正规化Haar测度．令$P=\sum P_j$，$P_j(1\leqslant j\leqslant r)$是$j$次齐次多项式．因$P(z+\rho\tau\zeta)$是$\tau(\in\mathrm{C})$的$r$次多项式，其首项系数为$\rho^rP_r(\zeta)$，故$P(z+\rho\tau\zeta)=\rho^rP_r(\zeta)(\tau-\tau_1)\cdots(\tau-\tau_r)$．令

$$Q(\tau)=\rho^rP_r(\zeta)(1-\bar{\tau}_1\tau)\cdots(1-\bar{\tau}_r\tau),$$

则当$|\tau|=1$时$|P(z+\rho\tau\zeta)|=|Q(\tau)|$．由Cauchy公式，

$$|f(z)\rho^rP_r(\zeta)|=|f(z+\rho\tau\zeta)Q(\tau)|_{\tau=0}$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|(fP)(z+\rho e^{i\theta}\zeta)|\,d\theta.$$

将以上不等式两端对 ζ 在 T^n 上积分，并令 $C^{-1}=\int|P_r|d\lambda$，即得(2).

现在令 $Y=P(D)\mathscr{D}(\mathrm{R}^n)$，定义

$$u: Y\to \mathrm{C},\ P(D)\varphi\longmapsto\varphi(0)\quad(\varphi\in\mathscr{D}). \tag{3}$$

因 $\forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathrm{R}^n)$: $P(D)\varphi=0\Rightarrow P(\xi)\hat{\varphi}(\xi)=0\Rightarrow\hat{\varphi}=0\Rightarrow\varphi=0$(注意 $\hat{\varphi}$ 是整函数!)，故(3)定义的 u 是单值的. 若能证明 u 可延拓为一个分布，则直接从(3)看出 $\check{u}$ 是(1)的基本解. 取定 $\rho>0$，定义

$$\|\varphi\|=\int_{\mathrm{R}^n}dt\int_{\mathrm{T}^n}|\varphi(t+\rho\zeta)|d\lambda(\zeta), \tag{4}$$

则(4)给出 $\mathscr{D}(\mathrm{R}^n)$ 上一范数. 任给 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathrm{R}^n)$，依(2)有

$$|u(P(D)\varphi)|=|\varphi(0)|\leqslant\int|\hat{\varphi}(t)|dt$$

$$\leqslant C\rho^{-r}\int dt\int|(P\hat{\varphi})(t+\rho\zeta)|d\lambda(\zeta)=C\rho^{-r}\|P(D)\varphi\|,$$

可见 u 可延拓为 $\mathscr{D}(\mathrm{R}^n)$ 上依范数(4)连续的线性泛函. 余下只要证明：$\mathscr{D}$ 中的 LF 拓扑强于范数(4)决定的拓扑. 设 $\{\varphi_k\}\subset\mathscr{D}(K)$，$K\subset\mathrm{R}^n$ 为紧集，$\|\varphi_k\|_{2m}\to 0$ $(k\to\infty, 4m>n)$. 令 $h(x)=(1+|x|^2)^m$，$e_a(x)=e^{ia\cdot x}$. 则关于 $\zeta\in\mathrm{T}^n$ 一致地有：

$$\|h(D)(e_{-\rho\zeta}\varphi_k)\|_{L^2}\to 0\quad(k\to\infty).$$

因 $$\|h(D)(e_{-\rho\zeta}\varphi_k)\|_{L^2}^2=\|[h(D)(e_{-\rho\zeta}\varphi_k)]^\wedge\|_{L^2}^2$$

$$=\int|h(t)\hat{\varphi}_k(t+\rho\zeta)|^2dt,$$

故 $$\|\varphi_k\|\leqslant\|1/h\|_{L^2}\left[\int\|h(D)(e_{-\rho\zeta}\varphi_k)\|_{L^2}^2d\lambda(\zeta)\right]^{1/2}\to 0$$

$$(k\to\infty).\qquad\square$$

下面求几个具体算子的基本解. 首先考虑

$$P=\frac{d}{dt}+a,\ a\in M_n(\mathrm{C}). \tag{5}$$

设$u\in\mathscr{D}'(\mathrm{R},n)$，$Pu=\delta(t)e_n$，$e_n=(0,\cdots,0,1)\in\mathrm{R}^n$．令 $v=e^{at}u$，则$v'=e^{at}(au+u')=e^{at}\delta(t)e_n=\delta(t)e_n$（注意 $\mathrm{supp}\delta=\{0\}$!）．于是结合9.2.1得到：

9.6.2 定理 设P如(5)，则方程 $Pu=\delta(t)e_n$ 有通解：$u=e^{-at}[H(t)e_n+c]$，其中$H(t)$是Heaviside函数，$c\in\mathrm{C}^n$．特别，当$n=1$时$u=e^{-at}[H(t)+c]$，$c\in\mathrm{C}$．

9.6.2可用来求某些偏微分算子的基本解．首先考虑"Cauchy-Riemann算子"

$$2\frac{\partial}{\partial\bar{z}}=\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y},\quad z=x+iy. \tag{6}$$

设$E(x,y)$是（6）的对y缓增的基本解．在等式 $2\frac{\partial}{\partial\bar{z}}E(x,y)=\delta(x)\otimes\delta(y)$两边关于$y$作Fourier变换得：

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{E}(x,\eta)-\eta\hat{E}(x,\eta)=\delta(x). \tag{7}$$

将9.6.2用到(7)得$\hat{E}(x,\eta)=e^{\eta x}[H(x)+c(\eta)]$．利用$\hat{E}(x,\eta)$对$\eta$的缓增性定出$c(\eta)$后得到

$$\hat{E}(x,\eta)=\begin{cases}-H(-x)e^{\eta x}, & \eta>0,\\ H(x)e^{\eta x}, & \eta<0.\end{cases}$$

然后用反演公式(§8.5(2))得出：

9.6.3 定理 $z^{-1}=(x+iy)^{-1}$是Cauchy-Riemann算子(6)的对y为缓增的基本解．

类似的方法可用于导热方程．设$E(t,x)$是

$$P=\frac{\partial}{\partial t}-\Delta,\quad \Delta=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 \tag{8}$$

的对x缓增的基本解．关于x作Fourier变换后得$\frac{\partial}{\partial t}\hat{E}(t,\xi)+|\xi|^2\hat{E}(t,\xi)=\delta(t)$，于是$\hat{E}(t,\xi)=[H(t)+c(\xi)]\exp(-t|\xi|^2)$．

由 $\hat{E}(t,\xi)$ 对 ξ 缓增推出 $c(\xi)=0$，于是用反演公式得到：

9.6.4 定理 (8)有对 x 缓增的基本解：

$$E(t,x)=(2t)^{-n/2}H(t)\exp(-|x|^2/4t). \qquad (9)$$

任给 $g\in L^1(\mathrm{R}^n)$，令 $u(t,x)=(g*E_t)(x)$，$E_t(x)=E(t,x)$，则当 $t>0$ 时，$Pu=g*PE_t=0$；$\lim\limits_{t\to+0}E(t,x)=\delta(x)$ 推出 $\lim\limits_{t\to+0}u(t,x)=g(x)$．注意 $u(t,x)=(g*E_t)(x)(t>0)$ 正好与§8.3(15)相合．

类似地，$P=\partial_t^2-\partial_x^2$ 的对 x 缓增的基本解 $E(t,x)$ 满足 $\partial_t^2\hat{E}(t,\xi)+\xi^2\hat{E}(t,\xi)=\delta(t)$．将这个关于 t 的二阶方程化为一阶方程组，然后利用 9.6.2 解出 $\hat{E}(t,\xi)=H(t)\xi^{-1}\sin\xi t$．直接验算知 $E(t,x)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,[H(x+t)-H(x-t)]\,(t>0)$．于是 $\lim\limits_{t\to0}E(t,x)=0$，$\lim\limits_{t\to0}\partial_tE(t,x)=\sqrt{2\pi}\,\delta(x)$．任给 $f\in\mathscr{D}'(\mathrm{R})$，令 $u(t,x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}(f*E_t)(x)$，$E_t(x)=E(t,x)$，则 $u(0,x)=0$，$u_t'(0,x)=f(x)$，$t>0$ 时 $Pu=0$．注意，当 $f\in L^1_{loc}(\mathrm{R})$ 时得到 d'Alembert 公式：

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}f(u)du.$$

以上方法可推广到奇数维波动方程 $u_{tt}=\Delta_xu$．

Laplace算子Δ 的基本解的求法稍有不同．设 $0<m<n/2$，$E(x)(x\in\mathrm{R}^n)$ 是 Δ^m 的缓增基本解，则从 $(\Delta^mE)^\wedge=(-|\xi|^2)^m\hat{E}(\xi)=1$ 推出 $\hat{E}(\xi)=(-1)^m|\xi|^{-2m}\in L^1_{loc}$．从 $\hat{E}(t\xi)=t^{-2m}\hat{E}(\xi)$ 推出 $E(tx)=t^{2m-n}E(x)(0\neq t\in\mathrm{R})$；类似的方法得出 $E(ax)=E(x)\ (a\in\mathrm{O}(n))$．因此可设 $E=cr^{2m-n}$，$r=|x|$．为定出 c，令 $\varphi=\exp(-r^2/2)$，则 $\hat{\varphi}=\varphi$(§8.5 习题 3)，从 $\langle\hat{E},\varphi\rangle=\langle E,\hat{\varphi}\rangle$ 推出

$$(-1)^m\int r^{-2m}\exp(-r^2/2)dx=c\int r^{2m-n}\exp(-r^2/2)dx.$$

以$dx=ar^{n-1}dr$（a不含r）代入后定出c，即得到：

9.6.5 定理 若$0<m<n/2$，则Δ^m有缓增基本解

$$E=(-1)^m(\sqrt{2})^{n-4m}\Gamma\left(\frac{n}{2}-m\right)r^{2m-n}/(m-1)!,$$

$$r=|x|. \qquad (10)$$

特别，当$n=3$时，Δ有基本解$E=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}r^{-1}$.

当$m\geqslant n/2$时Δ^m之基本解的求法参考[30].

9.6.3与9.6.5中基本解E都是原点以外区域中的C^∞函数，从而除原点外在通常意义下有$\partial E/\partial\bar{z}=0$，或$\Delta^m E=0$. 这并非偶然：今后将看到，$\partial/\partial\bar{z}$与$\Delta^m$都是椭圆算子，而任何椭圆算子$P$的基本解$E$必有$\operatorname{singsupp}E=\{0\}$（见10.7.3）.

对于适当的f，方程$Pu=f$满足一定边界条件的解往往可通过基本解表示出来.

9.6.6 定理 设$\Omega\subset\mathbf{R}^3$是有光滑边界$\partial\Omega$的有界区域，$\Delta u=f$，$u,f$是$\bar{\Omega}$上的$C^2$函数，则

$$u(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS-\int_{\Omega}\frac{f}{4\pi r}dv, \quad (11)$$

其中$x\in\Omega$，$r(y)=|y-x|$，n记$\partial\Omega$的外向单位法向量.

证 固定$x\in\Omega$，取充分小的$\varepsilon>0$，令$S_\varepsilon=\{y|\ |y-x|=\varepsilon\}$，以$\Omega_\varepsilon$记$\partial\Omega$与$S_\varepsilon$围成的区域. 由Gauss公式有

$$\left(\int_{\partial\Omega}-\int_{S_\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right)dS$$

$$=\left(\int_{\partial\Omega}-\int_{S_\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{r}\operatorname{grad}u-u\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)\cdot n\,dS$$

$$=\int_{\Omega_\varepsilon}\operatorname{div}\left(\frac{1}{r}\operatorname{grad}u-u\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)dv=\int_{\Omega_\varepsilon}\frac{f}{r}dv,$$

于是 $$\int_{\partial\Omega}\left[\frac{1}{r}\ \frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\int_{S_\varepsilon}\operatorname{grad}u\cdot\boldsymbol{n}dS-\int_{S_\varepsilon}u\operatorname{grad}\frac{1}{r}\cdot\boldsymbol{n}dS+\int_{\Omega_\varepsilon}\frac{f}{r}dv$$

$$=I_1+I_2+I_3.$$

不难分别求出$\lim\limits_{\varepsilon\to0}I_1=0$，$\lim\limits_{\varepsilon\to0}I_2=4\pi u(x)$，$\lim\limits_{\varepsilon\to0}I_3=\int_\Omega(f/r)dv$，由此得出(11)。 □

9.6.7 定理(非齐次的 Cauchy 公式) 设 $\Omega\subset\mathbf{C}$ 是由光滑曲线$\partial\Omega$围成的有界区域，$\partial u/\partial\bar{z}=f$，$u,f$在$\bar{\Omega}$上为$C^1$函数，则对任给$z\in\Omega$有

$$u(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{u(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}dxdy,\ \zeta=x+iy. \tag{12}$$

证 证法与9.6.6类似：取充分小的$\varepsilon>0$，令$\Gamma_\varepsilon=\{\zeta|\ |\zeta-z|=\varepsilon\}$，$\Omega_\varepsilon$记$\partial\Omega$与$\Gamma_\varepsilon$所围之区域，则

$$\left(\int_{\partial\Omega}-\int_{\Gamma_\varepsilon}\right)\frac{u(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=2i\iint\limits_{\Omega_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\left[\frac{u(\zeta)}{\zeta-z}\right]dxdy$$

$$=2i\iint\limits_{\Omega_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}dxdy,$$

于是 $$\int_{\partial\Omega}\frac{u(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{u(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+2i\iint\limits_{\Omega_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}dxdy.$$

令$\varepsilon\to0$，即得(12)。 □

注 9.6.6的证明利用了$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)|\Omega_\varepsilon=0$；9.6.7则用了

$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\xi-z}\right)|\Omega_\varepsilon=0$，这正是利用了基本解的性质．

参考文献：[24]，[30]，[41]，[60]，[64]．

习　题

1．$\ln|x|$是 $\Delta=(\partial/\partial x_1)^2+(\partial/\partial x_2)^2$的基本解，利用$\Delta=4\partial^2/\partial z\partial\bar{z}$推出$z^{-1}$是$2\partial/\partial\bar{z}$的基本解．

2．$E(t,x)=H(t)(2t)^{-n/2}\exp(-i(n-2)\pi/4)\exp(i|x|^2/4t)$是 Schrödinger 方程 $u'_t=i\Delta u$的基本解．

§7　Sobolev 空　间

$\mathscr{D}'$有一族子空间$H^{p,s}$，即所谓Sobolev空间，其中可导入自然的Banach空间（$p=2$时是 Hilbert 空间）结构，因而可运用经典的Banach空间技术进行研究．

任给$p\in[1,\infty]$，$s\in\mathbb{Z}$，令

$$H^{p,s}(\Omega)=\begin{cases}\{f\in\mathscr{D}'(\Omega)|\ |\alpha|\leqslant s\Rightarrow\partial^\alpha f\in L^p\},s\geqslant 0;\\ \{f\in\mathscr{D}'(\Omega)\ |f=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant -s}\partial^\alpha f_\alpha,f_\alpha\in L^p\},s<0.\end{cases}\tag{1}$$

不致误解时将$H^{p,s}(\Omega)$简写作$H^{p,s}$．若$r>s>0$，显然有：

$$H^{p,r}\subset H^{p,s}\subset H^{p,0}=L^p\subset H^{p,-s}\subset H^{p,-r}\subset\mathscr{D}'_F.$$

若$s\geqslant 0$，k是满足$|\alpha|\leqslant s$的$\alpha\in\mathbb{N}^n$之个数，则单射

$$H^{p,s}\to(L^p)^k,\ f\longmapsto(\partial^\alpha f)_{|\alpha|\leqslant s}$$

在$H^{p,s}$中诱导出一赋范空间结构，其中采用范数：

$$\|f\|_{p,s}=\left(\sum_{|\alpha|\leqslant s}\|\partial^\alpha f\|^p_{L^p}\right)^{1/p},\ f\in H^{p,s}.\tag{2}$$

任给序列$\{f_k\}\subset H^{p,s}$，若在L^p中$\partial^\alpha f_k\to f^\alpha(|\alpha|\leqslant s)$，则在$\mathscr{D}'$中$f_k\to f^0$，$\partial^\alpha f_k\to\partial^\alpha f^0=f^\alpha(|\alpha|\leqslant s)$，于是在$H^{p,s}$中$f_k\to f^0$．可见$H^{p,s}$是Banach空间，而$H^{2,s}$是Hilbert空间．

9.7.1 定理 设$p\in[1,\infty)$，$p^{-1}+q^{-1}=1$，$s\geqslant 0$，$H_0^{p,s}$记$\mathscr{D}$在$H^{p,s}$中的闭包．则有自然的线性同构$H^{q,-s}\cong(H_0^{p,s})'$，因此可认定$H^{q,-s}=(H_0^{p,s})'$，$H^{q,-s}$中采用所述同构诱导的度量．

证 可设$s\geqslant 1$．任给$f=\sum_{|\alpha|\leqslant s}\partial^\alpha f_\alpha$，$f_\alpha\in L^q$，$\varphi\in\mathscr{D}$，从

$$
\begin{aligned}
|f(\varphi)|&\leqslant\sum_\alpha|\langle f_\alpha,\partial^\alpha\varphi\rangle|\leqslant\sum_\alpha\|f_\alpha\partial^\alpha\varphi\|_{L^1}\\
&\leqslant\sum_\alpha\|f_\alpha\|_{L^q}\ \|\partial^\alpha\varphi\|_{L^p}\leqslant\Big(\sum_\alpha\|f_\alpha\|_{L^q}\Big)^{1/q}\|\varphi\|_{p,s}
\end{aligned}
$$

推出f可连续地延拓到$H_0^{p,s}$上．反之，任给$f\in(H_0^{p,s})'$，依1.7.1与3.5.4，存在$f_\alpha\in L^q(|\alpha|\leqslant s)$，对任给$\varphi\in\mathscr{D}$有：

$$
f(\varphi)=\sum_{|\alpha|\leqslant s}\int(-1)^{|\alpha|}f_\alpha\partial^\alpha\varphi dx,
$$

于是$f|\mathscr{D}=\sum\partial^\alpha f_\alpha\in H^{q,-s}$． □

9.7.2 定理 设$p\in[1,\infty)$，$s\in\mathbf{N}$．则每个$f\in H^{p,s}$[$f\in H^{p,s}\cap\mathscr{E}'$]可用$C^\infty$[$C_c^\infty$]函数依范数(2)逼近：$H_0^{p,s}(\mathbf{R}^n)=H^{p,s}(\mathbf{R}^n)$．

证 设$f\in H^{p,s}\cap\mathscr{E}'$，$\theta_t$如8.3.6（$t$代替那里的$s$），则当$t$充分小时$f_t=f*\theta_t\in\mathscr{D}$．依8.3.2，$\|\partial^\alpha f_t-\partial^\alpha f\|_{L^p}\to 0$

$(t\to 0,\ |\alpha|\leqslant s)$，于是$\|f_t-f\|_{p,s}\to 0$．若仅设$f\in H^{p,s}(\Omega)$，则可设$f=\sum f_i$，$f_i\in H^{p,s}\cap\mathscr{E}'(U_i)$，$\{U_i\}$是$\Omega$的局部有限开覆盖．任给$\varepsilon>0$，取$g_i\in\mathscr{D}(U_i)$：$\|f_i-g_i\|_{p,s}<\varepsilon 2^{-i-1}$，则$g=\sum g_i\in C^\infty$，$\|f-g\|_{p,s}<\varepsilon$．

其次证每个$f\in H^{p,s}(\mathbf{R}^n)$可用$H^{p,s}\cap\mathscr{E}'$中的元逼近（从而$H_0^{p,s}(\mathbf{R}^n)=H^{p,s}(\mathbf{R}^n)$）．设$\theta\in\mathscr{D}$：$B^n(0,1)\prec\theta\prec B^n(0,2)$；$\theta_k(x)=\theta(x/k)$，则

$$
\begin{aligned}
&\|\partial^\alpha(\theta_k f)-\partial^\alpha f\|_{L^p}\leqslant\|\partial^\alpha(\theta_k f)-\theta_k\partial^\alpha f\|_{L^p}+\|(1\\
&\quad-\theta_k)\partial^\alpha f\|_{L^p}\leqslant\text{const}\sum_{\beta\leqslant\alpha\neq\beta}\Big(\int_{|x|>k}|\partial^{\alpha-\beta}\theta_k\partial^\beta f|^p dx\Big)^{1/p}
\end{aligned}
$$

$$+\left(\int_{|x|>k}|\partial^{\alpha}f|^{p}dx\right)^{1/p},$$

可见$\|\theta_k f-f\|_{p,s}\to 0$ $(k\to\infty)$，而$\theta_k f\in H^{p,s}\cap\mathscr{E}'$. □

推论 $(H^{p,s}(\mathrm{R}^n))'=H^{q,-s}(\mathrm{R}^n)$ $(1\leqslant p<\infty,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ s\in\mathrm{N})$.

下面着重讨论"单参数"空间族$H^s(s\in\mathrm{R})$.

9.7.3 定义 设$d\mu_s=(1+|x|^2)^s dx(s\in\mathrm{R})$. 令

$$H^s=H^s(\mathrm{R}^n)=\{u\in\mathscr{S}'(\mathrm{R}^n)|\,\hat{u}\in L^2(\mu_s)\},\qquad(3)$$

赋予H^s以由同构$H^s\to L^2(\mu_s)$，$u\longmapsto\hat{u}$（这由$L^2(\mu_s)\subset\mathscr{S}'$看出）诱导的Hilbert空间结构，称$H^s$为Sobolev空间. 约定$H^\infty=\bigcap_{s\in\mathrm{R}}H^s$，$H^{-\infty}=\bigcup_{s\in\mathrm{R}}H^s$；任给$u\in H^{s+a}$，$v\in H^{s-a}$，令

$$(u,v)_s=\int\hat{u}\bar{\hat{v}}d\mu_s.\qquad(4)$$

当$u,v\in H^s$时，(4)就是H^s中的内积，记$\|u\|_s=\sqrt{(u,u)_s}$. 若$0<s\in\mathrm{Z}$，$u\in\mathscr{S}'$，则$u\in H^{2,s}\Longleftrightarrow\partial^{\alpha}u\in L^2(|\alpha|\leqslant s)\Longleftrightarrow(\partial^{\alpha}u)^{\wedge}\in L^2(|\alpha|\leqslant s)\Longleftrightarrow\hat{u}\in L^2(\mu_s)$，因此有$H^{2,s}(\mathrm{R}^n)=H^s(\mathrm{R}^n)$. 实际上，任给$s\in\mathrm{Z}$，可证明$H^{2,s}(\mathrm{R}^n)=H^s(\mathrm{R}^n)$且二者有相同的拓扑.

考虑某些线性算子对H^s的作用是一重要课题. 任给$\varphi\in\mathscr{O}_M$，记$\Lambda_\varphi: H^{-\infty}\to\mathscr{S}'$，$u\longmapsto u*\check{\varphi}$；当$a\in\mathrm{R}$，$\varphi=(1+|x|^2)^{a/2}$时令$\Lambda_\varphi=\Lambda_a$. 显然$\Lambda_a\Lambda_b=\Lambda_{a+b}(a,\ b\in\mathrm{R})$，

$$(\Lambda_a u)(x)=\int(1+|\xi|^2)^{a/2}\hat{u}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi,\quad u\in\mathscr{D}.\qquad(5)$$

若$a\in\mathrm{N}$，则(5)推出$\Lambda_{2a}=(1-\Delta)^a$，$\Delta=\sum(\partial/\partial x_j)^2$.

9.7.4 定理 1° 设$\varphi\in\mathscr{O}_M$，$0<A\leqslant|\varphi(x)|\cdot|x|^{-a}\leqslant B<\infty(x\in\mathrm{R}^n)$. 则$\Lambda_\varphi\in L(H^s,H^{s-a})$；当$\inf|\varphi(x)|>0$时$1/\varphi\in\mathscr{O}_M$，$\Lambda_{1/\varphi}=\Lambda_\varphi^{-1}\in L(H^{s-a},H^s)$.

2° $\Lambda_a: H^s \to H^{s-a}$是一等距同构；特别，$\Lambda_{2s}: H^s \to H^{-s}$为等距同构，因此对任给$u \in H^s$有

$$\|u\|_s = \sup_{0 \neq v \in H^{-s}} \frac{|(u,v)_0|}{\|v\|_{-s}}. \tag{6}$$

3° $\partial^a \in L(H^s, H^{s-|a|})$，且$\|\partial^a u\|_{s-a} \leqslant \|u\|_s$ $(u \in H^s)$.

4° 若$\varphi \in \mathscr{S}$，则$H^s \to H^s$，$u \longmapsto \varphi u$连续．与3°合起来得到：若$P = \sum_{|a| \leqslant r} a_a D^a$，$a_a \in \mathscr{S}$，则$P \in L(H^s, H^{s-r})$.

5° (Peter-Paul不等式)．若$r < s < t$，$r, s, t \in \mathrm{R}$，则对任给$e > 0$，存在$C > 0$，使得对任给$u \in H^t$有：

$$\|u\|_s \leqslant e\|u\|_t + C\|u\|_r. \tag{7}$$

证 1° 任给$u \in H^s$，从$(u * \phi)^\wedge = \hat{u}\check{\varphi}$及对$\varphi$的假定推出$\|\Lambda_\varphi u\|_{s-a}^2 \leqslant \text{const}\|u\|_s^2$．若$\inf|\varphi(x)| > 0$，$u \in H^{-\infty}$，则

$$(\Lambda_\varphi \Lambda_{1/\varphi} u)^\wedge = \left(\left(u * \left(\frac{1}{\varphi}\right)^\wedge\right) * \phi\right)^\wedge = \hat{u},$$

故得$\Lambda_\varphi \Lambda_{1/\varphi} u = u$；同理$\Lambda_{1/\varphi}\Lambda_\varphi u = u$，因此$\Lambda_{1/\varphi} = \Lambda_\varphi^{-1}$.

2° 由显然的等式$|(\Lambda_a u)^\wedge|^2 d\mu_{s-a} = |\hat{u}|^2 d\mu_s$ $(u \in H^s)$推出．

3° 由初等不等式$|x^a| \leqslant |x|^{|a|}$ $(x \in \mathrm{R}^n, a \in \mathrm{N}^n)$直接得出．

4° 取充分大的$k > 0$，利用$\phi \in \mathscr{S}$作以下估计：

$$
\begin{aligned}
&|(\varphi u)^\wedge(\xi)|^2 = \left|\int \phi(\xi - \eta)\hat{u}(\eta)d\eta\right|^2 \\
&\leqslant \text{const}\left[\int (1 + |\xi - \eta|^2)^{-k} |\hat{u}(\eta)| d\eta\right]^2 \\
&\leqslant \text{const}\int (1 + |\xi - \eta|^2)^{-k} d\eta \int (1 + |\xi - \eta|^2)^{-k} |\hat{u}(\eta)|^2 d\eta \\
&\leqslant \text{const}\int (1 + |\xi - \eta|^2)^{-k}(1 + |\eta|^2)^{-s}|\hat{u}(\eta)|^2 d\mu_s(\eta) \\
&\leqslant \text{const}\int (1 + |\xi - \eta|^2)^{-k+|s|}(1 + |\xi|^2)^{-s}|\hat{u}(\eta)|^2 d\mu_s(\eta),
\end{aligned} \tag{8}
$$

其中用到所谓Peetre不等式（读者不难自行验证）：

$$(1+|\xi|^2)^s(1+|\eta|^2)^{-s}\leqslant 2^{|s|}(1+|\xi-\eta|^2)^{|s|},\xi,\eta\in\mathrm{R}^n. \quad (9)$$

由(8)并用Fubini定理得出$\|\varphi u\|_s\leqslant\text{const}\|u\|_s\ (u\in H^s)$.

5° 令$C=\varepsilon^{(r-s)/(t-s)}$，则(7)从以下不等式推出：

$$(1+|\xi|^2)^s\leqslant\varepsilon^2(1+|\xi|^2)^t+C^2(1+\xi|^2)^r,\ \xi\in\mathrm{R}^n.$$ □

9.7.5 嵌入定理 若$s\in\mathrm{R},r\in\mathrm{N}$，$s>\frac{n}{2}+r$，则有连续的包含映射$H^s(\mathrm{R}^n)\subset C_0^r(\mathrm{R}^n)=\{f\in C^r(\mathrm{R}^n)\,|\,|\alpha|\leqslant r\Longrightarrow\partial^\alpha f\in C_0(\mathrm{R}^n)\}$，在$C_0^r(\mathrm{R}^n)$中采用范数$\|f\|_{(r)}=\max\limits_{|\alpha|\leqslant r}\|\partial^\alpha f\|_u$.

证 任给$u\in H^s$，$|\alpha|\leqslant r$，有

$$\|\partial^\alpha u\|_u=\|(\partial^\alpha u)^{\wedge\wedge}\|_u\leqslant\|(\partial^\alpha u)^\wedge\|_{L^1}$$

$$=\|\xi^\alpha\hat{u}(\xi)\|_{L^1}\leqslant\text{const}\|u\|_s\left(\int(1+|\xi|^2)^{r-s}d\xi\right)^{1/2},$$

由此可归纳地说明$u\in C^r$且$\|u\|_{(r)}\leqslant\text{const}\|u\|_s$. □

由此可见，空间族H^s构成一个从“坏函数”过渡到“好函数”的阶梯，参数s正好指出正则性的等级．为将以上结果用到局部问题，引进空间

$$H^s_{\text{loc}}(\Omega)=\{u\in\mathscr{D}'(\Omega)|\forall\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)：\varphi u\in H^s\}. \quad (10)$$

显然$u\in H^s_{\text{loc}}(\Omega)\Longleftrightarrow u\in\mathscr{D}'(\Omega)$且$\forall x\in\Omega$，$\exists v\in H^s$：$u$与$v$在$x$的某邻域内相等．任给$u\in H^s_{\text{loc}}(\Omega),\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$，令$\|u\|_\varphi=\|\varphi u\|_s$，则可验证半范族$\{\|u\|_\varphi\}$定义$H^s_{\text{loc}}(\Omega)$为一个$F$-空间．其次令$H^s_c(\Omega)=\varinjlim H^s(K_i)$，$H^s(K_i)=\{u\in H^s|\text{supp}u\subset K_i\}$，$\{K_i\}$是$\Omega$中紧集的穷竭序列，则$H^s_c(\Omega)$是一$LF$空间．空间族$H^s_{\text{loc}}[H^s_c]$可用作连接空间$\mathscr{D}'_F$与$\mathscr{E}$[$\mathscr{E}'$与$\mathscr{D}$]的阶梯．

9.7.6 定理 1° $\mathscr{E}(\Omega)=\bigcap\limits_{s\in\mathrm{R}}H^s_{\text{loc}}(\Omega)$；

$$\mathscr{D}(\Omega)=\bigcap_{s\in\mathrm{R}}H^s_c(\Omega).$$

2° $\mathscr{D}'_F(\Omega)=\bigcup_{s\in R} H^s_{loc}(\Omega)$; $\mathscr{E}'(\Omega)=\bigcup_{s\in R} H^s_c(\Omega)$.

3° 空间$H^s_{loc}(\Omega)$与$H^{-s}_c(\Omega)$互为对偶.

证 1°直接由9.7.5推．出对于2°显然只要证前一式．若$u\in\mathscr{D}'_F$，则$u=\sum_{|\alpha|\leqslant s}\partial^\alpha u_\alpha$，$s\in N$，$u_\alpha\in L^2_{loc}=H^0_{loc}$(9.3.2)，因此$u\in H^{-s}_{loc}$(9.7.4之3°)．反之若$u\in H^s_{loc}$，不妨设$0>s\in Z$，则从(1)看出$u$局部地属于$\mathscr{D}'_{-s}$，因而$u\in\mathscr{D}'_F$(9.1.5).

3° 给定$u\in H^{-s}_c(\Omega)$，取$\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$，使$\varphi$在supp$u$的某邻域内为1；定义$\langle T_u,v\rangle=(\varphi v,u)_0(v\in H^s_{loc}(\Omega))$.则$T_u$与$\varphi$无关，且从$|(\varphi v,u)_0|\leqslant\|\varphi v\|_s\|u\|_{-s}$推出$T_u\in(H^s_{loc}(\Omega))'$．其次任给$f\in(H^s_{loc}(\Omega))'$，$f|\mathscr{E}=u\in\mathscr{E}'(\Omega)$．同样设$\varphi\in\mathscr{E}(\mho)$在supp$u$的某邻域内为1，则对任给$v\in\mathscr{E}(\Omega)$有：

$$f(v)=u(\varphi v)=\langle\hat{u},(\varphi v)^{\wedge\vee}\rangle=(\varphi v,\bar{u})_0,\qquad (11)$$

其中$\bar{u}$由$\overline{\bar{u}^\wedge}=u^{\wedge\vee}$决定．因$\mathscr{E}(\Omega)$在$H^s_{loc}(\Omega)$中稠密，故(11)推出$f=T_{\bar{u}}$，$\bar{u}\in H^{-s}_c(\Omega)$．这表明$(H^s_{loc}(\Omega))'$与$H^{-s}_c(\Omega)$共轭线性同构，或干脆写作$(H^s_{loc}(\Omega))'=H^{-s}_c(\Omega)$．类似地可证$(H^{-s}_c(\Omega))'=H^s_{loc}(\Omega)$. □

9.7.7 Rellich 定理 设$s<r$，其中$s,r\in R$．则包含映射$H^r_c(\Omega)\subseteq H^s_c(\Omega)$与$H^r_{loc}(\Omega)\subset H^s_{loc}(\Omega)$是紧算子（参看1.6.6).

证 只需对任给紧集$K\subset\Omega$证$i:H^r(K)\subset H^s(K)$是紧算子．任给有界序列$\{u_k\}\subset H^r(K)$；取$\varphi\in\mathscr{D}$，使φ在K的某邻域内为1．利用(9)得以下估计：

$$|\hat{u}_k(\xi)|=|(\hat{\varphi}*\hat{u}_k)(\xi)|\leqslant\int|\hat{\varphi}(\xi-\eta)\hat{u}_k(\eta)|\,d\eta$$

$$\leqslant\text{const}\int(1+|\xi-\eta|^2)^{-r/2}(1+|\eta|^2)^{r/2}(1+|\xi|^2)^{|r|/2}\cdot$$

$$|\hat{\varphi}(\xi-\eta)\hat{u}_k(\eta)|\,d\eta\leqslant\text{const}(1+|\xi|^2)^{|r|/2}\|\varphi\|_{-r}\|u_k\|_r,$$

可见$\{\hat{u}_k\}$局部一致有界.同理$\{\partial^\alpha\hat{u}_k\}$亦是如此.故不妨设$\{\hat{u}_k\}$紧

一致收敛(2.4.4). 设$|\xi|\geqslant A>0$时$(1+|\xi|^2)^{-1}<\varepsilon$, 则

$$\|u_j-u_k\|_s^2\leqslant\int_{|\xi|<A}|\hat{u}_j(\xi)-\hat{u}_k(\xi)|^2d\mu_s+\varepsilon^{r-s}\|u_j-u_k\|_r^2,$$

由此推出$\{u_k\}$是H^s中的Cauchy列. □

本节的所有概念与结果都可以自然地推广于向量值分布的Sobolev空间, 诸如$H^{p,s}(\Omega,m)$, $H^s(\mathbf{R}^n,m)$及$H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega,m)$等记号的意义是自明的.

参考文献: [4], [30], [41], [57], [60], [64], [78].

习 题

1. 设Ω有界, u属于$\mathscr{D}(\Omega)$在$H^{2,1}(\Omega)$中的正交补, 则$u=\Delta u$, Δ是Laplace算子. 考察$u=e^{a\cdot x}$, $a\in S^{n-1}$, 说明$H^{2,1}_0(\Omega)\neq H^{2,1}(\Omega)$.

2. 若$s>\frac{n}{2}+r$, $s\in\mathbf{R}$, $r\in\mathbf{N}$, 则$H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)\hookrightarrow\mathscr{E}^r(\Omega)$.

3. $\mathscr{D}\hookrightarrow\mathscr{S}\hookrightarrow H^s\hookrightarrow\mathscr{S}'$, $s\in\mathbf{R}$.

4. $\mathscr{S}\times H^s\to H^s$, $(\varphi,u)\mapsto\varphi u$是连续双线性算子.

§8 $\mathbf{T}^n$上的广义函数

$\mathbf{R}^n$上的广义函数论自然地提示出$\mathbf{T}^n$上的广义函数论. 但$\mathbf{T}^n$是紧群这一事实造成了一个基本差别, 即基本空间$\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$、$\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$及$\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$在$\mathbf{T}^n$上的对应物是同一个$F$-空间$C^\infty(\mathbf{T}^n)$, 其拓扑决定于半范族

$$\|\varphi\|_r=\sup_{|\alpha|\leqslant r}\|\partial^\alpha\varphi\|_u,\quad\varphi\in C^\infty(\mathbf{T}^n),\quad r=0,1,\cdots.\tag{1}$$

本节中约定$\mathscr{D}=C^\infty(\mathbf{T}^n)$, $C=C(\mathbf{T}^n)$, $M=M(\mathbf{T}^n)$, Δ记三角多项式之全体. 记号$\mathscr{D}'$, $\mathscr{D}^r$, $\mathscr{D}'_r$, L^p等的意义自明; 显然$\mathscr{D}=\bigcap_{r=0}^\infty\mathscr{D}^r$, $\mathscr{D}'=\bigcup_{r=0}^\infty\mathscr{D}'_r$, $\mathscr{D}'_0=C'=M\supset L^1$; 称每个$f\in\mathscr{D}'$为$\mathbf{T}^n$上的分布或周期分布. 易见$\mathscr{D}$是Montel空间, 故$\mathscr{D}'$是序列弱完备的. 约定在$\mathscr{D}'$中总采用弱拓扑.

对周期分布的平移、微分及与C^∞函数相乘等运算如同§2中那样定义．如同9.3.1一样，可指明每个$f\in\mathscr{D}'$可表成有限和$f=\sum\partial^\alpha f_\alpha$，$f_\alpha\in L^\infty$．任给$f$，$g\in\mathscr{D}'$，卷积$f*g$决定于等式：

$$\langle f*g,\varphi\rangle=\langle f(x),g(\varphi_x)\rangle=\langle f,\check{g}*\varphi\rangle\quad(\varphi\in\mathscr{D}).\quad(2)$$

$\mathscr{D}'$关于卷积是以$\delta(=e_0$，参看§8.1(12))为单位元的交换代数，它包含卷积代数M作为子代数；$f*g$分别对f，g连续；若$(f,g)\in\mathscr{D}'\times\mathscr{D}$，则$(f*g)(x)=\langle f(y),g(x-y)\rangle\in\mathscr{D}$．以上事实的证明类似于9.4.1、9.4.2与9.4.4且更简单．

在广义函数框架内Fourier级数理论变简单了．

9.8.1 定义 令$e_a(x)=e^{ia\cdot x}$．任给$f\in\mathscr{D}'$，称

$$\hat{f}(k)=\langle f,e_{-k}\rangle=(f*e_k)(0)\quad(k\in\mathbf{Z}^n)\quad(3)$$

为f的Fourier变式（或Fourier系数），称$\sum\hat{f}(k)e_k$为f的Fourier级数(未加声明时，$\sum$记$\sum_{k\in\mathbf{Z}^n}$)．

任给f，$g\in\mathscr{D}'$，$a\in\mathbf{T}^n$，$k\in\mathbf{Z}^n$，由(3)直接推出：

$$(\tau_a f)^\wedge=e_a\hat{f},\quad(e_k f)^\wedge=\tau_{-k}\hat{f};\quad(4)$$

$$(f*g)^\wedge=\hat{f}\hat{g},\quad f*e_k=\hat{f}(k)e_k;\quad(5)$$

$$(P(D)f)^\wedge(k)=P(k)\hat{f}(k),\quad(6)$$

其中P是$\mathbf{R}^n$上的多项式．

9.8.2 定理 若$f\in\mathscr{D}'$，则$\sum\hat{f}(k)e_k$在$\mathscr{D}'$中收敛于f，且$\hat{f}$是缓增的，即$\exists r\in\mathbf{N}$：$\hat{f}(k)=O(|k|^r)(|k|\to\infty)$．任给缓增复数列$\{c_k\}_{k\in\mathbf{Z}^n}$，存在唯一$f\in\mathscr{D}'$：$\hat{f}(k)=c_k$．

证 任给$\varphi\in\mathscr{D}$：$\varphi(0)=\sum\hat{\varphi}(k)=\sum\langle e_k,\varphi\rangle$ (8.4.2)，因此$\sum e_k=\delta$，于是对$f\in\mathscr{D}'$有：$f=f*\sum e_k=\sum\hat{f}(k)e_k$．其次，从$|f(\varphi)|\leqslant\text{const}\|\varphi\|_r$($\forall\varphi\in\mathscr{D}$)推出：$|\hat{f}(k)|\leqslant\text{const}\|e_{-k}\|_r=O(|k|^r)(|k|\to\infty)$．

设$c_k=O(|k|^r)$ ($|k|\to\infty$，$r\in\mathbf{N}$)．任给$\varphi\in\mathscr{D}$：$\hat{\varphi}(k)=o(|k|^{-r-n-1})$（参考§8.4(4)）．因此$\sum|\langle c_k e_k,\varphi\rangle|<\infty$，$f=\sum c_k e_k\in\mathscr{D}'$，$\hat{f}(k)=c_k$． □

推论 设$f\in\mathscr{D}'$．若$\hat{f}(k)=0$，则$f=0$；若$\forall h\in\Delta$：$\check{h}*f=0$，则$f=0$；对任给$\varphi\in\mathscr{D}$，成立"Parseval等式"：

$$\langle f,\varphi\rangle=\sum\hat{f}(k)\hat{\varphi}(-k). \tag{7}$$

任给$F\subset\mathscr{D}'$，$u\in\mathscr{D}'$，约定$\hat{F}=\{\hat{f}|f\in F\}$；$u*F=\{u*f|f\in F\}$．任给$\varphi\in\hat{\mathscr{D}'}$，称$\check{\varphi}=\sum\varphi(k)e_k$为$\varphi$的 Fourier 变式．约定$\mathrm{A}=\hat{l^1}$，$\mathrm{P}=\hat{l^\infty}$，A，P 分别看作与$l^1$，$l^\infty$等距同构的$B$-空间，称任何$f\in\mathrm{P}$为伪测度．显然$M\subset\mathrm{P}$．

以下设$F,G\subset\mathscr{D}'$，$\mathscr{D}\subset F\cap G$，假定$F,G$是$F$-空间，其中的收敛蕴含$\mathscr{D}'$中的收敛，且对$\tau_a,u*(a\in\mathrm{T}^n$，$u\in\Delta$，$u*$记卷积算子$f\longmapsto u*f)$不变．令$(F,G)=\{u\in\mathscr{D}'|u*F\subset G\}$，称每个$u\in(F,G)$为$(F,G)$型卷积乘子或简称乘子，而称$\hat{u}(u\in(F,G))$为$(F,G)$型乘子．乘子概念在现代Fourier分析中具有基本的重要性．

9.8.3 定理 设$U:F\to G$是一线性算子，则以下条件互相等价：(i) $\exists u\in(F,G)$：$U=u*$；(ii) $U\in L(F,G)$，且U与$\tau_a,h*(a\in\mathrm{T}^n,h\in\Delta)$可换；(iii) 存在$\varphi:\mathrm{Z}^n\to\mathrm{C}$，$\forall f\in F$：$Uf=(\varphi\hat{f})^\vee$．

证 (i)⇒(ii)．设$U=u*$，$u\in(F,G)$．只需证U连续，为此用闭图象定理：若在F中$f_k\to f$，在G中$u*f_k\to g$，则在$\mathscr{D}'$中$f_k\to f$，$u*f_k\to u*f=g$．

(ii)⇒(iii)．设U满足(ii)．令$\varphi(k)=(Ue_k)^\wedge(k)$ $(k\in\mathrm{Z}^n)$，则

$$Ue_k=U(e_k*e_k)=e_k*Ue_k=\varphi(k)e_k,$$

由此推出$\forall h\in\Delta$：$(Uh)^\wedge=\varphi\hat{h}$．设$f\in F$，则$\forall h\in\Delta$：

$$\hat{h}(Uf)^\wedge=(h*Uf)^\wedge=(U(h*f))^\wedge=\hat{h}\varphi\hat{f}$$

（注意$h*f\in\Delta$！），这推出$(Uf)^\wedge=\varphi\hat{f}$，从而$Uf=(\varphi\hat{f})^\vee$．

(iii)⇒(i)．设φ如条件(iii)所述，则必$\varphi\in\hat{\mathscr{D}'}$，否则有$k_m\in\mathrm{Z}^n$ $(m=1,2,\cdots)$，$|k_m|\to\infty$，$|\varphi(k_m)|\geqslant|k_m|^{2m}$．令

$f=\sum\limits_{m}|k_m|^{-m}e_{k_m}$，则$f\in\mathscr{D}\subset F$，$|\varphi(k_m)\hat{f}(k_m)|\geqslant|k_m|^m$，这与$\varphi\hat{f}=(Uf)^\wedge\in\hat{\mathscr{D}}'$矛盾．于是$\forall f\in F$：$Uf=(\varphi\hat{f})^\wedge=u*f$，$u=\check{\varphi}\in\mathscr{D}'$．□

下面就一些具体的空间偶F,G决定(F,G)．

9.8.4 定理 (i)$(C,C)=(L^1,L^1)=(L^\infty,L^\infty)=(C,L^\infty)=(L^1,M)=M$，$(L^1,L^p)=L^p$ $(1<p\leqslant\infty)$；(ii) $(L^p,C)=L^{p'}$ $(1\leqslant p<\infty,p^{-1}+p'^{-1}=1)$；(iii) $(L^2,L^2)=(\mathrm{A},\mathrm{A})=(\mathrm{P},\mathrm{P})=(\mathrm{A},\mathrm{P})=\mathrm{P}$．

证 (i) 易见$M\subset(C,C)\subset(C,L^\infty)$，$M\subset(L^\infty,L^\infty)\subset(C,L^\infty)$，$M\subset(L^1,L^1)\subset(L^1,M)$，$L^p\subset(L^1,L^p)$，今证$(C,L^\infty)\subset M$（类似地可证$(L^1,M)\subset M$，$(L^1,L^p)\subset L^p$）．设$\mu\in(C,L^\infty)$，则$\|\mu*\varphi\|_\infty\leqslant\mathrm{const}\|\varphi\|_\infty$ $(\varphi\in C)$．取逼近单位$\{f_k\}\subset C$，可设$\|f_k\|_{L^1}=1$（参看§8.3(11)），则当$\varphi\in C$，$\|\varphi\|_\infty\leqslant1$时，

$|\langle\mu*f_k,\ \check{\varphi}\rangle|\leqslant\|\mu*f_k*\varphi\|_\infty\leqslant\|\mu*\varphi\|_\infty\|f_k\|_{L^1}\leqslant\mathrm{const}$，因此$\|\mu*f_k\|_{L^1}\leqslant\mathrm{const}$（参考8.9.1）．由1.8.8，$\mu*f_k$有子列在$M$中弱收敛于某个$\nu\in M$．但$\mu*f_k\to\mu*\delta=\mu$，故$\mu=\nu\in M$．

(ii) 设$u\in(L^p,C)$，则泛函$f\longmapsto(u*f)(0)$属于$(L^p)'$，于是有$\varphi\in L^{p'}$，$(u*f)(0)=\int f\check{\varphi}\,d\lambda=(\varphi*f)(0)$（约定$\mathrm{T}^n$中采用正规化Haar测度$\lambda$），

$$(u*f)(x)=\tau_x(u*f)(0)=(u*\tau_xf)(0)=(\varphi*f)(x),$$

由此推出$u=\varphi\in L^{p'}$．其次显然$L^{p'}\subset(L^p,C)$．

(iii) 由$l^1\subset l^2\subset l^\infty$推出$\mathrm{A}\subset L^2=\hat{l^2}\subset\mathrm{P}$，故$\mathrm{P}\subset(\mathrm{A},\mathrm{A})\subset(\mathrm{A},\mathrm{P})$，$\mathrm{P}\subset(\mathrm{P},\mathrm{P})\subset(\mathrm{A},\mathrm{P})$，$\mathrm{P}\subset(L^2,L^2)\subset(\mathrm{A},\mathrm{P})$，今证$(\mathrm{A},\mathrm{P})\subset\mathrm{P}$．设$\varphi\in(\mathrm{A},\mathrm{P})$．若$\hat{\varphi}\bar{\in}l^\infty$，则$\exists k_m\in\mathrm{Z}^n$：$|\hat{\varphi}(k_m)|\geqslant m^3$ $(m=1,2,\cdots)$．令$f=\sum\limits_{m}m^{-2}e_{k_m}$，则$f\in\mathrm{A}$，$|\hat{\varphi}(k_m)\hat{f}(k_m)|\geqslant m$，这与$\varphi*f\in\mathrm{P}$矛盾．□

以下限定$n=1$．所谓Hilbert分布$H=\sum(-i\operatorname{sgn}k)e_k$是一

个特别重要的乘子．任给$f\in\mathscr{D}'$，称$\tilde{f}=H*f$为f的共轭分布，称$\tilde{f}$的Fourier级数$\sum(-i\operatorname{sgn}k)\hat{f}(k)e_k$为$\sum\hat{f}(k)e_k$的共轭级数．设$D_m,F_m$如§8.3(2)(3)，$\varphi\in\mathscr{D}$，则

$$\tilde{D}_m=S_m(H)=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\frac{\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{\sin(x/2)},\tag{8}$$

$$\tilde{F}_m=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\tilde{D}_k=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\frac{\sin mx}{2m\sin^2(x/2)},\tag{9}$$

$$S_m(\tilde{\varphi})=\varphi*\tilde{D}_m=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[\varphi(x-y)-\varphi(x+y)]\operatorname{ctg}\frac{y}{2}dy$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\varphi(x+y)-\varphi(x-y)}{\sin(y/2)}\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)ydy.$$

此处dy是通常的Lebesgue测度．于是由8.4.3得出：

$$\tilde{\varphi}(0)=\lim_m S_m(\tilde{\varphi})(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[\varphi(-y)-\varphi(y)]\operatorname{ctg}\frac{y}{2}dy$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi'(y)\ln\left|\sin\frac{y}{2}\right|dy,$$

因此 $\quad\langle H,\varphi\rangle=\widetilde{\varphi^{\vee}}(0)=\left\langle 2\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|,\ -\varphi'(x)\right\rangle,$

故得
$$H(x)=2\left(\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|\right)'.\tag{10}$$

由(9)，当$\pi/m\leqslant x\leqslant\pi/2$时，

$$|\sigma_m(H)(x)|\geqslant\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\left(1-\frac{\pi}{2mx}\right)\geqslant\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2},$$

这推出$\|\sigma_m(H)\|_{L^1}\to\infty(m\to\infty)$，因此$H\notin M$（否则$\|\sigma_m(H)\|_{L^1}=\|H*F_m\|_{L^1}\leqslant\|H\|\|F_m\|_{L^1}=\|H\|$）．其次，对于9.8.3中的$F,G$及$u\in\mathscr{D}'$，只要有非瘦集$D\subset F$，使$u*D\subset G$，就

同样由闭图象定理得出$u\in(F,G)$. 于是从以上事实及$(L^1,M)=(C,L^\infty)=M$，$(L^2,L^2)=(A,A)=P$得到：

9.8.5 定理 $\{f\in L^1 \mid \hat{f}\in M\}$与$\{f\in C\mid \hat{f}\in L^\infty\}$分别为$L^1$与$C$中的瘦集；$H*\in L(L^2,L^2)\cap L(A,A)$.

9.8.5表明，当$p=1,\infty$时$H\,\overline{\in}\,(L^p,L^p)$. 但可以证明，当$1<p<\infty$时$H\in(L^p,L^p)$（参看[23]）.

最后指出T上的复Borel测度的特征性质.

9.8.6 定理 设$\mu\in\mathscr{D}'(\mathrm{T})$. 则$\mu\in M\Longleftrightarrow$存在囿变函数$g:\mathrm{T}\to\mathrm{C}$：$\mu=g'+\mathrm{const}$.

证 若$\mu\in M$，则有$h\in BV([0,2\pi])$（参考3.7.8），使得

$$\int\varphi d\mu=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi dh,\quad \varphi\in C(\mathrm{T}).$$

于是
$$\begin{aligned}\mu&=\hat{\mu}(0)+\sum_{k\neq0}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e_{-k}dh\right)e_k\\&=\hat{\mu}(0)+\sum_{k\neq0}[c+ik\hat{h}(k)]e_k=\hat{\mu}(0)+g',\end{aligned}$$

其中
$$\begin{aligned}g&=\sum_{k\neq0}\frac{c}{ik}e_k+\sum_k\hat{h}(k)e_k\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2c\sin kx}{k}+h(x)\quad(0<x\leqslant2\pi),\end{aligned}$$

$c=\left.\dfrac{h}{2\pi}\right|_0^{2\pi}$. g可延拓为囿变的周期函数.

反之，若$\mu=g'+\mathrm{const}$，$g\in BV$，则对任给$\varphi\in\mathscr{D}$有：

$$|\langle g,\varphi'\rangle|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi dg\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\|\varphi\|_u V_0^{2\pi}(g),$$

可见$g'\in M$，从而$\mu\in M$. □

T^n上的"向量值分布"与Sobolev空间理论可与R^n上的相应理论平行地导入. 例如，令

$$\|f\|_s=(\sum(1+|k|^2)^s|\hat{f}(k)|^2)^{1/2}, \qquad (11)$$

则$H^s(\mathrm{T}^n)=\{f\in\mathscr{D}'(\mathrm{T}^n)|\ \|f\|_s<\infty\}$ $(s\in\mathrm{R})$ 依范数(11)是一个Hilbert空间. §7中大多数结论在 $H^s(\mathrm{T}^n)$ 中有相应的推广. 关于这个课题例如可参看[83].

参考文献：[22]，[23]，[38]，[57]，[83].

习　题

1. 在$\mathscr{D}'(\mathrm{T}^n)$中$\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{(1,\cdots,1)\leqslant k\leqslant(m,\cdots,m)} m^{-n}\delta_{2\pi k/m}=1$.

2. $\forall f\in\mathscr{D}'$，$\exists r\in\mathrm{N}$，$g\in C$：$f=(1-\Delta)^r g$，Δ 是 Laplace算子.

3. 设$P(D)$是常系数线性微分算子，$f\in\mathscr{D}'$. 则方程 $P(D)u=f$ 在$\mathscr{D}'$ 中有解的充要条件是当$P(k)=0$时 $\hat{f}(k)=0$，当此条件满足时，方程在 $\mathscr{D}'$ 中的解可表为$u=\sum\limits_{P(k)=0}\varphi(k)e_k+\sum\limits_{P(k)\neq0}[\hat{f}(k)/P(k)]e_k$，$\varphi\in\hat{\mathscr{D}}'$是任意的.

4. $(M,M)=M$，$(M,C)=C$，$(L^\infty,C)=L^1$.

5. 若令$\mathscr{D}'_P=\{f\in\mathscr{D}'(\mathrm{R}^n)|\forall k\in\mathrm{Z}^n;\ \tau_{2\pi k}f=f\}$，则存在$\mathscr{D}'_P$ 与$\mathscr{D}'(\mathrm{T}^n)$之间的一一对应.

§9　流形上的流与分布

R^n及T^n上的广义函数论可纳入更一般的“流形上的流与分布理论”，后者是由de Rham开创的.

如同在§1中一样，我们首先阐明作为出发点的“基本空间”. 以下设M是给定的n维微分流形，E是M上的m维复向量丛（有关概念与记号依照第五与第六章）. 若(U,φ)是M的坐标图，(U,ψ)是E的向量丛图，则φ，ψ诱导出一线性同构：

$$L_{\varphi\psi}:\Gamma^r(U,E)\cong\mathscr{E}^r(\varphi U,m)\ (0\leqslant r\leqslant\infty). \qquad (1)$$

而$L_{\varphi\psi}$又在$\Gamma^r(U,E)$中诱导出一LCS拓扑，使(1)成为拓扑同构；装备所述拓扑的$\Gamma^r(U,E)$ 记作 $\mathscr{E}^r_{\varphi\psi}(U,E)$. 现在规定$\Gamma^r(E)$中采用有以下性质的最小LCS拓扑：对所有上述的$U$，

φ,ψ，"限制映射" $\Gamma^r(E)\to\mathscr{E}^r_{\varphi\psi}(U,E)$，$u\longmapsto u|U$ 连续（这相当于要求在 $\Gamma^r(E)$ 中 $u_k\to 0\Longleftrightarrow$ 在每个 $\mathscr{E}^r_{\varphi\psi}(U,E)$ 中 $u_k|U\to 0$）；将装备此拓扑的 $\Gamma^r(E)$ 记作 $\mathscr{E}^r(E)$。取 M 中的紧集的穷竭序列 $\{K_i\}$，令 $\mathscr{D}^r(K_i,E)=\{u\in\mathscr{E}^r(E)|\text{supp}u\subset K_i\}$，$\mathscr{D}^r(E)=\varinjlim\mathscr{D}^r(K_i,E)$，则不难看出 $\mathscr{D}^r(E)$ 中的拓扑与 $\{K_i\}$ 的选择无关；若 M 是紧流形，则 $\mathscr{D}^r(E)=\mathscr{E}^r(E)$．如通常一样，记 $\mathscr{D}(E)=\mathscr{D}^\infty(E)$，$\mathscr{D}'(E)=(\mathscr{D}(E))'$；$\mathscr{E}(E)$，$\mathscr{E}'(E)$ 仿此．

9.9.1 定理 $\mathscr{E}^r(E)$ 是 F-空间而 $\mathscr{D}^r(E)$ 是空 LF 间；$\mathscr{D}(E)\hookrightarrow\mathscr{D}^r(E)$ 且 $\mathscr{D}(E)\hookrightarrow\mathscr{E}^r(E)$；$\mathscr{E}(E)$ 与 $\mathscr{D}(E)$ 是可分 Montel 空间．

证 取定可数族 $\{U_i,\varphi_i,\psi_i\}$，使 $\{(U_i,\varphi_i)\}$ 是 M 的局部有限图册，(U_i,ψ_i) 是 E 的向量从图．若 $\{u_k\}$ 是 $\mathscr{E}^r(E)$ 中的 Cauchy 列，则 $\{u_k|U_i\}$ 是 $\mathscr{E}^r_{\varphi_i\psi_i}(U_i,E)$ 中的 Cauchy 列，从而 $\{u_k\}$ 必在 $\mathscr{E}^r(E)$ 中收敛．因此 $\mathscr{E}^r(E)$ 是 F-空间而 $\mathscr{D}^r(E)$ 是 LF 空间．其它结论可从关于 $\mathscr{E}^r(\Omega,m)$ 与 $\mathscr{D}^r(\Omega,m)$ 的相应结论推出．例如，若 $\{u_k\}\subset\mathscr{E}(E)$ 为有界序列，则在 Montel 空间 $\mathscr{E}_{\varphi_i\psi_i}(U_i,E)$ 中 $\{u_k|U_i\}$ 含收敛子列，于是由熟知的对角线程序得出 $\{u_k\}$ 在 $\mathscr{E}(E)$ 中的收敛子列． □

如同§1中一样有 $\mathscr{E}'(E)\hookrightarrow\mathscr{D}'(E)$，$\mathscr{E}'(E)$ 与 $\mathscr{D}'(E)$ 中都采用弱拓扑．自然称 $T\in\mathscr{D}'(E)$ 为 E 上的**分布截面**，并使用记号 $\langle T,u\rangle=T(u)$ $(u\in\mathscr{D}(E))$．支集概念及9.1.5的推广是平凡的．与9.3.1相应的结果是：

9.9.2 定理 $\mathscr{E}'(E)=\{T\in\mathscr{D}'(E)|\text{supp}T$ 为紧集$\}$．

证 若 $T\in\mathscr{E}'(E)$，则必有有限个 (U_i,φ_i,ψ_i)（依前面的记号）及紧集 $K_i\subset U_i$，$r\in\mathbb{N}$，使得 $|\langle T,u\rangle|\leqslant\text{const}\sum\|u|U_i\|_i$

$(u\in\mathscr{E}(E))$，$\|u|U_i\|_i$ 决定于 $u|U_i$（关于φ_i,ψ_i）的局部表示的前 r 阶导数之模在K_i上的上界．由此显然推出supp$T\subset\bigcup K_i$．反之，若$T\in\mathscr{D}'(E)$有紧支集A，取A的紧邻域B及$\varphi\in\mathscr{D}(M)$：$A\prec\varphi\prec B$，设$\{u_k\}\subset\mathscr{D}(E)$在$\mathscr{E}(E)$中收敛于0，则在$\mathscr{D}(E)$中$\varphi u_k\to 0$，从而$T(u_k)=T(\varphi u_k)\to 0$，可见$T$可扩张为$\mathscr{E}(E)$上的连续线性泛函． □

不失一般性，可设M上已由某个Riemann度量决定一正测度μ．取定$E^*\otimes E^*$的一C^∞截面g，使得每个$g_x(x\in M)$是E_x上的非异双线性型（"非异"性自然可通过局部表示来刻划）．任给$u\in\mathscr{E}(E)$，令

$$\langle T_u,v\rangle=\int_M g(u,v)d\mu,\qquad (2)$$

则易验证 $T_u\in\mathscr{D}'(E)$．将T_u等同于u，则可认为$\mathscr{E}(E)\subset\mathscr{D}'(E)$．于是当$u\in\mathscr{D}'(E)$时奇支集（参考§1(11)）singsupp u有确定意义．在具体情况下，通常总可以标准地选定所需的g（例如对于Hermite丛E，其"内积"自然地决定一个如上的g），因此今后将不加声明地认定$\mathscr{E}(E)\subset\mathscr{D}'(E)$，$\mathscr{D}(E)\subset\mathscr{E}'(E)$．

若令 $E=A_C^p(T^*M)$(§6.2(17))，则记$\mathscr{E}^r(E)$为$\mathscr{E}_p^r(M)$；$\mathscr{E}_p'^r(M)$，$\mathscr{D}_p^r(M)$，$\mathscr{D}_p'^r(M)$等记号仿此．当$p=0$或$r=\infty$时省去p或r．

9.9.3 定义 称每个$T\in\mathscr{D}_p'^r(M)$为M上的r阶p-流，称0-流为分布，称0阶分布为Radon测度．

如同§1(6)一样，有$\mathscr{E}_p'^r(M)\subsetneq\mathscr{D}_p'^r(M)\subsetneq\mathscr{D}_p'(M)$．

9.9.4 例 1° 给定$x\in M$，$v\in A^p(M_x)$，定义

$$\langle \varepsilon_v,\omega\rangle=\langle v,\omega_x\rangle,\quad \omega\in\mathscr{D}_p^0(M),\qquad (3)$$

则显然有$\varepsilon_v\in\mathscr{D}_p'^0(M)$．称$\varepsilon_v$为$v$决定的Dirac p-流．

2° 设c是M上的一p-链，$\langle c,\omega\rangle=\int_c\omega$（参看6.8.7），

则可以认为$c\in\mathscr{D}'^{0}_{p}(M)$.

3° 设M由体积元Ω定向，σ是M上一局部可积的$(n-p)$-形式(局部可积意指其分量局部可积，显然这与坐标之选择无关). 定义

$$\langle T_\sigma,\omega\rangle=\int\sigma\wedge\omega,\ \omega\in\mathscr{D}^{0}_{p}(M). \tag{4}$$

利用局部坐标可以验证T_σ连续，且$T_\sigma=0\Rightarrow\sigma$几乎处处为零，故$T_\sigma\in\mathscr{D}'^{0}_{p}(M)$，且不妨将$T_\sigma$与$\sigma$等同. 特别，$M$上每个局部可积的$n$-形式是Radon测度，而局部可积函数$f$是$n$-流. 因每个$f\in L^1_{loc}(M)$可等同于Radon测度$f\Omega$，故可以认为$L^1_{loc}(M)\subset\mathscr{D}'(M)$，这一嵌入正是(2)所表示的那种类型的嵌入，但须注意它与Ω有关.

§2中处理分布运算的基本思想亦适用于流的运算. 下面考虑几种典型的运算. 设$T\in\mathscr{D}'_{p}(M)$，$\sigma\in\mathscr{E}_{q}(M)(q\leqslant p)$，$h\in\mathrm{Diff}(M,N)$，通过以下公式

$$\langle T\wedge\sigma,\omega\rangle=\langle T,\sigma\wedge\omega\rangle,\ \omega\in\mathscr{D}_{p-q}(M); \tag{5}$$

$$\langle\partial T,\omega\rangle=\langle T,d\omega\rangle,\ \omega\in\mathscr{D}_{p-1}(M); \tag{6}$$

$$\langle h_*T,\omega\rangle=\langle T,h^*\omega\rangle,\ \omega\in\mathscr{D}_{p}(N) \tag{7}$$

分别定义出$T\wedge\sigma\in\mathscr{D}'_{p-q}(M)$，$\partial T\in\mathscr{D}'_{p-1}(M)$（$T$的"边界"）及$h_*T\in\mathscr{D}'_{p}(N)$（$T$的"推前"）；三者的连续性分别基于$\omega\longmapsto\sigma\wedge\omega$，$\omega\longmapsto d\omega$及$\omega\longmapsto h^*\omega$的连续性，这些是不难直接验证的. 若$T=\alpha$是$(n-p)$-形式，$h$是保向的微分同胚，则从(4)—(7)看出$\alpha\wedge\sigma$，$h_*\alpha$与通常的意义相合（参看§6.2），而$\partial\alpha=(-1)^{n-p+1}d\alpha$. 不过应注意，即使对于$M=N=\mathbf{R}^n$，$h_*^{-1}$也未必合于§2(3)所决定的$h^*$.

利用(7)可将$T\in\mathscr{D}'_{p}(M)$局部地转化为$\mathbf{R}^n$上的流：任给M的图(U,φ,x^i)，$\varphi_*(T|U)\in\mathscr{D}'_{p}(\varphi U)$. 任给$J=\{i_{p+1},\cdots,i_n\}$，令

$$\langle T_J, f\Omega\rangle = \delta_{JI}^{1\cdots n}\langle T, fdx^I\rangle,\ f\in\mathscr{D}(U),$$

则$T_J\in\mathscr{D}_n'(U)$，于是 $S=\dfrac{1}{(n-p)!}T_J\wedge dx^J\in\mathscr{D}_p'(U)$ ．任给$\omega\in\mathscr{D}_p(U)$，不难直接验证$\langle T,\omega\rangle=\langle S,\omega\rangle$，这就得到分解式：

$$T|U=\frac{1}{(n-p)!}T_J\wedge dx^J,\ J=\{i_{p+1},\cdots,i_n\}. \qquad (8)$$

卷积概念可推广于 Lie 群上的分布．为简单起见，考虑一Abel Lie群G，假定其中已取定Haar测度λ，从而有自然的嵌入$L_{loc}^1(G)\to\mathscr{D}'(G)$，$f\longmapsto fd\lambda$．任给$T$，$S\in\mathscr{D}'(G)$，如同§4(2)一样定义

$$\langle T*S,\varphi\rangle=\langle T(x),\langle S(y),\varphi(x+y)\rangle\rangle,\varphi\in\mathscr{D}(G), \quad (9)$$

只要(9)右端有意义．类似于9.4.1，9.4.2的结果是：

9.9.5 定理 (9) 确定一双线性映射 $\mathscr{D}'(G)\times\mathscr{E}'(G)\to\mathscr{D}'(G)$，$(T,S)\longmapsto T*S$；$T*S$ 分别对 T 与 S 连续，且 $T*S=S*T$；若 $(T,u)\in(\mathscr{E}'(G)\times\mathscr{E}(G))\cup(\mathscr{D}'(G)\times\mathscr{D}(G))$，则$(T*u)(x)=\langle T(y),\ u(x-y)\rangle\in\mathscr{E}(G)$．

证明基本上类似于9.4.1与9.4.2，主要的改动是，此处已不能利用类似于 $g=\sum\partial^\alpha g_\alpha(g_\alpha\in L_c^\infty(\mathrm{R}^n))$ 的分解式．为证 $S*T=T*S$（如同9.4.1中一样可设 T，$S\in\mathscr{E}'(G)$），对任给$\varphi\in\mathscr{D}(G)$，取$g=\sum u_i\otimes v_i\in\mathscr{E}(G\times G)$，使得在$\mathrm{supp}T\times\mathrm{supp}S$上$g$依$\mathscr{E}(G\times G)$中的拓扑充分接近于$\varphi(x+y)$（这一事实可从9.2.4推出）．直接验证

$$\langle T(x),\langle S(y),g(x,y)\rangle\rangle=\langle S(y),\langle T(x),g(x,y)\rangle\rangle, \quad (10)$$

而$\langle T*S,\varphi\rangle$与$\langle S*T,\varphi\rangle$都充分接近于(10)之两端，因此 $T*S=S*T$．当$(T,u)\in\mathscr{E}'(G)\times\mathscr{E}(G)$时，可直接验证$\langle T(y),u(x-y)\rangle\in\mathscr{E}(G)$；因对任给$\varphi\in\mathscr{D}(G)$有：

$$\langle T*u,\varphi\rangle=\langle T(y),\int u(x)\varphi(x+y)d\lambda(x)\rangle$$

$$=\int\langle T(y),u(x-y)\rangle\varphi(x)d\lambda(x),$$

故 $(T*u)(x)=\langle T(y),u(x-y)\rangle$. 当然以上推理尚须补足若干细节之后才算是严格的，这一工作读者当能自行完成.

以 δ 记 $0\in G$ 处的单位测度，即 $\delta(\varphi)=\varphi(0)$ （$\forall\varphi\in\mathscr{D}(G)$），则如同在 $\mathbb{R}^n$ 中一样，δ 是卷积单位元：$\delta*T=T*\delta=T(T\in\mathscr{D}'(G))$. 若 G 是紧Lie群，则 $\mathscr{D}'(G)$ 是以 δ 为单位元的卷积代数，它以卷积代数 $M(G)$（参看§8.2）为其子代数．取 G 的0-邻域基 $V_1\supset V_2\supset\cdots$；取 $\theta_n\in\mathscr{D}(V_n)$，$\theta_n\geqslant0,\int\theta_n d\lambda=1$ $(n=1,2,\cdots)$，则显然 θ_n 是一逼近单位(8.3.1)．于是对任给 $\varphi\in\mathscr{D}(G)$ 有：

$$\langle\theta_n,\varphi\rangle=(\check{\varphi}*\theta_n)(0)\to\varphi(0)\ (n\to\infty).$$

（参考8.3.2），可见在 $\mathscr{D}'(G)$ 中 $\theta_n\to\delta$，这就推出

$$\lim_n(T*\theta_n)=T\ (\forall T\in\mathscr{D}'(G)),$$

即每个 $T\in\mathscr{D}'(G)$ 可用 C^∞ 函数列逼近（参照9.4.3）.

参考文献：[22]，[41]，[60]，[61]，[79].

习　题

1. 若 $T\in\mathscr{D}'(M)$，任给 M 的图 (U,φ)，令 $T_\varphi=\varphi_*(T|U)$，则 $T_\psi=|J(\psi\varphi^{-1})|(\psi\varphi^{-1})^*T_\psi$，其中 $(\psi\varphi^{-1})^*T_\psi$ 依§2(3)．反之，若对 M 的每个图 (U,φ) 给定了 $T_\varphi\in\mathscr{D}'(\varphi U)$，使得以上等式成立，则存在唯一 $T\in\mathscr{D}'(M)$：$\varphi_*(T|U)=T_\varphi$.

2. 若 c 是 M 上的 p-链，则依(6)定义的 ∂c 与§6.8意义下的边界 ∂c 一致.

第十章　微分算子

主要为适应偏微分方程论的需要而发展起来的现代微分算子理论，综合地运用了多种分析工具，且产生了许多有深远影响的结果，我们以它的一个初步介绍来结束本书.

记号　本章中M记一n维定向Riemann流形，E,F记M上的Hermite丛(6.5.6)，其纤维维数分别为m,p；Ω记R^n的非空开子集，$\Delta=\{(x,x)\,|x\in\Omega\}$（与Laplace算子$\Delta$的区别由上下文决定）；$K$总记$\Omega$或$M$的紧子集．$M$上采用由Riemann度量决定的正测度$\mu$；$\Omega$上采用带系数$(2\pi)^{-n/2}$的$n$维Lebesgue测度（为简单起见，就写作$dx,d\xi$等）．$T'M=T^*M\setminus 0$，0记零截面；$T'\Omega=\Omega\times(\mathrm{R}^n\setminus 0)$.

§1　流形上的微分算子

10.1.1　定义　若一线性算子$P:\Gamma(E)\to\Gamma(F)$满足$\mathrm{supp}\,Pu\subset\mathrm{supp}\,u\,(u\in\Gamma(E))$，则称$P$为线性微分算子或简称为LDO 以$\mathrm{DO}(E,F)$记从$\Gamma(E)$到$\Gamma(F)$的LDO之全体.

不难验证，10.1.1中的条件“$\mathrm{supp}Pu\subset\mathrm{supp}u$”等价于要求$P$是一局部算子．因此第六章中讨论的算子$d,\delta,\nabla,L_X$等都是LDO．若$P\in\mathrm{DO}(E,F)$，$U\subset M$是一开集，则如同证6.3.2一样可得“$P$在$U$上的限制”$P|U\in\mathrm{DO}(E|U,F|U)$，使得$(P|U)(u|U)=(Pu)|U(\forall u\in\Gamma(E))$.

设(U,h)是M的一个图，(U,φ)与(U,ψ)分别为E，F的

向量丛图，$L_{h\varphi}$ 如§9.9(1)，$P\in \mathrm{DO}(E,F)$，则

$$P_{h\varphi\psi}=L_{h\psi}(P|U)L_{h\varphi}^{-1}:\mathscr{E}(hU,m)\to\mathscr{E}(hU,p) \qquad (1)$$

是 LDO，称为P的**局部表示**. 下面要证的基本结论是：当U适当小时，(1)是通常的微分算子

$$P(x,D)=\sum_{|\alpha|\le r}a_\alpha(x)D^\alpha:\mathscr{E}(\Omega,m)\to\mathscr{E}(\Omega,p), \qquad (2)$$

其中 $a_\alpha\in C^\infty(\Omega,M_{pm})$，$M_{pm}=L(\mathrm{C}^m,\mathrm{C}^p)$，$D=-i\partial$.

10.1.2 **定理**(Peetre, 1960) 设 $P\in \mathrm{DO}(E,F)$. 则 P 在每点 $a\in M$的某邻域内有形如(2)的局部表示.

证 不妨直接设$P:\mathscr{E}(\Omega,m)\to\mathscr{E}(\Omega,p)$. 取定 $a\in\Omega$，今指明有 a 的开邻域U，$r\in\mathrm{N}$，$C>0$，使得

$$\|Pu\|_\infty\le C\|u\|_r=C\sup_{|\alpha|\le r}\|\partial^\alpha u\|_\infty,\quad u\in\mathscr{D}(U\setminus a,m). \quad (3)$$

若以上结论不真，则对 a 的任给有界开邻域 $U_0\Subset\Omega$，存在开集 $U_1\Subset U_0\setminus a$ 及 $u_1\in\mathscr{D}(U_1,m)$：$\|Pu_1\|_\infty>2^2\|u_1\|_1$；又可取开集 $U_2\Subset U_0\setminus(\bar U_1\cup a)$，$u_2\in\mathscr{D}(U_2,m)$：$\|Pu_2\|_\infty>2^{2\cdot 2}\|u_2\|_2$，…，如此得开集 U_k 及 $u_k\in\mathscr{D}(U_k,m)$：$U_k\Subset U_0\setminus a$，$\{\bar U_k\}$互不相交，$\|Pu_k\|_\infty>2^{2k}\|u_k\|_k(k=1,2,\cdots)$. 令

$$u=\sum_{k=1}^\infty(u_k/2^k\|u_k\|_k),$$

则由 2.2.7 推出 $u\in C^\infty(\Omega,m)$，且 $\mathrm{supp}\,u\subset\bar U_0$. 任给 $k\ge 1$ 有：

$$\|P(u|U_k)\|_\infty=\|Pu_k\|_\infty/2^k\|u_k\|_k>2^k,$$

这与 $\mathrm{supp}\,Pu\subset\bar U_0$ 矛盾. 下面设(3)已满足.

取定 $u=(u_1,\cdots,u_m)\in C^\infty(U,m)$，$x\in U\setminus a$. 由 Taylor公式，

$$u(y)=\sum_{|\alpha|\le r}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha u(x)(y-x)^\alpha+\varphi(y), \qquad (4)$$

其中 $\varphi\in C^\infty$，$\partial^\alpha\varphi(x)=0(|\alpha|\le r)$. $\forall\varepsilon>0$，取 $\psi\in C^\infty$：$\|\varphi-\psi\|_r<\varepsilon$，在 x 邻近 $\psi(y)=0$(5.4.6)，可设 $\varphi-\psi\in\mathscr{D}(U\setminus a,$

m). (3)推出

$$|(P\varphi)(x)| = |P(\varphi - \psi)(x)| \leqslant C\|\varphi - \psi\|_r < C\varepsilon,$$

可见$(P\varphi)(x)=0$. 设$\{e_j\}$是$\mathbf{C}^m$的标准基，则依(4)有：

$$(Pu)(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant r}\sum_j \frac{1}{\alpha!}P(\partial^\alpha u_j(x)(y-x)^\alpha e_j)(x)$$
$$= \sum_{|\alpha|\leqslant r} a_\alpha(x)\partial^\alpha u(x), \tag{5}$$

其中$a_\alpha(x)$是以$\dfrac{1}{\alpha!}P((y-x)^\alpha e_j)(x)(1\leqslant j\leqslant m)$为列向量的矩阵，$(y-x)^\alpha$看作$y$的函数. $a_\alpha \in C^\infty$从下式看出：

$$P((y-x)^\alpha e_j)(x) = \sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(-x)^{\alpha-\beta}P(y^\beta e_j)(x).$$

因(5)显然亦在$x=a$成立，故$P|U = \sum_{|\alpha|\leqslant r} a_\alpha(x)\partial^\alpha$. □

利用10.1.2，可将通常微分算子的一些概念与结论转移到一般的$P\in \mathrm{DO}(E,F)$. 首先，从2.4.5与9.9.1推出$P\in L(\mathscr{E}(E), \mathscr{E}(F))\cap L(\mathscr{D}(E), \mathscr{D}(F))$. 其次，可定义$P$在$x\in M$的阶（记作$\mathrm{Ord}(P,x)$）为$P$的局部表示在$x$的阶，它显然与局部表示的选取无关. 若$\mathrm{Ord}P = \sup\limits_{x\in M}\mathrm{Ord}(P,x)<\infty$，则称$\mathrm{Ord}P$为$P$的阶.

$\mathrm{DO}(E,F)$具有自然的向量空间结构，而$\mathrm{DO}(E,E)$依算子乘法是一代数. 今在$\mathrm{DO}(E,F)$中定义"相伴"于下：如同§3.5(1)一样形成Hilbert空间$L^2(E), L^2(F)$，$u\in L^2(E)$是E上满足$\|u\|^2=\int\|u(x)\|^2d\mu<\infty$的截面. 若$P\in \mathrm{DO}(E,F)$，则由等式

$$(Pu,v)=(u,P^*v),\quad u\in\mathscr{D}(E),\quad v\in\mathscr{D}(F) \tag{6}$$

决定一局部算子$P^*:\mathscr{D}(F)\to L^2(E)$. 若$P$有形如(2)的局部表示，$d\mu=\rho dx$，则$P^*$有局部表示$\Sigma\rho^{-1}(-D)^\alpha(\rho a_\alpha^*)$，$a_\alpha^*$记$a_\alpha$的共轭转置(将$a_\alpha^*$看作算子). 由此推出：$P^*\mathscr{D}(F)\subset\mathscr{D}(E)$，

P^* 自然地扩张为从 $\Gamma(F)$ 到 $\Gamma(E)$ 的 LDO；$\mathrm{Ord}P^*=\mathrm{Ord}P$. 如上的 P^* 称为 P 的相伴.

取定 $P\in \mathrm{DO}(E,F)$，$x_0\in M$. 设 $\varphi\in C^\infty(M,\mathbf{R})$，$u\in\Gamma(E)$，$\varphi(x_0)=0$，$d\varphi(x_0)=\xi\in M^*_{x_0}$，$u(x_0)=u_0$；$s\in\mathbf{N}$. 今计算 $P(\varphi^s u)(x_0)$. 不妨设 P 表为(2). 因

$$D_x^\alpha[(x-x_0)\cdot\xi]^s(x_0)=\begin{cases}s!(-i)^s\xi^\alpha, & |\alpha|=s,\\ 0, & |\alpha|\neq s,\end{cases}$$

故当 $s>r$ 时 $P(\varphi^s u)(x_0)=0$，而

$$P(\varphi^r u)(x_0)=(-i)^r r!P_r(x_0,\xi)u_0, \tag{7}$$

其中 $P_r(x_0,\xi)=\sum\limits_{|\alpha|=r}a_\alpha(x_0)\xi^\alpha$. 由(7)可作出以下结论：首先，它表明阶 $\mathrm{Ord}(P,x_0)$ 可刻划为有以下性质的最大非负整数 r：对某个 $\varphi\in C^\infty(M)$，$\varphi(x_0)=0$，$u\in\Gamma(E)$，有 $P(\varphi^r u)\cdot(x_0)\neq 0$. 其次，因(7)右端完全决定于 x_0，ξ，u_0 而与 φ，u 的选择无关，故 P 决定出一族线性映射：

$$\sigma_r(P)(x,\xi):E_x\to F_x,\ u(x)\longmapsto\frac{i^r}{r!}P(\varphi^r u)(x), \tag{8}$$

其中 $r=\mathrm{Ord}P$，$u\in\Gamma(E)$，$\varphi\in C^\infty(M,\mathbf{R})$，$\varphi(x)=0$，$d\varphi(x)=\xi$. 当 P 形如 (2) 时，(8) 可等同于 $P_r(x,\xi)$. 设 $\pi:T^*M\to M$ 是投影，

$$\pi^*E=\bigcup_{(x,\xi)\in T^*M}(x,\xi)\times E_x, \tag{9}$$

则可自然地定义 π^*E 为 T^*M 上的向量从.

10.1.3 定义 称由(8)所给定的向量从同态

$$\sigma_r(P):\pi^*E\to\pi^*F,\ (x,\xi,u)\longmapsto\sigma_r(P)(x,\xi)u \tag{10}$$

为 P 的主象征；当 $\sigma_r(P)$ 为向量从同构（此时必定 $m=p$）时称 P 为椭圆算子.

从(8)看出 $\sigma_r(P)(x,\xi)$ 关于 ξ 是 r 次齐次的，因此

$$\sigma_r(P)(x,\xi)=|\xi|^r\sigma_r(P)\left(x,\frac{\xi}{|\xi|}\right),\quad (x,\xi)\in T'M, \tag{11}$$

其中 $|\xi|$ 记 ξ 在 M_x^* 中的"长"（M的 Riemann 度量标准地诱导出 M_x^* 中的度量，参看§6.6）．可见只要在余球面丛 $S^*M=\bigcup_{x\in M}S_x^{n-1}$ 上考察 $\sigma_r(P)$，S_x^{n-1} 记 M_x^* 中的单位球面．若 P 是椭圆算子，则 $\sigma_r(P)$ 给出一族随 $x\in M$ 变动的球面映射 $S^{n-1}\to \mathrm{GL}(m,\mathrm{C})$，这一事实是利用 $\mathrm{GL}(m,\mathrm{C})$ 的拓扑构造来研究椭圆算子的基础，沿这一方向已展开很深刻的现代研究（参看[11]）．

当 P 表为(2)时，自然认为 P 的主象征就是关于 ξ 的 r 次齐次多项式 $P_r(x,\xi)$（也称它为 $P(x,D)$ 的特征多项式）．在这种情况下，P 是椭圆的$\Longleftrightarrow\forall(x,\xi)\in T'\Omega$：$P_r(x,\xi)\in \mathrm{GL}(m,\mathrm{C})$；当 $m=1$ 时，椭圆性意味着 $P_r(x,\xi)\neq 0(\xi\neq 0)$；当 $m=1$，$r=2$，$a_\alpha\in\mathrm{R}$ 时，以上条件又相当于 2 次曲面 $\sum_{|\alpha|=2}a_\alpha\xi^\alpha=1$ 是（实或虚）椭球面，"椭圆性"一词盖出于此．

若 $P=\sum_{|\alpha|\le r}a_\alpha(x)D^\alpha$，$Q=\sum_{|\beta|\le s}b_\beta(x)D^\beta$，则直接看出

$$\sigma_{r+s}(QP)=\sigma_s(Q)\sigma_r(P); \tag{12}$$

$$\sigma_r(P^*)(x,\xi)=(\sigma_r(P)(x,\xi))^*, \tag{13}$$

只要 QP 有意义．通过局部表示，可将(12)推广到任何 $P\in \mathrm{DO}(E,F)$，$Q\in\mathrm{DO}(F,G)$，E,F,G 同时为 M 上的复向量丛，$\mathrm{Ord}P=r$，$\mathrm{Ord}Q=s$．对于(13)的推广，考虑 M 是紧无边流形的情况．若 P 是 0 阶的，则 P 对应于向量丛同态 $h:E\to F$，使得 $(Pu)(x)=h(u(x))$，$u\in\Gamma(E)$；而 P^* 恰对应 h^*：$(h^*)_x=(h_x)^*$；于是(13)两边都等于 h_x^*．其次设 $P:C^\infty(M)\to C^\infty(M)$，$\varphi\mapsto iX\varphi$，$X\in\mathscr{X}(M)$．从

$$\mathrm{div}(\varphi\bar\psi X)=X\varphi\cdot\bar\psi+\varphi\overline{\mathrm{div}(\psi X)},\quad \varphi,\psi\in C^\infty(M)$$

（参看§6.6 习题2）及6.8.5 推出$(P\varphi,\psi)=(\varphi, i\operatorname{div}(\psi X))$，$(\ ,\ )$ 记 $L^2(M)$ 中的内积．因此 $P^*\psi=i\operatorname{div}(\psi X)$；于是不难依(8)算出(13)两边都等于 $\frac{1}{i}\langle X_x,\xi\rangle$．因 P 总可由以上两种算子复合或线性组合得到，且有 $(A+B)^*=A^*+B^*$，$(AB)^*=B^*A^*$，故(12)亦对一般的 P 成立．

本节对 LDO 所述的若干事实将作为建立"拟微分算子"(PsDO)理论的一个模本．大致说来，（有限阶）LDO 推广为更一般的 PsDO 之后，施于 LDO 的线性运算、复合及取相伴等运算同样推广到 PsDO，同时增加了某种"求逆"运算，且所有上述运算都对应于主象征的相应运算．这样，PsDO 就成为一个应用上更方便的工具．当然，PsDO 必定会失去 LDO 的某些特点，最主要者是，PsDO 不再具有局部性．

参考文献：[11]，[22]，[45]，[57]，[83]．

习 题

1． 令 $\mathrm{Smbl}_r(E,F)=\{\sigma\in\mathrm{Hom}(\pi^*E,\pi^*F)\mid\sigma(x,t\xi)=t^r\sigma(x,\xi)\ (t>0)\}$，$\mathrm{DO}_r(E,F)=\{P\in\mathrm{DO}(E,F)\mid\mathrm{Ord}P=r\}$，则有线性映射 $\sigma:\mathrm{DO}_r(E,F)\to\mathrm{Smbl}_r(E,F)$，$P\mapsto\sigma_r(P)$．

2． 若 P 是椭圆 LDO，则 P^* 亦是．

3． $d:C^\infty(M)\to A^1(M)$ 是1阶椭圆算子，而 $d:A^p(M)\to A^{p+1}(M)$ 则不是 $(0<p\leqslant n)$．

§2 拟微分算子

设 $P=P(D)=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant r}a_\alpha D^\alpha$，$a_\alpha\in\mathbb{C}$，$u\in\mathscr{D}(\Omega)$．令

$$(Qu)(x)=\iint[P(\xi)]^{-1}u(y)e^{i(x-y)\cdot\xi}dyd\xi,\tag{1}$$

则

$$(PQu)(x)=\iint[P(\xi)]^{-1}u(y)P(D_x)e^{i(x-y)\cdot\xi}dyd\xi$$

$$=\iint u(y)e^{i(x-y)\cdot\xi}dyd\xi=\int\hat{u}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi=u(x).$$

可以说，(1)表出“P的右逆”Q. 尽管以上推演尚须严格化，但它足以启示我们去考虑类似于(1)但更一般的“积分算子”

$$(Au)(x)=\iint a(x,y,\xi)u(y)e^{i\varphi(x,y,\xi)}dyd\xi, \qquad (2)$$

其中a，φ满足下面将指明的条件.

10.2.1 定义 设$a(x,\xi)\in C^{\infty}(\Omega\times\mathrm{R}^m)$，$\rho\in(0,1]$，$\delta\in[0,1)$，$r\in\mathrm{R}$. 若对任给紧集$K\subset\Omega$，$\alpha\in\mathrm{N}^n$，$\beta\in\mathrm{N}^m$. $\exists C>0$，$\forall(x,\xi)\in K\times\mathrm{R}^m$：

$$|\partial_x^{\alpha}\partial_{\xi}^{\beta}a(x,\xi)|\leqslant C(1+|\xi|)^{r-\rho|\beta|+\delta|\alpha|} \qquad (3)$$

（粗言之，只要x限制在局部范围内，则$|\xi|\to\infty$时$\partial_x^{\alpha}\partial_{\xi}^{\beta}a$的增长不快于$C|\xi|^{r-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}$），则称$a$为$S_{\rho,\delta}^r$类函数，以$S_{\rho,\delta}^r$或$S_{\rho,\delta}^r(\Omega\times\mathrm{R}^m)$记此类函数之全体. 约定$S_{\rho,\delta}=\bigcup_{r\in\mathrm{R}}S_{\rho,\delta}^r$，$S^{-\infty}=\bigcap_{r\in\mathrm{R}}S_{\rho,\delta}^r$(它与$\rho,\delta$无关)，$S^r=S_{1,0}^r$，$S_{\rho,\delta}^r(\Omega)=S_{\rho,\delta}^r(\Omega\times\mathrm{R}^n)$，$S_{\rho,\delta}^r(\Omega,\Omega)=S_{\rho,\delta}^r(\Omega\times\Omega\times\mathrm{R}^n)$（依[79]）.

若$\varphi(x,\xi)\in C^{\infty}(\Omega\times(\mathrm{R}^m\setminus0),\ \mathrm{R})$，$d\varphi\neq0$，且$\varphi$对$\xi$是正齐次的，即$\varphi(x,t\xi)=t\varphi(x,\xi)$（$\forall t>0$），则称$\varphi$为**位相**. 给定$a(x,\xi)\in S_{\rho,\delta}^r(\Omega\times\mathrm{R}^m)$及位相$\varphi(x,\xi)$，称

$$I_{\varphi}(au)=\iint a(x,\xi)u(x)e^{i\varphi(x,\xi)}dxd\xi,\quad u\in\mathscr{D}(\Omega) \qquad (4)$$

为以a为振幅以φ为位相的振荡积分.

对于(4)，因$|aue^{i\varphi}|\leqslant\mathrm{const}(1+|\xi|)^r$，故当$r<-m$时积分存在. 若$r\geqslant-m$，(4)的意义还有待适当规定.

10.2.2 定理 设a，φ，u如(4)，$\tau\in\mathscr{D}(\mathrm{R}^m)$，$\xi$邻近0时$\tau(\xi)=1$，$\tau_{\varepsilon}(\xi)=\tau(\varepsilon\xi)(0<\varepsilon<1)$. 则$\lim\limits_{\varepsilon\to+0}I_{\varphi}(\tau_{\varepsilon}au)$存在且与$\tau$的选取无关，因此可规定

$$I_{\varphi}(au)=\lim_{\varepsilon\to0}\iint\tau(\varepsilon\xi)a(x,\xi)u(x)e^{i\varphi(x,\xi)}dxd\xi \qquad (5)$$

若令$T(u)=T_{\varphi}(au)$，则$T\in\mathscr{D}'(\Omega)$.

证　令 $P=\sum_k \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}+\sum_j |\xi|^2\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_j}\frac{\partial}{\partial\xi_j}$，则

$$Pe^{i\varphi}=i\left(\sum_k\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right|^2+\sum_j|\xi|^2\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_j}\right|^2\right)e^{i\varphi}=\frac{1}{\psi}e^{i\varphi},$$

ψ 由最后的恒等式确定. 显然 $\psi\in C^\infty(\Omega\times(\mathrm{R}^m\setminus 0))$，且 $\psi Pe^{i\varphi}=e^{i\varphi}$. 取 $\lambda\in\mathscr{D}(\mathrm{R}^m)$，使当 ξ 邻近 0 时 $\lambda(\xi)=1$. 令 $Q=(1-\lambda)\psi P+\lambda$，则 $Qe^{i\varphi}=e^{i\varphi}$. 令 $L=Q^t$(§9.2(4))，则

$$L=\sum_k a_k\frac{\partial}{\partial x_k}+\sum_j b_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}+c.$$

通过考察 P，Q 的系数可验证：

$$a_k,\ c\in S^{-1},\ b_j\in S^0(1\leqslant k\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m). \tag{6}$$

设 $s=\min\{\rho,\ 1-\delta\}$，整数 $l\geqslant\max\{0,(r+m+1)/s\}$，则(6)推出

$$\begin{aligned}|L^l(\tau_\varepsilon au)e^{i\varphi}|&\leqslant\text{const}(1+|\xi|)^{r-ls}\\&\leqslant\text{const}(1+|\xi|)^{-m-1},\end{aligned}\tag{7}$$

(7)中的常数与 x，ξ，ε 无关（这是要点！）. 依分部积分，

$$\begin{aligned}I_\varphi(\tau_\varepsilon au)&=\iint\tau_\varepsilon au\cdot L^l e^{i\varphi}dxd\xi=\iint L(\tau_\varepsilon au)e^{i\varphi}dxd\xi\\&=\cdots=\iint L^l(\tau_\varepsilon au)e^{i\varphi}dxd\xi\end{aligned}$$

（参考§9.2(5)），故由控制收敛定理得：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}I_\varphi(\tau_\varepsilon au)=\iint L^l(au)e^{i\varphi}dxd\xi,$$

右端积分与 τ 无关（注意因此亦与 L 无关！）. 于是得

$$T(u)=I_\varphi(au)=\iint L^l(au)e^{i\varphi}dxd\xi. \tag{8}$$

取定紧集 $K\subset\Omega$，任给 $u\in\mathscr{D}(K)$，如同得出(7)一样有

$$|T(u)|\leqslant\text{const}\|u\|_l\int(1+|\xi|)^{-m-1}d\xi,$$

这表明 $T\in\mathscr{D}'(\Omega)$. □

约定 今后总假定 $0\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$.

10.2.3 定义 设 $a(x,y,\xi)\in S^r_{\rho,\delta}(\Omega,\Omega)$, $\varphi(x,y,\xi)$是一位相（注意此处(x,y)相当于10.2.2中的x!）. 振荡积分

$$\langle K_A,w\rangle=\iiint a(x,y,\xi)w(x,y)e^{i\varphi(x,y,\xi)}dxdyd\xi \tag{9}$$

决定出$K_A\in\mathscr{D}'(\Omega\times\Omega)$(10.2.2). 称由等式

$$\langle Au,v\rangle=\langle K_A,v\otimes u\rangle,\ u,v\in\mathscr{D}(\Omega) \tag{10}$$

决定的算子 $A:\mathscr{D}(\Omega)\to\mathscr{D}'(\Omega)$为以$a$为振幅以$\varphi$为位相的Fourier积分算子，或简称FIO；称$K_A$为$A$的分布核（由9.2.4，$K_A$由$A$唯一决定）. 以$a(y,x,-\xi)[\overline{a(y,x,\xi)}]$代$a(x,y,\xi)$、以$\varphi(y,x,-\xi)[-\varphi(y,x,\xi)]$代$\varphi(x,y,\xi)$后所得之FIO记作$A^t[A^*]$，称为$A$的转置[相伴]. 若$A$是以$a\in S^r_{\rho,\delta}$为振幅以$\varphi=(x-y)\cdot\xi$为位相的FIO，则称$A$为$r$阶$(\rho,\delta)$型拟微分算子或简称PsDO，记作$A=\mathrm{Op}a$，以$\Psi^r_{\rho,\delta}$或$\Psi^r_{\rho,\delta}(\Omega)$记此类算子之全体，令$\Psi_{\rho,\delta}=\bigcup_{r\in\mathbf{R}}\Psi^r_{\rho,\delta}$，$\Psi^{-\infty}=\bigcap_{r\in\mathbf{R}}\Psi^r_{\rho,\delta}$，$\Psi^r=\Psi^r_{1,0}$.

10.2.4 例 1° 设 $P(x,\xi)=\sum_{|\alpha|\leqslant r}a_\alpha(x)\xi^\alpha$, $a_\alpha\in C^\infty(\Omega)$，则直接看出$P(x,\xi)\in S^r$，$P(x,D)=\mathrm{Op}P(x,\xi)\in\Psi^r$，任给$u\in\mathscr{D}(\Omega)$，

$$P(x,D)u=\iint P(x,\xi)u(y)e^{i(x-y)\cdot\xi}dyd\xi. \tag{11}$$

2° 考虑以$A(x,y)\in C^\infty(\Omega\times\Omega)$为核的积分算子：

$$(Au)(x)=\int A(x,y)u(y)dy,\ u\in\mathscr{D}(\Omega). \tag{12}$$

取$\tau(\xi)\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$：$\tau\geqslant 0$，$\int\tau d\xi=1$，则(12)可变换成：

$$(Au)(x)=\iint\tau(\xi)A(x,y)u(y)dyd\xi$$

$$=\iint a(x,y,\xi)u(y)e^{i(x-y)\cdot\xi}dyd\xi,$$

其中 $a(x,y,\xi)=\tau(\xi)A(x,y)e^{i(y-x)\cdot\xi}\in S^{-\infty}$，于是 $A=\mathrm{Op}a\in\Psi^{-\infty}$. 反之，不难验证每个 $A\in\Psi^{-\infty}$ 必可写成形如(12)的积分算子. 对任给 $A\in\Psi^{-\infty}$，今后总以 $A(x,y)$记A的核.

下面考察(8)(10)表示的分布T与 Au的正则性.

10.2.5 定理 1° 对于由(8)给定的T有：

$$\mathrm{singsupp}T\subset S_\varphi=\{x\mid\exists\xi:\ \varphi'_\xi(x,\xi)=0\}.\qquad(13)$$

2° 设A由(10)给定，$\varphi(x,y,\xi)$关于(x,ξ)、(y,ξ)及$(z,\xi)(z=(x,y))$皆为位相. 则 $A\in L(\mathscr{D}(\Omega),\mathscr{E}(\Omega))$，且 A 可延拓为连续线性算子 $A:\mathscr{E}'(\Omega)\to\mathscr{D}'(\Omega)$；任给 $u\in\mathscr{E}'(\Omega)$：$\mathrm{singsupp}Au\subset S_\varphi^{-1}(\mathrm{singsupp}u)$，其中$S_\varphi=\{(x,y)\mid\exists\xi:\ \varphi'_\xi(x,y,\xi)=0\}$看作关系，记号依1.1.1. 特别，若 $A\in\Psi_{\rho,\delta}(\Omega)$，则$A\in L(\mathscr{D}(\Omega),\mathscr{E}(\Omega))\cap L(\mathscr{E}'(\Omega),\mathscr{D}'(\Omega))$，$\forall u\in\mathscr{E}'(\Omega)$：$\mathrm{singsupp}Au\subset\mathrm{singsupp}u$.

证 1° 易见 $R_\varphi=\Omega\setminus S_\varphi$ 是开集，今证 $T|R_\varphi\in C^\infty$. 任给 $x_0\in R_\varphi$，必有 x_0 的有界邻域 $V\subset\Omega$，在 $V\times(\mathbf{R}^m\setminus0)$上 $\varphi'_\xi\neq0$. 考察10.2.2之证明看出，当 $\varphi'_\xi\neq0$时 P 可代以 $\sum_j|\xi|^2\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi_j}\dfrac{\partial}{\partial\xi_j}$，从而$L$不含$\dfrac{\partial}{\partial x_k}$. 于是对任给 $u\in\mathscr{D}(V)$，依(8)有

$$T(u)=\iint L^l(a)ue^{i\varphi}dxd\xi=\int T(x)u(x)dx,$$

其中 $$T(x)=\int L^l(a(x,\xi))e^{i\varphi(x,\xi)}d\xi,\ x\in V.\qquad(14)$$

依10.2.2的记号与证法推出 $L^l(a)\in S^{r-l\varepsilon}_{\rho,\delta}$，因 l 可取得任意大，故可在(14)的积分号下微分任意次(3.2.6)，这表明$T(x)\in C^\infty(V)$，从而 $T|R_\varphi\in C^\infty$.

2° 在所给条件下，含参数x的振荡积分

$$\iint a(x,y,\xi)u(y)e^{i\varphi(x,y,\xi)}dyd\xi,\ u\in\mathscr{D}(\Omega) \qquad (15)$$

有意义，结合(5)(9)(10)看出(15)即$(Au)(x)$．如同证1°一样，通过积分号下取微分可证实$Au\in C^\infty$．任给紧集K_1，$K_2\subset\Omega$，$u\in\mathscr{D}(K_2)$，$k\in\mathbb{N}$，利用(15)可推出

$$|\partial_x^\alpha(Au)(x)|\leqslant\text{const}\|u\|_k,\ x\in K_1,\ |\alpha|\leqslant k,$$

可见$A\in L(\mathscr{D}(\Omega),\mathscr{E}(\Omega))$(§1.6(1))．同理$A^t\in L(\mathscr{D}(\Omega),\mathscr{E}(\Omega))$，于是$(A^t)'\in L(\mathscr{E}'(\Omega),\mathscr{D}'(\Omega))$．任给$u,v\in\mathscr{D}(\Omega)$，由$A^t$之定义有

$$\langle(A^t)'u,v\rangle=\langle u,A^tv\rangle=\langle A^tv,u\rangle$$
$$=\langle K_{A^t},u\otimes v\rangle=\langle K_A,v\otimes u\rangle=\langle Au,v\rangle,$$

可见$(A^t)'$是A的延拓，不妨就写作$A\in L(\mathscr{E}'(\Omega),\mathscr{D}'(\Omega))$．

取定$u\in\mathscr{E}'(\Omega)$．若$x_0\times\text{supp}u\subset R_\varphi=(\Omega\times\Omega)\setminus S_\varphi$，则$x_0\times\text{supp}u\Subset V\times U\subset R_\varphi$．由1°(以$K_A$代$T$)，$K_A|R_\varphi\in C^\infty$．任给$v\in\mathscr{D}(V)$，

$$\langle Au,v\rangle=\langle u,A^tv\rangle=\langle u(y),\int K_A(x,y)v(x)dx\rangle$$
$$=\int\langle u(y),\ K_A(x,y)\rangle v(x)dx,$$

可见$Au|V=\langle u(y),\ K_A(x,y)\rangle\in C^\infty$．由此推出

$$\text{singsupp}Au\subset S_\varphi^{-1}(\text{supp}u). \qquad (16)$$

令$K=\text{singsupp}u$，任给K的紧邻域$W\subset\Omega$，取Ω上从属于$\{K^c,W\}$的单位分解$\{\lambda_1,\lambda_2\}$，令$u_i=\lambda_iu(i=1,2)$．则$u_1\in\mathscr{D}(\Omega)$，$Au_1\in C^\infty$，于是从(16)推出：

$$\text{singsupp}Au\subset\text{singsupp}Au_2\subset S_\varphi^{-1}(\text{supp}u_2)\subset S_\varphi^{-1}(W).$$

因W可任意接近K，故必$\text{singsupp}Au\subset S_\varphi^{-1}(K)$．

对PsDO有$S_\varphi=\Delta$，故相应的结论是显然的． □

注 1° 对于(8)表示的T，若x邻近S_φ时，$a(x,\xi)=0$，则10.2.5推出$T\in C^\infty$．若$A=\text{Op}a$，(x,y)邻近$\Delta\subset\Omega\times$

Ω 时 $a(x,y,\xi)=0$，则 $K_A\in C^\infty$，从而 $A\in\Psi^{-\infty}$（参考 10.2.4 之 2°）．后面将多次利用这一事实．

2° 在10.2.5之2°的条件下，显然亦有 $A^t, A^*\in L(\mathscr{D}(\Omega), \mathscr{E}(\Omega))\cap L(\mathscr{E}'(\Omega), \mathscr{D}'(\Omega))$；对任给 $u, v\in\mathscr{D}(\Omega)$，

$$(Au, v)=\langle K_A, \bar{v}\otimes u\rangle=\overline{\langle K_{A^*}, \bar{u}\otimes v\rangle}$$
$$=\overline{\langle A^*v, \bar{u}\rangle}=(u, A^*v);$$

前面已看到 $\langle Au, v\rangle=\langle u, A^tv\rangle$. 这就阐明了"转置"与"相伴"的意义．

参考文献：[11]，[18]，[41]，[60]，[76]，[79]．

习　题

1. 设 $a\in S^r_{\rho,\delta}$，$b\in S^t_{\rho,\delta}$，$r\leqslant t$，则 $a+b\in S^t_{\rho,\delta}$，$ab\in S^{r+t}_{\rho,\delta}$，$\partial^\alpha_x\partial^\beta_\xi a\in S^{r-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}_{\rho,\delta}$．

2. 设 $f\in C^\infty(\Omega\times\mathbf{R}^m)$，当 $t>0$ 与 $|t\xi|$ 充分大时 $f(x,t\xi)=t^rf(x,\xi)$，则 $f\in S^r$．

3. 设 $A\in\Psi^{-\infty}(\Omega)$．则 $A\mathscr{E}'(\Omega)\subset\mathscr{E}(\Omega)$；$K_A\in C^\infty$；$K_{A^t}(x, y)=K_A(y,x)$，$K_{A^*}(x,y)=\overline{K_A(y,x)}$．

4. 设 $A=\mathrm{Op}a$，$u\in\mathscr{D}(\Omega)$，则

$$(Au)(x)=\int d\xi\int a(x,y,\xi)u(y)e^{i(x-y)\cdot\xi}dy,$$

且可在积分号下求导．

§3 适拟微分算子

在 PsDO 中，存在一类既特殊又有相当"代表性"的算子，即所谓适拟微分算子．

10.3.1 定义 设 $R\subset\Omega\times\Omega$，若对任给紧集 $K\subset\Omega$，$(K\times\Omega)\cap R$ 与 $(\Omega\times K)\cap R$ 皆为紧集，则称 R 为适集．若 $A\in\Psi_{\rho,\delta}$，$\mathrm{supp}K_A$ 为适集，则称 A 为适 PsDO．

微分算子 $P=\sum_{|\alpha|\leq r} a_\alpha(x)D^\alpha$ 必是适的：依 §2(11)，

$$K_P=\int P(x,\xi)e^{i(x-y)\cdot\xi}d\xi=\sum_{|\alpha|\leq r} a_\alpha(x)(D^\alpha\delta)(x-y),$$

可见 $\mathrm{supp}K_P=\Delta$ 为适集．粗略地说，若 A 为适 PsDO，则 $\mathrm{supp}K_A$"集中在对角线 Δ 邻近"．

10.3.2 定理 设 $A\in\Psi_{\rho,\delta}(\Omega)$，则以下条件互相等价：(i) A 是适的；(ii) $A, A^t\in L(\mathscr{D}(\Omega))$；(iii) 任给紧集 $K\subset\Omega$，存在紧集 $K_1\subset\Omega$：$A\mathscr{D}(K)\subset\mathscr{D}(K_1)$，$A^t\mathscr{D}(K)\subset\mathscr{D}(K_1)$；(iv) $A, A^t\in L(\mathscr{E}(\Omega))$；(v) $A, A^t\in L(\mathscr{E}'(\Omega))$．

证 (i)⇒(ii)．设 $R=\mathrm{supp}K_A$ 为适集．任给 $u\in\mathscr{D}(\Omega)$，$v\in\mathscr{D}(\Omega\setminus R^{-1}(\mathrm{supp}u))$，有 $v\otimes u\in\mathscr{D}(R^c)$，从而 $\langle Au,v\rangle=0$，故得

$$\mathrm{supp}Au\subset R^{-1}(\mathrm{supp}u),\ u\in\mathscr{D}(\Omega). \qquad (1)$$

设 $\pi:(x,y)\mapsto x$，则 $R^{-1}(\mathrm{supp}u)=\pi((\Omega\times\mathrm{supp}u)\cap R)$．于是(1)与 $A\in L(\mathscr{D}(\Omega),\mathscr{E}(\Omega))$一起推出 $A\in L(\mathscr{D}(\Omega))$．同理 A^t 亦如此．

(ii)⇒(iii)，这是 1.9.4 的推论．

(iii)⇒(i)．设 $A\mathscr{D}(K)\subset\mathscr{D}(K_1)$，$K_0\Subset K$，$K_0, K, K_1\subset\Omega$ 为紧集，$R=\mathrm{supp}K_A$．今证 $(\Omega\times K_0)\cap R\subset K\times K$ (由此将看出 (iii)⇒(i))．任给 $u\in\mathscr{D}(K)$，$v\in\mathscr{D}(K_1^c)$，有 $\langle K_A, v\otimes u\rangle=\langle Au,v\rangle=0$，于是从 9.2.4 推出 $(K_1^c\times K_0)\cap R=\varnothing$，从而$(\Omega\times K_0)\cap R\subset K_1\times K$．

(i)⇒(iv)．从 $A^t\in L(\mathscr{D}(\Omega))$推出 $A\in L(\mathscr{D}'(\Omega))$，故对任给 $u\in\mathscr{E}(\Omega)$，$Au\in\mathscr{D}'(\Omega)$有定义．任给有界开集 $V\subset\Omega$，今证$(Au)|V\in C^\infty$．设$A^t\mathscr{D}(V)\subset\mathscr{D}(K)$，取$\tau\in\mathscr{D}(\Omega)$：$K\prec\tau$．任给 $v\in\mathscr{D}(V)$，

$$\langle Au,v\rangle=\langle u,A^tv\rangle=\langle\tau u,A^tv\rangle=\langle A(\tau u),v\rangle,$$

可见$(Au)|V\in C^\infty$．若在$\mathscr{E}(\Omega)$中 $u_k\to 0$，则在$\mathscr{D}(\Omega)$中$\tau u_k\to$

0 且 $A(\tau u_k)\to 0$，这表明 Au_k 之各阶导数在 V 上一致收敛于零．由 V 之任意性，必有 $A\in L(\mathscr{E}(\Omega))$．同理 A^t 亦是如此．因显然有(iv)⇒(v)⇒(ii)，故定理得证． □

利用 10.3.2 可以推出，若 $A\in\Psi_{\rho,\delta}(\Omega)$是适的，则关系 $\operatorname{singsupp}Au\subset\operatorname{singsupp}u$(10.2.5)对任何 $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$成立．将关于 PsDO 的结论转移到适 PsDO 时，往往能解除在 $\mathscr{E}'$ 中考虑的限制，这是值得注意的．

10.3.3 定理 每个 $A\in\Psi^r_{\rho,\delta}(\Omega)$可分解成 $A=B+R$，其中 $B\in\Psi^r_{\rho,\delta}$ 是适的，$R\in\Psi^{-\infty}$．

证 取 Ω 的局部有限相对紧开覆盖 $\{U_j\}$；又取 $\Delta\subset\Omega\times\Omega$ 的邻域 V，使 $V\Subset W=\bigcup\bar U_j\times\bar U_j$．作 $\tau\in C^\infty(\Omega\times\Omega)$：$V\prec\tau\prec W$．设 $A=\operatorname{Op}a$，令 $B=\operatorname{Op}\tau a$，则 $R=A-B\in\Psi^{-\infty}$（参看 10.2.5 后面的注 1°），$\operatorname{supp}K_B\subset W$是适集． □

若令 $\dot\Psi^r_{\rho,\delta}=\Psi^r_{\rho,\delta}/\Psi^{-\infty}$，则 10.3.3 表明，每个 $\dot A\in\dot\Psi^r_{\rho,\delta}$必可用一个适 PsDO 来代表．

§2(11)表明，微分算子 $P(x,D)$有不含 y 的振幅$P(x,\xi)$．现在指明任何适 PsDO 皆是如此．

10.3.4 定理 若 $A\in\Psi^r_{\rho,\delta}(\Omega)$是适的，$\sigma_A(x,\xi)=e^{-ix\cdot\xi}\cdot Ae^{iy\cdot\xi}$，则 $A=\operatorname{Op}\sigma_A$（有时将 A 写作 $\sigma_A(x,D)$）．

证 依 2.4.7，10.3.2 有 $\sigma_A\in C^\infty(\Omega\times\mathbf{R}^n)$．设 $A=\operatorname{Op}a$．任给 $u\in\mathscr{D}(\Omega)$，依 §2(5)(8)（用那里的记号）有

$$(Au)(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\tau_\varepsilon(\eta)a(x,y,\eta)u(y)e^{i(x-y)\cdot\eta}dyd\eta$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int P_\varepsilon(x,\xi)\hat u(\xi)d\xi,$$

其中 $$P_\varepsilon(x,\xi)=\iint\tau_\varepsilon(\eta)a(x,y,\eta)e^{iy\cdot\xi+i(x-y)\cdot\eta}dyd\eta$$

$$=\iint L^l_i(\tau_\varepsilon ae^{iy\cdot\xi})e^{i(x-y)\cdot\eta}dyd\eta,$$

$l\in\mathrm{N}$充分大．如同证10.2.2一样可用控制收敛定理：

$$(Au)(x)=\int\lim_{\varepsilon\to 0}P_\varepsilon(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi$$

$$=\int A(e^{i\langle y,\xi\rangle})\hat{u}(\xi)d\xi=\int\sigma_A(x,\xi)\hat{u}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi.$$

这正表明 $A=\mathrm{Op}\sigma_A$． □

一个自然的问题是，如何从适 PsDO A 的任给振幅 a 求得 σ_A？解此问题要用到渐近展开概念．

10.3.5 定义 设 $a\in C^\infty(\Omega\times\mathrm{R}^n)$，$a_j\in S^{r_j}_{\rho,\delta}(\Omega)$ ($j=1,2,\cdots$)，$r_j\to-\infty$．若 $a-\sum\limits_{j<k}a_j\in S^{t_k}_{\rho,\delta}$，$t_k=\max\limits_{j\ge k}r_j$ ($k=1,2,\cdots$)，则称 Σa_j 是 a 的渐近展开，记作 $a\sim\Sigma a_j$．

直接看出，关系 $a\sim\Sigma a_j$ 不因调动 a_j 的次序或合并某些 a_j 而改变；当 $r_j\searrow-\infty$ 时 $a\in S^{r_1}_{\rho,\delta}$．

10.3.6 定理 设 $a_j\in S^{r_j}_{\rho,\delta}(\Omega)(j=1,2,\cdots)$，$r_j\to-\infty$．则必有 $a\in C^\infty(\Omega\times\mathrm{R}^n)$：$a\sim\Sigma a_j$；$b\sim\Sigma a_j\Longleftrightarrow a-b\in S^{-\infty}$．

证 可设 $r_j\searrow-\infty$．取 Ω 中的穷竭紧集列 $\{K_l\}$；取 $\psi\in C^\infty(\mathrm{R}^n)$，$B^n(0,1)\prec 1-\psi\prec B^n(0,2)$；设 $0<\varepsilon\leqslant 1$．容易看出，有与 ε 无关的 $C_j>0$，使当 $|\alpha+\beta|+l<j$，$(x,\xi)\in K_l\times\mathrm{R}^n$ 时，

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta[\psi(\varepsilon\xi)a_j(x,\xi)]|\leqslant C_j(1+|\xi|)^{r_j-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}.$$

令
$$\varepsilon_j=\min\left\{(2^jC_j)^{1/(r_j-r_{j-1})},\frac{1}{j}\right\},$$

$$a=\sum_{j=1}^\infty\psi_j(\xi)a_j(x,\xi),\quad\psi_j(\xi)=\psi(\varepsilon_j\xi).\tag{2}$$

当 $|\alpha+\beta|+l<j$，$(x,\xi)\in K_l\times\mathrm{R}^n$，$|\varepsilon_j\xi|>1$（$|\varepsilon_j\xi|\leqslant 1$ 时不必考虑）时，

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta[\psi_j(\xi)a_j(x,\xi)]|\leqslant C_j(1+|\xi|)^{r_j-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}$$
$$\leqslant 2^{-j}(1+|\xi|)^{r_{j-1}-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}.\tag{3}$$

(2)局部地为有限和，故 $a\in C^\infty(\Omega\times\mathrm{R}^n)$. 取定整数 k, l: $0<k<l$，则当 $(x,\xi)\in K_l\times\mathrm{R}^n$ 时，

$$\left|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\left[a(x,\xi)-\sum_{j=1}^k a_j(x,\xi)\right]\right|$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^k|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta[(\psi_j-1)a_j]|+\sum_{j=k+1}^{|\alpha|+|\beta|+l}|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta(\psi_j a_j)|$$

$$+\sum_{j>|\alpha|+|\beta|+l}|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta(\psi_j a_j)|=I_1+I_2+I_3.$$

由(3)， $I_3\leqslant\mathrm{const}(1+|\xi|)^{r_{k+1}-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}$. (4)

由 $\psi_j-1\in\mathscr{D}(\mathrm{R}^n)$ 及 $\psi_j a_j\in S_{\rho,\delta}^{r_{k+1}}$ $(j\geqslant k+1)$，对 I_1, I_2 亦有与(4)同样的估计. 故得 $a\sim\Sigma a_j$. 定理的后一结论是显然的. □

10.3.7 定理 设 $a\in S_{\rho,\delta}^r(\Omega,\Omega)$，$A=\mathrm{Op}a$ 是适的，则

$$\sigma_A(x,\xi)\sim\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha a(x,y,\xi)|_{y=x}. \qquad (5)$$

定理的证明较长，可参看[18]. 直接看出(5)的通项属于 $S_{\rho,\delta}^{r-(\rho-\delta)|\alpha|}$，可见条件 $\rho>\delta$ 是要紧的.

结合10.3.4与10.3.7得出以下基本结论：映射 $S_{\rho,\delta}^r(\Omega)\to\Psi_{\rho,\delta}^r(\Omega)$，$a\mapsto\mathrm{Op}a$ 导出一线性同构 $\dot{S}_{\rho,\delta}^r(\Omega)\cong\dot{\Psi}_{\rho,\delta}^r(\Omega)$ (用 σ 记其逆)，其中 $\dot{S}_{\rho,\delta}^r=S_{\rho,\delta}^r/S^{-\infty}$. 当 $A\in\dot{A}\in\dot{\Psi}_{\rho,\delta}^r$，$a\in\sigma(\dot{A})$ 时，称 a 为 A 的**象征**，也记作 σ_A 或 $\sigma(A)$ (因此 σ_A 仅在 $\mathrm{mod}S^{-\infty}$ 的意义下确定). 同时引入另一同构

$$\sigma_r:\Psi_{\rho,\delta}^r/\Psi_{\rho,\delta}^{r_1}\cong S_{\rho,\delta}^r/S_{\rho,\delta}^{r_1},$$

其中 $r_1=r-\rho+\delta$，σ_r 满足 $\sigma_r(A+\Psi_{\rho,\delta}^{r_1})=\sigma(A)+S_{\rho,\delta}^{r_1}$. 因此 $\sigma_r(A)$ 在 $\mathrm{mod}S_{\rho,\delta}^{r_1}$ 的意义下确定，称它为 A 的**主象征**.

下面指出，如我们所预期的，关于 PsDO 的某些运算归结为对应象征(尤其是主象征)的运算.

10.3.8 定理 任给适的 $A\in\Psi_{\rho,\delta}^r(\Omega)$，$B\in\Psi_{\rho,\delta}^s(\Omega)$，有

$$\sigma(A^t)(x,\xi)\sim\sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha\sigma_A(x,-\xi); \qquad (6)$$

$$\sigma_r(A^t)(x,\xi)=\sigma_r(A)(x,-\xi); \qquad (7)$$

$$\sigma(A^*)(x,\xi)\sim\sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha\overline{\sigma_A(x,\xi)}; \qquad (8)$$

$$\sigma_r(A^*)(x,\xi)=\overline{\sigma_r(A)(x,\xi)}, \qquad (9)$$

$$\sigma(BA)(x,\xi)\sim\sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\sigma_B(x,\xi)D_x^\alpha\sigma_A(x,\xi); \qquad (10)$$

$$\sigma_{r+s}(BA)=\sigma_s(B)\sigma_r(A)=\sigma_{r+s}(AB). \qquad (11)$$

证 可设 $A=\mathrm{Op}\sigma_A(x,\xi)$，于是 $A^t=\mathrm{Op}\sigma_A(y,-\xi)$ (10.2.3)，从而由(5)推出(6)(7). 类似地得出(8)(9).

任给 $u\in\mathscr{D}(\Omega)$，利用 $A=A^{tt}=\mathrm{Op}(\sigma(A^t)(y,-\xi))$ 得

$$(Au)(x)=\iint\sigma(A^t)(y,-\xi)u(y)e^{-iy\cdot\xi}e^{ix\cdot\xi}dyd\xi,$$

故 $$(Au)^\wedge(\xi)=\int\sigma(A^t)(y,-\xi)u(y)e^{-iy\cdot\xi}dy.$$

于是 $$(BAu)(x)=\int\sigma_B(x,\xi)(Au)^\wedge(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi$$

$$=\iint\sigma_B(x,\xi)\sigma(A^t)(y,-\xi)u(y)e^{i(x-y)\cdot\xi}dyd\xi.$$

令 $a=\sigma_B(x,\xi)\sigma(A^t)(y,-\xi)$，则 $a\in S^{r+s}_{\rho,\delta}$，于是 $BA\in\Psi^{r+s}_{\rho,\delta}$. 由 10.3.2，$BA$ 是适的，因此依(5)有：

$$\sigma_{BA}(x,\xi)\sim\sum_{\beta}\frac{1}{\beta!}\partial_\xi^\beta[\sigma_B(x,\xi)D_x^\beta\sigma(A^t)(x,-\xi)]. \quad (12)$$

以(6)代入(12)（不难指明这样作是合理的）得：

$$\sigma_{BA}(x,\xi)\sim\sum_{\beta,\gamma}\frac{(-1)^{|\gamma|}}{\beta!\gamma!}\partial_\xi^\beta[\sigma_B(x,\xi)\partial_\xi^\gamma D_x^{\beta+\gamma}\sigma_A(x,\xi)]$$

$$= \sum_{\substack{\beta,\gamma \\ \alpha \leq \beta}} \frac{(-1)^{|\gamma|}}{\alpha!(\beta-\alpha)!\gamma!} \partial_\xi^\alpha \sigma_B(x,\xi) \partial_\xi^{\beta+\gamma-\alpha} D_x^{\beta+\gamma} \sigma_A(x,\xi)$$

$$= \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \sum_\mu \sum_{\gamma \leq \mu} \frac{(-1)^{|\gamma|}}{\gamma!(\mu-\gamma)!} \partial_\xi^\alpha \sigma_B \partial_\xi^\mu D_x^{\alpha+\mu} \sigma_A. \qquad (13)$$

因当 $|\mu|>0(\mu \in \mathbf{N}^n)$时，

$$\sum_{\gamma \leq \mu} \frac{(-1)^{|\gamma|}}{\gamma!(\mu-\gamma)!} = \frac{1}{\mu!}[(1-1)\cdots(1-1)]^\mu = 0,$$

故从(13)得出(10)，而(10)显然推出(11)． □

推论 若 A, B 如 10.3.8，则 $[A, B] = AB - BA \in \Psi_{\rho,\delta}^{r+s-\rho+\delta}$．

注 1° 运算 $A \mapsto A^t$，$A \mapsto A^*$ 及$(B, A) \mapsto BA$ 以自然的方式推广到 $\tilde{\Psi}_{\rho,\delta} = \Psi_{\rho,\delta}/\Psi^{-\infty} = \bigcup_r \tilde{\Psi}_{\rho,\delta}^r$上；使 $\tilde{\Psi}_{\rho,\delta}$ 成为一个带有两种对合（取转置与相伴）的代数，称之为 PsDO 代数，其中的运算归结为“适代表元”的运算．

2° 设 $A \in \Psi_{\rho,\delta}^r(\Omega)$，$B \in \Psi_{\rho,\delta}^s(\Omega)$．由 10.3.2，只要 A, B 之一是适的，AB 就有意义，可以证明 $AB \in \Psi_{\rho,\delta}^{r+s}$．

参考文献：[10]，[11]，[18]，[41]，[49]，[60]，[76]，[79]．

习 题

1．$A \in \Psi_{\rho,\delta}(\Omega)$ 是适的 $\Longleftrightarrow$ 任给紧集 $K \subset \Omega$，存在紧集 $K_1 \subset \Omega$，$A\mathscr{D}(K) \subset \mathscr{D}(K_1)$，且当 $u|K_1 = 0$ 时 $Au|K = 0$．

2．设 $a \sim \Sigma a_j$，$\forall r>0$，$\exists k$：$A - \sum_{j \leq k} \mathrm{Op}\, a_j \in \Psi^{-r}$，则 $A - \mathrm{Op}\, a \in \Psi^{-\infty}$．

3．设 A，B 如 10.3.8，则

$\sigma_{r+s-\rho+\delta}([A,B]) = i\sum_j [\partial_{x_j}\sigma_r(A)\partial_{\xi_j}\sigma_s(B) - \partial_{\xi_j}\sigma_r(A)\partial_{x_j}\sigma_s(B)]$．

4．设 $P = \sum_{|\alpha| \leq r} a_\alpha D^\alpha$，$a_\alpha \in \mathbf{C}$，$Q = b(x)I$．求 $\sigma(PQ)$，$\sigma(QP)$．

§4 连续性与紧性定理

当一个 PsDO 作用于空间 $H_{loc}^s(\Omega)$ 或 $H_c^s(\Omega)$ $(s \in \mathbf{R})$ 时，

对其连续性与紧性能作出某些肯定结论。

10.4.1 定理 设 $A\in\Psi^{r}_{\rho,\delta}(\Omega)$. 则 $A\in L(H^{s}_{c}(\Omega),H^{s-r}_{loc}(\Omega))$；若$A$还是适的，则$A\in L(H^{s}_{c}(\Omega),H^{s-r}_{c}(\Omega))\cap L(H^{s}_{loc}(\Omega),H^{s-r}_{loc}(\Omega))$.

证 首先设A是适的，证 $A\in L(H^{s}_{c}(\Omega),H^{s-r}_{c}(\Omega))$(下标为 loc 的情况由对偶性得出). 为此只要证，对任给紧集 $K\subset\Omega$，$u\in\mathscr{D}(K)$，有$\|Au\|_{s-r}\leqslant\text{const}\|u\|_{s}$(1.9.3). 依§9.7(6)，这又归于证：

$$|(Au,v)|\leqslant\text{const}\|u\|_{s}\|v\|_{r-s}\quad(\forall v\in\mathscr{D}(\Omega)).\tag{1}$$

设 $A\mathscr{D}(K)\subset\mathscr{D}(K_1)$，$K_1\Subset K_2\subset\Omega$，$K_1,K_2$为紧集．取 $\tau\in\mathscr{D}(\Omega)$：$K_2\prec\tau$. 令 $q_\xi(x)=\sigma_A(x,\xi)\tau(x)(1+|\xi|^2)^{-r/2}$，则$q_\xi(x)$关于$(x,\xi)$属于$S^0_{\rho,\delta}$，由此不难看出，对任给$k>0$，存在$C_k>0$：

$$|\hat{q}_\xi(\eta)|\leqslant C_k(1+|\eta|^2)^{-k},\ \xi,\eta\in\mathbf{R}^n.$$

于是
$$\begin{aligned}|(Au,v)|&=\left|\iiint\sigma_A(x,\xi)\tau(x)v(x)\hat{u}(\xi)e^{ix\cdot\xi}dxd\xi\right|\\
&=\left|\iint(1+|\xi|^2)^{r/2}\hat{u}(\xi)(q_\xi v)^\wedge(-\xi)d\xi\right|\\
&=\left|\iiint(1+|\xi|^2)^{r/2}\hat{u}(\xi)\hat{q}_\xi(-\xi-\eta)\hat{v}(\eta)d\xi d\eta\right|\\
&\leqslant C_k\iint(1+|\xi|^2)^{r/2}(1+|\xi+\eta|^2)^{-k}|\hat{u}(\xi)\hat{v}(\eta)|d\xi d\eta\\
&\leqslant C_k\left(\iint(1+|\xi|^2)^{s}|\hat{u}(\xi)|^2(1+|\xi+\eta|^2)^{-k}d\xi d\eta\right)^{1/2}\\
&\quad\times\left(\iint(1+|\eta|^2)^{r-s}|\hat{v}(\eta)|^2\left(\frac{1+|\eta|^2}{1+|\xi|^2}\right)^{s-r}\right.\\
&\quad\left.\times(1+|\xi+\eta|^2)^{-k}d\xi d\eta\right)^{1/2}=:C_kI_k\mathscr{J}_k.\end{aligned}$$

取定充分大的k，利用 Peetre 不等式(§9.7(9))得：

$$J_k^2 \leqslant \text{const} \iint (1+|\eta|^2)^{r-s} |\hat{v}(\eta)|^2 (1+|\xi+\eta|^2)^{|s-r|-k} d\xi d\eta$$

$$\leqslant \text{const} \|v\|_{r-s}^2.$$

类似地有 $I_k \leqslant \text{const}\|u\|_s$，从而(1)得证。

其次对任给 $A \in \Psi_{\rho,\delta}^r(\Omega)$ 证 $A \in L(H_c^s(\Omega), H_{loc}^{s-r}(\Omega))$. 不妨设 $A \in \Psi^{-\infty}$. 要证者：任给紧集 $K \subset \Omega$，$u \in \mathscr{D}(K)$，$\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$，有 $\|\varphi Au\|_{s-r} \leqslant \text{const}\|u\|_s$. 这又归于证明：若 $A(x,y) \in \mathscr{D}(\Omega \times \Omega)$，则 $\|Au\|_{s-r} \leqslant \text{const}\|u\|_s (\forall u \in \mathscr{D}(\Omega))$. 任给 $u \in \mathscr{D}(\Omega)$，

$$(Au)^\wedge(\xi) = \iiint A(x,y)\hat{u}(\eta) e^{-ix\cdot\xi + iy\cdot\eta} dx dy d\eta$$

$$= \int \hat{A}(\xi, -\eta)\hat{u}(\eta) d\eta.$$

$\hat{A}(\xi,-\eta)$ 关于 (ξ,η) 速降，故对充分大的 $k>0$ 有：

$$|\hat{A}(\xi,-\eta)| \leqslant \text{const}[(1+|\xi|^2)(1+|\eta|^2)]^{-k},$$

由此容易推出所要不等式. □

推论 1 若 $A \in \Psi^{-\infty}(\Omega)$，则 $A\mathscr{E}'(\Omega) \subset \mathscr{E}(\Omega)$（参考 9.7.6）.

注 对适的 $A \in \Psi^{-\infty}(\Omega)$，不难推出 $A\mathscr{D}'(\Omega) \subset \mathscr{E}(\Omega)$.

推论 2 若 $A \in \Psi_{\rho,\delta}^0(\Omega)$，$K_A$ 有紧支集，则 $A \in L(L^2(\Omega))$.

事实上，设 $\text{supp} K_A \Subset K_1 \times K_2$，$K_1, K_2 \subset \Omega$ 为紧集，则 $A\mathscr{E}(\Omega) \subset \mathscr{D}(K_1)$，$u|K_2 = 0 \Rightarrow Au = 0$. 取 $\tau \in \mathscr{D}(\Omega)$：$K_2 \prec \tau$. 从 10.4.1 推出 $A \in L(L^2(K_2), L^2(K_1))$，从而对任给 $u \in \mathscr{D}(\Omega)$ 有：

$$\|Au\|_{L^2} = \|A(\tau u)\|_{L^2} \leqslant \text{const}\|\tau u\|_{L^2(K_2)} \leqslant \text{const}\|u\|_{L^2}.$$

下面考虑紧性. 首先结合 9.7.7 与 10.4.1 得出：

10.4.2 定理 若 $A \in \Psi_{\rho,\delta}^r(\Omega)$，$t < s - r$，$r, s, t \in \mathbf{R}$，则 $A: H_c^s(\Omega) \to H_{loc}^t(\Omega)$ 是紧算子；特别，若 $A \in \Psi^{-\infty}(\Omega)$，则对任何 $s, t \in \mathbf{R}$，$A: H_c^s(\Omega) \to H_{loc}^t(\Omega)$ 是紧算子.

为证基本的紧性定理10.4.4，需要以下引理.

10.4.3 引理　设 $A=A^*\in\Psi^0_{\rho,\delta}(\Omega)$，对任给紧集 $K\subset\Omega$，

$$\lim_{|\xi|\to\infty}\inf_{x\in K}\operatorname{Re}\sigma_A(x,\xi)>0, \tag{2}$$

则存在适的 $B\in\Psi^0_{\rho,\delta}(\Omega)$：$B^*B\equiv A(\bmod\Psi^{-\infty})$.

证　不妨设 A 是适的. 若有适的 $B_j\in\Psi^{j(\delta-\rho)}_{\rho,\delta}(\Omega)(j=0,1,\cdots)$，$D_j=B_0+\cdots+B_j$，使 $C_j=D_j^*D_j-A\in\Psi^{(j+1)(\delta-\rho)}_{\rho,\delta}$，则有适的 $B\in\Psi^0_{\rho,\delta}(\Omega)$，$B\equiv\operatorname{Op}b(\bmod\Psi^{-\infty})$，$b\sim\Sigma\sigma(B_j)$（10.3.6）. 于是对任何 j 有

$$\begin{aligned}B^*B&=(B-D_j)^*B+D_j^*(B-D_j)+D_j^*D_j\\&\equiv A(\bmod\Psi^{(j+1)(\delta-\rho)}_{\rho,\delta}),\end{aligned}$$

因此 $B^*B\equiv A(\bmod\Psi^{-\infty})$. 下面归纳地作出所需的 B_j.

首先定义 B_0. 取 Ω 上的单位分解 $\{\lambda_j\}$，设 $K_j=\operatorname{supp}\lambda_j$ 是紧集. 由(2)，存在 $t_1<t_2<\cdots$，使得

$$d_j=\inf_{x\in K_j,\,|\xi|>t_j}\operatorname{Re}\sigma_A(x,\xi)>0,\ j=1,2\cdots.$$

取 $\tau_j\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$，$B^n(0,t_j)\prec\tau_j\prec B^n(0,t_{j+1})(j=1,2,\cdots)$. 令

$$a=\sum_{j=1}^{\infty}[1-\tau_j(\xi)]^2\lambda_j(x)\operatorname{Re}\sigma_A(x,\xi),$$

$b_0=\sqrt{a}$（注意 $a\geqslant0$！）. 因 $\operatorname{Im}\sigma_A=\dfrac{1}{2i}(\sigma_{A^*}-\bar\sigma_A)\in S^{\delta-\rho}_{\rho,\delta}\subset S^0_{\rho,\delta}$（§3(9)），故 $\operatorname{Re}\sigma_A\in S^0_{\rho,\delta}$，由此易见 $a\in S^0_{\rho,\delta}$. 任给紧集 $K\subset\Omega$，仅有限个 K_j（设为 $K_1,\cdots,K_l$）与 K 相交. 当 $x\in K$，$|\xi|>t_{l+1}$ 时，

$$|a(x,\xi)|=\operatorname{Re}\sigma_A(x,\xi)\geqslant\min_{j\leqslant l}d_j>0. \tag{3}$$

不难归纳地得出：

$$\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta b_0=\sum\operatorname{const}a^{\frac{1}{2}-s}(\partial_x^{\alpha^1}\partial_\xi^{\beta^1}a)\cdots(\partial_x^{\alpha^s}\partial_\xi^{\beta^s}a), \tag{4}$$

其中 $s\leqslant|\alpha+\beta|$，重指标 α^j,β^j 满足 $|\alpha^1+\cdots+\alpha^s|=|\alpha|$，$|\beta^1+\cdots+\beta^s|=|\beta|$. (3)与(4)一起推出 $b_0\in S^0_{\rho,\delta}$. 取适的 B_0：$B_0\equiv$

$\mathrm{Op}b_0(\mathrm{mod}\Psi^{-\infty})$；令 $C_0=B_0^*B_0-A$，则 $C_0=C_0^*\in\Psi_{\rho,\delta}^0$，从而 $\mathrm{Im}\sigma(C_0)\in S_{\rho,\delta}^{\delta-\rho}$．由 §3(11)，

$$\mathrm{Re}\sigma(C_0)\equiv a-\mathrm{Re}\sigma_A(\mathrm{mod}S_{\rho,\delta}^{\delta-\rho}).$$

由 $a-\mathrm{Re}\sigma_A=\sum_j[\tau_j(\xi)-2]\tau_j(\xi)\lambda_j(x)\mathrm{Re}\sigma_A(x,\xi)\in S^{-\infty}$

推出 $\mathrm{Re}\sigma(C_0)\in S_{\rho,\delta}^{\delta-\rho}$，从而 $C_0\in\Psi_{\rho,\delta}^{\delta-\rho}$．

设已作出合于所求的 $B_0,\cdots,B_{k-1}(k\geqslant1)$．对大的 $|\xi|$ 令

$$b_k=\frac{1}{2b_0}\mathrm{Re}\sigma(C_{k-1})\sum_j[\tau_j(\xi)-1]\lambda_j(x),$$

扩张 b_k 为 $\Omega\times\mathrm{R}^n$ 上的 C^∞ 函数．直接看出 $b_k\in S_{\rho,\delta}^{k(\delta-\rho)}$．取适的 B_k：$B_k\equiv\mathrm{Op}b_k(\mathrm{mod}\Psi^{-\infty})$；记号 C_k,D_k 如前述．则

$$C_k\equiv C_{k-1}+B_k^*B_0+B_0^*B_k(\mathrm{mod}\Psi_{\rho,\delta}^{(k+1)(\delta-\rho)});$$

$$\mathrm{Re}\sigma(C_k)\equiv\mathrm{Re}\sigma(C_{k-1})+2b_0b_k(\mathrm{mod}S_{\rho,\delta}^{(k+1)(\delta-\rho)}).\quad(5)$$

因 $\mathrm{Re}\sigma(C_{k-1})+2b_0b_k=\mathrm{Re}\sigma(C_{k-1})\sum_j\lambda_j\otimes\tau_j\in S^{-\infty}$，

故(5)与 $C_k^*=C_k$ 及归纳假设一起推出 $C_k\in\Psi_{\rho,\delta}^{(k+1)(\delta-\rho)}$，因此所作的 B_k 符合预定要求． □

10.4.4 定理 设 $A\in\Psi_{\rho,\delta}^r(\Omega)$，对任给紧集 $K\subset\Omega$：

$$\lim_{|\xi|\to\infty}\sup_{x\in K}|\sigma_A(x,\xi)||\xi|^{-r}=0,\quad(6)$$

则 $A:H_c^s(\Omega)\to H_{loc}^{s-r}(\Omega)(s\in\mathrm{R})$是紧算子．

证 由 10.4.2，不妨设 A 是适的．以 A_s 记有象征$(1+|\xi|^2)^{s/2}$的适 PsDO（它与 9.7.4 中的 A_s 模 $\Psi^{-\infty}$ 等价），则直接看出 $A_sA_t\equiv A_{s+t}(\mathrm{mod}\Psi^{-\infty})$，$A_sA_{-s}\equiv I(\mathrm{mod}\Psi^{-\infty})$（此处及以后 I 都记单位算子）．令 $B=A_{s-r}AA_{-s}$，则 $A\equiv A_{r-s}B\cdot A_s(\mathrm{mod}\Psi^{-\infty})$，故只要证 $B:H_c^0(\Omega)\to H_c^0(\Omega)$是紧算子．为此又不妨一开始就设 $s=r=0$，对任给紧集 $K,K'\subset\Omega$，$K\subsetneqq K'$，证 $A:L^2(K)\to L^2(K')$为紧算子．若能求得$A_k\in\Psi_{\rho,\delta}^0$：$A-A_k\in\Psi^{-\infty}$，在 $L(L^2(K),L^2(K'))$中 $A_k\to0$，则所要结论从 1.6.7 与 10.4.2推出．下面作出所需的A_k．不妨设$\mathrm{supp}K_A\subset$

$K_1' \times K_1$，$K_1' \times K_1$ 是 $K' \times K$ 在 $\Omega \times \Omega$ 内的紧邻域.

取 $\tau \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$，$\tau \geqslant 0$，$\int \tau(x)dx = 1$，可设 $0 \leqslant \hat{\tau} \leqslant 1$（否则以 $\tau * \check{\tau}$ 代 τ）．令 $\tau_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\tau(x/\varepsilon)$ $(0<\varepsilon<1)$．任给 $u \in \mathscr{D}(\Omega)$，令 $u_\varepsilon = u - \tau_\varepsilon * u$，$A_\varepsilon u = Au_\varepsilon$，则 $R_\varepsilon = A - A_\varepsilon \in \Psi^{-\infty}$．下面取定 $u \in \mathscr{D}(K)$，当 ε 充分小时 $u_\varepsilon \in \mathscr{D}(K_1)$，依 L^2 范数有

$$\|u_\varepsilon\| = \|\hat{u}_\varepsilon\| = \|(1-\hat{\tau}_\varepsilon)\hat{u}\| \leqslant \|\hat{u}\| = \|u\|.$$

可设 $\operatorname{supp}\sigma_A \subset K_1' \times \mathbf{R}^n$，因此(6)（取 $\tau=0$）推出

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \sup_{x\in\Omega} |\sigma_A(x,\xi)| = 0.$$

令 $\beta = (k+1)^{-1}$，$P = \beta^2 I - A^* A$，则 $P = P^* \in \Psi^0_{\rho,\delta}$，任给紧集 $L \subset \Omega$：

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \inf_{x\in L} \operatorname{Re}\sigma_P(x,\xi) \geqslant \beta^2 - \lim_{|\xi|\to\infty} \sup_{x\in\Omega} |\sigma_A(x,\xi)|^2 > 0.$$

依 10.4.3，存在适的 $B \in \Psi^0_{\rho,\delta}$：$R = R^*B - P \in \Psi^{-\infty}$．于是

$$\begin{aligned}
\|A_\varepsilon u\|^2 = \|Au_\varepsilon\|^2 &= (A^*Au_\varepsilon, u_\varepsilon) \\
&= ((\beta^2 I + R - B^*B)u_\varepsilon, u_\varepsilon) \\
&\leqslant \beta^2\|u\|^2 + |(Ru_\varepsilon, u_\varepsilon)|,
\end{aligned} \tag{7}$$

其中范数都是 L^2 范数．不妨设 $R(x,y) \in \mathscr{D}(K_1 \times K_1)$．因

$$(Ru_\varepsilon)(x) = \int R_\varepsilon(x,y)u(y)dy,$$

其中
$$R_\varepsilon(x,y) = \int [R(x,y) - R(x, y+\varepsilon\eta)]\tau(\eta)d\eta, \tag{8}$$

故
$$|(Ru_\varepsilon, u_\varepsilon)| \leqslant \|R_\varepsilon\|\|u\|\|u_\varepsilon\| \leqslant \|R_\varepsilon\|\|u\|^2, \tag{9}$$

$\|R_\varepsilon\|$ 是 $L^2(\Omega\times\Omega)$ 范数．由(8)看出 $\|R_\varepsilon\| \to 0$ $(\varepsilon\to 0)$．(7)与(9)表明，只要取充分小的 ε，令 $A_k = A_\varepsilon$，就有 $\|A_k u\| \leqslant \frac{1}{k}\|u\|$，这样的 A_k $(k=1,2,\cdots)$ 即合预定要求． □

推论 若 $A\in\Psi^0_{\rho,\delta}(\Omega)$满足(6)(对于 $r=0$)，K_A有紧支集，则 $A: L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$是紧算子.

参考文献：[11]，[18]，[41]，[60]，[76]，[79].

习 题

若 $A(x,y)\in L^2_{loc}(\Omega\times\Omega)$，则以 $A(x,y)$ 为核的积分算子 $A: L^2_c(\Omega)\to L^2_{loc}(\Omega)$是紧算子.

§5 流形上的拟微分算子

首先考虑在变量代换下 PsDO 的变化. 以下设 $1-\rho\leqslant\delta<\rho$. 任给 $h\in \mathrm{Diff}(\Omega,\Omega')$，$x'=h(x)$，$A=\mathrm{Op}a\in\Psi^r_{\rho,\delta}(\Omega)$，令

$$A_h: \mathscr{D}(\Omega')\to\mathscr{E}(\Omega'),\quad u\longmapsto h_*Ah^*u, \tag{1}$$

即

$$\begin{aligned}(A_hu)(x')&=\iint a(x,y,\xi)u(h(y))e^{i(x-y)\cdot\xi}dyd\xi\\&=\iint a(x,y,\xi)u(y')|J(h_1)|\exp(i(h_1(x')-h_1(y'))\cdot\xi)dy'd\xi,\end{aligned} \tag{2}$$

其中 $h_1=h^{-1}$，$y'=h(y)$. A_h 是以 $\varphi=(h_1(x')-h_1(y'))\cdot\xi$ 为位相的FIO. 下面的一般定理将推出 A_h 实际上是一个 PsDO.

10.5.1 定理 设 A是以 $a\in S^r_{\rho,\delta}(\Omega,\Omega)$ 为振幅，$\varphi(x,y)\cdot\xi$ 为位相的 FIO，$\varphi\in C^\infty(\Omega\times\Omega,\mathrm{R}^n)$，$\varphi(x,y)=0\Longleftrightarrow x=y$. 则 $A\in\Psi^r_{\rho,\delta}(\Omega)$.

证 取 $\Delta\subset\Omega\times\Omega$ 的充分小的邻域 W，W_1，使 $W_1\Subset W$. 取 $\Omega\times\Omega$ 上从属于$\{W,W_1^c\}$的单位分解 $\{\lambda_1,\lambda_2\}$，则依 $a=\lambda_1a+\lambda_2a$ 得相应的分解 $A=B+R$. 易见 $R\in\Psi^{-\infty}$，故只需证 $B\in\Psi^r_{\rho,\delta}$，为此又只需在 $\mathrm{supp}a\subset W\times\mathrm{R}^n$ 的假定下证 $A\in\Psi^r_{\rho,\delta}$. 从 $\varphi(x,x)=0$ 推出$(\varphi'_x+\varphi'_y)|\Delta=0$，故当$(x,y)$邻近$\Delta$

时 $\varphi'_x(x,y)\in \mathrm{GL}(n)$. 注意到 $\varphi(y,y)=0$，依 Taylor 公式有

$$\varphi(x,y)=\int_0^1(x-y)\varphi'_x(y+t(x-y),y)dt=(x-y)\cdot Q(x,y),$$

$x-y$ 看作行向量. 可设 $Q\in C^\infty(W,\mathrm{GL}(n))$. 令 $\eta=Q(x,y)\cdot\xi$，则

$$\begin{aligned}(Au)(x)&=\iint a(x,y,\xi)u(y)e^{i\varphi(x,y)\cdot\xi}dyd\xi\\&=\iint a(x,y,\xi)\,|\det\psi|\,u(y)e^{i(x-y)\cdot\eta}dyd\eta,\end{aligned}$$

其中 $\psi=Q^{-1}=(\psi_{kl})$. 令 $z=(x,y)$，下面证 $b(z,\eta)=a(z,\psi(z)\eta)\in S^r_{\rho,\delta}(W\times\mathrm{R}^n)$. 求出

$$\frac{\partial b}{\partial z_i}=\frac{\partial a(z,\xi)}{\partial z_i}+\sum_{k,l}\frac{\partial a(z,\xi)}{\partial\xi_k}\frac{\partial\psi_{kl}}{\partial z_i}\eta_l;$$

$$\frac{\partial b}{\partial\eta_j}=\sum_k\frac{\partial a(z,\xi)}{\partial\xi_k}\psi_{kj},$$

其中 $\xi=\psi(z)\eta$. 利用以上两式不难归纳地得出：$\partial_z^\alpha\partial_\eta^\beta b=\sum\tau\eta^\gamma\partial_z^\lambda\partial_\xi^\mu a$，其中 $\tau\in C^\infty(W)$，重指标 γ,λ,μ 满足

$$|\gamma|+|\lambda|\leqslant|\alpha|,\quad|\gamma|+|\beta|\leqslant|\mu|. \tag{3}$$

当 z 属某个紧集 $K\subset W$ 时，利用(3)及 $1-\rho\leqslant\delta$ 得：

$$|\tau\eta^\gamma\partial_z^\lambda\partial_\xi^\mu a|\leqslant\mathrm{const}(1+|\eta|)^{r-\rho|\beta|+\delta|\alpha|},$$

由此推出 $b\in S^r_{\rho,\delta}$. □

10.5.2 定理 设 $A\in\Psi^r_{\rho,\delta}(\Omega)$，$A_h$ 由(1)给定. 则 $A_h\in\Psi^r_{\rho,\delta}(\Omega')$；若 A 是适的，则 A_h 亦是，且

$$\sigma(A_h)(x',\eta)\sim\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\sigma_A(x,(h'(x))^t\eta)D_y^\alpha e^{ik\cdot\eta}|_{y=x}, \tag{4}$$

其中 $x'=h(x)$，$k=h(y)-h(x)-h'(x)(y-x)$.

证 只需证(4). 不难归纳地得出：

$$D_y^\alpha e^{ik\cdot\eta}=\sum\mathrm{const}(\partial_y^{\beta^1}k)\cdot\eta\cdots(\partial_y^{\beta^r}k)\cdot\eta e^{ik\cdot\eta},$$

其中重指标 $\beta^1,\cdots,\beta^s$ 满足 $|\beta^1+\cdots+\beta^s|=|\alpha|$，故 $|\beta^1|,\cdots,|\beta^s|$ 中至多 $|\alpha|/2$ 个 $\geqslant 2$，因而 $D_y^\alpha e^{ik\cdot\eta}|_{y=x}$ 是 η 的次数 $\leqslant |\alpha|/2$ 的多项式. 从 $\sigma_A\in S^r_{\rho,\delta}$ 推出 $\partial_\xi^\alpha\sigma_A\in S^{r-\rho|\alpha|}_{\rho,\delta}$，因此 (4)右端之通项属于 $S^{r-\left(\rho-\frac{1}{2}\right)|\alpha|}_{\rho,\delta}$. 从 $1-\rho\leqslant\delta<\rho$ 推出 $\rho>1/2$，故 $|\alpha|\to\infty$ 时 $r-\left(\rho-\dfrac{1}{2}\right)|\alpha|\to-\infty$，(4) 右端是一渐近展开式.

设 $u\in\mathscr{D}(\Omega')$. 依(2)及 10.5.1 有（用前面的记号）：

$$(A_h u)(x')=\iint\sigma_A(x,\xi)\,|J(h_1)|\,u(y')e^{i(x-y)\cdot\xi}dy'd\xi$$

$$=\iint G_1(x',y')\sigma_A(x,\xi)\,u(y')e^{i(x'-y')\cdot\eta}dy'd\eta,$$

其中 $x'=h(x)$，$y'=h(y)$，$\xi=\psi\eta$，$G_1=|J(h_1)\det\psi|$. 依§3(5)，

$$\sigma(A_h)(x',\eta)\sim\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\partial_\eta^\alpha D_{y'}^\alpha[G_1(x',y')\sigma_A(x,\xi)]|_{y'=x'}$$

$$=\sum_\alpha\sum_{\beta\leqslant\alpha}\frac{1}{(\alpha-\beta)!\beta!}D_{y'}^{\alpha-\beta}(\cdots)\eta^\beta\partial_\xi^{\alpha+\beta}\sigma_A(x,\xi)|_{y'=x'}$$

$$=\sum_\alpha G_2^\alpha(x',\eta)\partial_\xi^\alpha\sigma_A(x,\psi(x',x')\eta),\tag{5}$$

其中 G_1 及 G_2^α 与 A 无关，G_2^α 关于 η 是次数 $\leqslant|\alpha|/2$ 的多项式. 考察 10.5.1 之证明看出 $\psi(x',x')=(h'(x))^t$. 为确定与 A 无关的 G_2^α，取 $A=P(x,D)=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant r}a_\alpha(x)D^\alpha$，则 (10.3.4)

$$\sigma(A_h)(x',\eta)=e^{-ix'\cdot\eta}(Ae^{ih(y)\cdot\eta})(x)$$

$$=e^{-ix'\cdot\eta}P(y,D_y)\exp[i(h(x)+h'(x)(y-x)+k(x,y))\cdot\eta]|_{y=x}$$

$$=P(y,D_y)[e^{i(h'(x)(y-x))\cdot\eta}e^{ik(x,y)\cdot\eta}]|_{y=x}$$

$$=\sum_{|\alpha|\leqslant r}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha P(x,(h'(x))^t\eta)D_y^\alpha e^{ik\cdot\eta}|_{y=x},\tag{6}$$

上面用了“广义 Leibniz 公式”（读者不难自行验证它）：

$$P(y,D)(uv)=\sum_{|\alpha|\leqslant r}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha P(y,D)vD^\alpha v.$$

将(5)与(6)对照确定 G_2^α，从而得出(4). □

(4)右端对应 $|\alpha|=0,1$ 的项分别为 $\sigma_A(x,(h'(x))^t\eta)$ 与 0，故

$$\sigma(A_h)(x',\eta)-\sigma_A(x,(h'(x))^t\eta)\in S_{\rho,\delta}^{r-2\rho+1};$$
$$\sigma_r(A_h)(x',\eta)=\sigma_r(A)(x,(h'(x))^t\eta). \tag{7}$$

10.5.3 定义 设 $A\in L(\mathscr{D}(M),\mathscr{E}(M))$（$M$ 及后面的 E,F 都依本章开头之约定）. 若对 M 的任何图 (U,φ)，A 的转移 $A_\varphi=\varphi_*A\varphi^*$ 属于 $\Psi_{\rho,\delta}^r(\varphi U)(1-\rho\leqslant\delta<\rho)$，则称 A 为 M 上的 $\Psi_{\rho,\delta}^r$ 类 PsDO；当每个 A_φ 为适 PsDO 时称 A 为适 PsDO. 类似地，若 $a\in C^\infty(T^*M)$，对 M 的每个图 (U,φ)，依同构 $T^*U\cong\varphi U\times\mathrm{R}^n$ 使 a 对应 $a_\varphi\in S_{\rho,\delta}^r(\varphi U)$，则说 a 是 M 上的 $S_{\rho,\delta}^r$ 类象征. 记号 $\Psi_{\rho,\delta}^r(\Omega)$，$\Psi_{\rho,\delta}(\Omega)$，$S_{\rho,\delta}^r(\Omega)$ 等自然地推广到以 M 代 Ω 的情况. 若 $A\in\Psi_{\rho,\delta}^r(M)$，$a\in S_{\rho,\delta}^r(M)$，对 M 的任给图 (U,φ)，a_φ 是 A_φ 的主象征，则称 a 为 A 的主象征，记作 $a=\sigma_r(A)$.

约定 凡论及流形上的 PsDO 时总假定 $1-\rho\leqslant\delta<\rho\leqslant1$.

基于 10.5.2，10.5.3 中关于 PsDO、适 PsDO 及主象征的条件（参考(7)）只要对某个图册进行验证就成了.

流形上的 PsDO 可依以下方式局部地给定.

10.5.4 定理 设 $\{(U_i,\varphi_i)\}$ 是 M 的一个局部有限图册，每个 U_i 相对紧；$A_i\in\Psi_{\rho,\delta}^r(U_i)$，在 $U_i\cap U_j$ 上 $A_i\equiv A_j(\mathrm{mod}\Psi^{-\infty})$（下面以“$\equiv$”记“$\equiv(\mathrm{mod}\Psi^{-\infty})$”）. 则存在 $A\in\Psi_{\rho,\delta}^r(M)$，使得 $\forall i$：$A|U_i\equiv A_i$；在 $\mathrm{mod}\Psi^{-\infty}$ 的意义下 A 是唯一的.

证 取 M 上从属于 $\{U_i\}$ 的单位分解 $\{\lambda_i\}$；对每个 i 取 $\tau_i\in\mathscr{D}(U_i)$，$\mathrm{supp}\lambda_i\prec\tau_i$. 定义 $A=\sum\tau_iA_i\lambda_i$，即

$$Au=\sum_i\tau_iA_i(\lambda_iu),\quad u\in\mathscr{D}(M), \tag{8}$$

则 $A\in L(\mathscr{D}(M),\mathscr{E}(M))$. 取定下标 i, $\forall j$: $(\tau_j-1)A_i\lambda_j\in\Psi^{-\infty}$（它相当于$\Omega$上振幅在$\Delta$邻近为零的 PsDO），因此

$$A|U_i=\sum_j A_i\lambda_j+\sum_j(\tau_j-1)A_i\lambda_j=A_i,$$

于是得出所要结论. □

今后将多次使用 10.5.4 中取定的$\{U_i,\varphi_i,\lambda_i,\tau_i\}$.

关于 $\mathbb{R}^n$ 上的 PsDO 的各种概念与结论都可推广于流形上的 PsDO. 下面仅作一简要讨论. 首先,对每个$A\in\Psi^r_{\rho,\delta}(M)$，转置 A^t 与相伴 A^* 的意义如同§2 中一样，只需用测度 $d\mu$ 替换 dx. 其次有

10.5.5 定理 每个 $A\in\Psi^r_{\rho,\delta}(M)$可延拓为连续线性算子 $\mathscr{E}'(M)\to\mathscr{D}'(M)$，且 $\forall u\in\mathscr{E}'(M)$: singsupp$Au\subset$singsupp$u$（参照10.2.5).

注 通过标准的嵌入$u\mapsto ud\mu$,可以认为$\mathscr{E}(M)\subset\mathscr{D}'(M)$, $\mathscr{D}(M)\subset\mathscr{E}'(M)$. 后面总作此理解（参考§9.9）.

证 如同 10.2.5 中一样，从 $A^t\in L(\mathscr{D}(M),\mathscr{E}(M))$推出 $A\in L(\mathscr{E}'(M),\mathscr{D}'(M))$. 设 $u\in\mathscr{E}'(M)$, u 在 $x_0\in M$ 邻近为 C^∞ 函数，今证 Au 亦然. 对每个 i，取 x_0 的邻域 V_i 与 suppλ_iu 的邻域 W_i，使$W_i\Subset U_i$, $\lambda_iu|V_i\in C^\infty$，且 $O_i=V_i\cup W_i$ 可通过一微分同胚 ψ_i 映到 $\mathbb{R}^n$ 的开子集上，$\psi_i|W_i=\varphi_i|W_i$. 则 $A(\lambda_iu|O_i)=\psi_i^*A_{\psi_i}\psi_{i*}(\lambda_iu|O_i)$ 在 V_i 上是 C^∞ 的. 因 $u=\sum\lambda_iu$ 实际上为有限和，故得所要证. □

10.5.6 定理 若$A\in\Psi^r_{\rho,\delta}(M)$是适的，则$A\in L(\mathscr{D}(M))\cap L(\mathscr{D}'(M))$,singsupp$Au\subset$singsupp$u$($u\in\mathscr{D}(M)$)；每个$A\in\Psi^r_{\rho,\delta}(M)$与某个适 PsDO 模 $\Psi^{-\infty}$ 等价(参照10.3.2,10.3.3).

证 只证后一结论，设$\{\lambda_i\}$如 10.5.4，令

$$B=\sum\{\lambda_iA\lambda_j|\text{supp}\lambda_i\cap\text{supp}\lambda_j\neq\varnothing\},$$

则B是适 PsDO（参考 10.3.2），而（参照 10.5.4 之证明）

$$A-B=\sum\{\lambda_iA\lambda_j|\ \text{supp}\lambda_i\cap\text{supp}\lambda_j=\varnothing\}\in\Psi^{-\infty}.$$ □

任给 $A\in\Psi^r_{\rho,\delta}(M)$，$A_{\varphi_i}$ 的主象征诱导出一个 $a_i\in S^r_{\rho,\delta}(U_i)$，$\{U_i,\varphi_i,\lambda_i\}$ 如 10.5.4. (7)推出在 $U_i\cap U_j$ 上 $a_i=a_j(\mathrm{mod}\, S^{r_1}_{\rho,\delta})$，$r_1=r-2\rho+1$. 于是不难验证 $\sum\lambda_i a_i$ 是 A 的主象征. 如同 §3 中一样，我们有同构：

$$\sigma_r:\Psi^r_{\rho,\delta}(M)/\Psi^{r_1}_{\rho,\delta}(M)\cong S^r_{\rho,\delta}(M)/S^{r_1}_{\rho,\delta}(M).$$

10.5.7 定理 设 $A\in\Psi^r_{\rho,\delta}(M)$ 与 $B\in\Psi^s_{\rho,\delta}(M)$ 是适的，则 A^t，A^*，BA 为适 PsDO，其主象征满足 §3(7)(9)(11).

证 只考虑 BA. 任给 $x\in M$，取 x 的小邻域 U 及 $\lambda,\tau\in\mathscr{D}(U)$，使 $\mathrm{supp}\lambda\prec\tau$，则

$$\lambda BA=\lambda B\tau A+\lambda B(1-\tau)A=(\lambda B)(\tau A).$$

将 §3(11)用到$(\lambda B)(\tau A)$（在局部使用是不成问题的）得

$$\lambda(x)\sigma_{r+s}(BA)(x,\xi)=\lambda(x)\sigma_s(B)(x,\xi)\sigma_r(A)(x,\xi),$$

由此推出 $\sigma_{r+s}(BA)=\sigma_s(B)\sigma_r(A)$. □

为了将 PsDO 概念进一步推广到向量丛，需要“矩阵值 PsDO”概念. 设 $A_{ij}\in\Psi^r_{\rho,\delta}(\Omega)(1\leqslant i\leqslant p,\ 1\leqslant j\leqslant m)$，令

$$Au=(\sum A_{1j}u_j,\cdots,\sum A_{pj}u_j),\quad u=(u_j),$$

则 $A\in L(\mathscr{D}(\Omega,m),\ \mathscr{E}(\Omega,p))$，称 A 为 $\Psi^r_{\rho,\delta}$ 类的 PsDO，写作 $A=(A_{ij})\in\Psi^r_{\rho,\delta}(\Omega,M_{pm})$；若 $A_{ij}=\mathrm{Op}a_{ij}$，则可认为 $A=\mathrm{Op}(a_{ij})$.

10.5.8 定义 设 $A\in L(\mathscr{D}(E),\ \mathscr{E}(F))$. 任给 M 的图 (U,h) 及 E，F 的向量丛图(U,φ)，(U,ψ)，A 诱导出算子 $A_{h\varphi\psi}:\mathscr{D}(\varphi U,m)\to\mathscr{E}(\varphi U,p)$（参考 §1(1)），若 $A_{h\varphi\psi}$ 恒属于 $\Psi^r_{\rho,\delta}$，则称 A 为 $\Psi^r_{\rho,\delta}$ 类的 PsDO，记作 $A\in\Psi^r_{\rho,\delta}(E,F)$.

前述的关于 PsDO 的种种概念与结果在向量丛上都有适当的推广，兹不细述. 我们只指出，$A\in\Psi^r_{\rho,\delta}(E,F)$ 的主象征 $\sigma_r(A)$ 是一向量丛同态：$\pi^*E\to\pi^*F$（记号依 10.1.3）. 当 A 是微分算子时，$\sigma_r(A)$ 与 §1 中的规定一致.

参考文献：[11]，[18]，[41]，[60]，[67]，[76]，[79]．

习　题

1．$P(x,D)(uv)=\sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha P(x,D)uD^\alpha v$，$P(x,\xi)$是$\xi$的多项式．

2．任给$u\in\mathscr{D}(\mathrm{T})$，令$P^+u=\sum_0^\infty\hat{u}(k)e^{ikx}$（$\hat{u}(k)$依 8.4.1），则$P^+\in\Psi^0(\mathrm{T})(\mathrm{T}=S^1)$．

§6　流形上的 Sobolev 空间

如易想象到的，空间$H^s_{loc}(\Omega)(s\in\mathbf{R})$到$H^s_{loc}(M)$的过渡基于$H^s_{loc}(\Omega)$在变量代换下的“不变性”．

10.6.1 引理　$H^s_c(\Omega)=\{u\in\mathscr{E}'(\Omega)|\forall A\in\Psi^s(\Omega):Au\in L^2_{loc}(\Omega)\}$．

证　设$u\in\mathscr{E}'(\Omega)$．若$u\in H^s_c(\Omega)$，$A\in\Psi^s(\Omega)$，则10.4.1推出$Au\in H^0_{loc}(\Omega)=L^2_{loc}(\Omega)$．反之，若$\forall A\in\Psi^s(\Omega)$：$Au\in L^2_{loc}(\Omega)$，$\Lambda_s$如 10.4.4 之证明中所述，则依 10.4.1 有

$$
\begin{aligned}
u&=\Lambda_{-s}\Lambda_s u+(I-\Lambda_{-s}\Lambda_s)u\\
&\in\Lambda_{-s}H^0_{loc}(\Omega)+C^\infty(\Omega)\subset H^s_{loc}(\Omega).
\end{aligned}
$$

□

10.6.2 定理　设$\varphi\in\mathrm{Diff}(\Omega,\Omega')$，则$\varphi$导出线性同构$\varphi_*:H^s_c(\Omega)\cong H^s_c(\Omega')$与$\varphi_*:H^s_{loc}(\Omega)\cong H^s_{loc}(\Omega')$．

证　只考虑第一个同构（通过取对偶即过渡到第二个同构）．任给$u\in\mathscr{E}'(\Omega)$，依 10.6.1 有：

$$
\begin{aligned}
u\in H^s_c(\Omega)&\Longleftrightarrow\forall A\in\Psi^s(\Omega):\ Au=\varphi^*A_\varphi\varphi_*u\in L^2_{loc}(\Omega)\\
&\Longleftrightarrow\forall B\in\Psi^s(\Omega'):\ B\varphi_*u\in L^2_{loc}(\Omega')\\
&\Longleftrightarrow\varphi_*u\in H^s_c(\Omega').
\end{aligned}
$$

□

10.6.3 定义　空间$H^s_{loc}(M)$由如下的$u\in\mathscr{D}'(M)$组成：对M上的任给图(U,φ)，有$\varphi_*(u|U)\in H^s_{loc}(\varphi U)$．任给紧集$K\subset M$，令$H^s(K)=\{u\in H^s_{loc}(M)|\ \mathrm{supp}u\subset K\}$；$H^s_c(M)=$

$\mathscr{E}'(M)\cap H^s_{loc}(M)$；若$M$为紧流形，则令$H^s(M)=H^s_c(M)=H^s_{loc}(M)$.

由10.6.2，10.6.3中关于$u\in H^s_{loc}(M)$的条件只需对M的某个图册验证就行了（参照10.5.3）. 在$H^s_{loc}(M)$中可用两种(实质上等价的)方式导入F-空间结构. 任给M的图(U,φ)，同构$\varphi_*: H^s_{loc}(U)\to H^s_{loc}(\varphi U)$在$H^s_{loc}(U)$中诱导出一个LCS拓扑；在$H^s_{loc}(M)$中取最小的LCS拓扑，使得每个"限制映射"$H^s_{loc}(M)\to H^s_{loc}(U)$，$u\mapsto u|U$连续（这相当于要求$H^s_{loc}(M)$中的序列收敛是"局部$H^s$-收敛"，参照§9.9中空间$\mathscr{E}(E)$的定义）. 其次是整体的导入法：设$\{U_i,\varphi_i,\lambda_i\}$如10.5.4，任给$u\in H^s_{loc}(M)$，$\tau\in\mathscr{D}(M)$，令

$$\|u\|_\tau=\left(\sum_i\|\varphi_{i*}(\lambda_i\tau u)\|_s^2\right)^{1/2}, \qquad (1)$$

则半范族$\{\|u\|_\tau|\tau\in\mathscr{D}(M)\}$定义$H^s_{loc}(M)$为一个$F$-空间（参照§9.7中$H^s_{loc}(\Omega)$的定义），其拓扑与$\{U_i,\varphi_i,\lambda_i\}$的选取无关. 在$H^s_c(M)$中采用自然的归纳极限拓扑. 若$M$是紧的，则$H^s(M)$具有一个Hilbert空间结构.

对$H^s_c(M)$与$H^s_{loc}(M)$亦可给出类似于10.6.1的整体刻划. 设Λ_s如10.4.4，将Λ_s通过φ_i转移到U_i上后记作A_i，依10.5.4，存在适的$A\in\Psi^s(M)$：$A|U_i=A_i(\mathrm{mod}\Psi^{-\infty})$，不妨仍将$A$记作$\Lambda_s$. 易验证如此定义的$\Lambda_s$亦满足$\Lambda_{s+t}=\Lambda_s\Lambda_t(\mathrm{mod}\Psi^{-\infty})$，$\Lambda_{-s}\Lambda_s=I(\mathrm{mod}\Psi^{-\infty})$（可见$\Lambda_s$是椭圆算子，$\Lambda_{-s}$是$\Lambda_s$的拟逆，详见下节）. 任给$u\in H^s_{loc}(M)$，从$\Lambda_s$的构成及10.6.1推出$\Lambda_s u\in L^2_{loc}(M)$. 反之，若$u\in\mathscr{D}'(M)$，$\Lambda_s u\in L^2_{loc}(M)$，则

$$\begin{aligned}u&=\Lambda_{-s}\Lambda_s u+(I-\Lambda_{-s}\Lambda_s)u\\&\in\Lambda_{-s}L^2_{loc}(M)+C^\infty(M)\subset H^s_{loc}(M).\end{aligned}$$

故有 $$H^s_{loc}(M)=\{u\in\mathscr{D}'(M)|\,\Lambda_s u\in L^2_{loc}(M)\}. \qquad (2)$$

结合(2)与10.6.1看出：

$$H_c^s(M)=\{u\in\mathscr{E}'(M)\mid \forall A\in\Psi^s(M):\ Au\in L^2_{loc}(M)\}.\tag{3}$$

注 Sobolev 空间与 PsDO 的联系是很自然的，事实上，§9.7(3)可写成：$H^s=\{u\in\mathscr{S}'\mid\Lambda_s u\in L^2\}$.

进而可将 Sobolev 空间概念拓广到向量丛上而得到空间 $H^s_{loc}(E)$ 与 $H^s_c(E)$. 如同 $H^s_{loc}(M)$ 一样有两种导入法. 其一类似于 10.6.3，只需将 10.6.3 中的 $H^s_{loc}(\varphi U)$ 换成"向量值分布的" $H^s_{loc}(\varphi U,m)$，而将 §9.7 的内容扩张到向量值范畴是不成问题的. 另一个是"整体的"导入法：首先定义算子 $\Lambda_s\in\Psi^s(E,E)$（与 $\Lambda_s\in\Psi^s(M)$ 的定义几乎一样），然后仿照(2)定义

$$H^s_{loc}(E)=\{u\in\mathscr{D}'(E)\mid\Lambda_s u\in L^2_{loc}(E)\};\tag{4}$$

$$H^s_c(E)=\mathscr{E}'(E)\cap H^s_{loc}(E);$$

$$H^s(K,E)=\{u\in H^s_{loc}(E)\mid\operatorname{supp}u\subset K\},$$

其中 $K\subset M$. 当 M 是紧流形时，令 $H^s(E)=H^s_{loc}(E)=H^s_c(E)$. 当要明确指出底流形 M 时，也用记号 $H^s_{loc}(M,E)$，$H^s_c(M,E)$. $H^s_{loc}(E)$ 中的 F-空间结构及 $H^s_c(E)$ 中的 LF 空间结构的定义是明显的，其细节不再详述.

关于 Sobolev 空间的几个基本定理可推广到流形上. 首先，10.4.1现在推广成

10.6.4 定理 设 $A\in\Psi^r_{\rho,\delta}(E,F)$. 则 $A\in L(H^s_c(E),H^{s-r}_{loc}(F))$；若 A 是适的，则 $A\in L(H^s_c(E),H^{s-r}_c(F))\cap L(H^s_{loc}(E),H^{s-r}_{loc}(F))$. 特别，若 $A\in\Psi^0_{\rho,\delta}(E,F)$，$M$ 是紧的，则 $A\in L(L^2(E),L^2(F))$（参照 10.4.1 推论 2）.

证明的基本想法是将问题"局部化"，$A=\sum\tau_i A\lambda_i(\operatorname{mod}\cdot\Psi^{-\infty})$（$\tau_i,\lambda_i$ 如 10.5.4），而对每一项 $\tau_i A\lambda_i$ 可以运用 10.4.1（实际上是用 10.4.1 在"向量值"形式下的推广，这种推广是不困难的. 下面引用 9.7.5—9.7.7 时亦作此理解）. 我们不再写出证明细节.

其次推广关于紧性的 9.7.7 与 10.4.2.

10.6.5 定理 设 $r,s,t\in\mathbf{R}$. (i) 若 $s<r$, 则包含映射 $H_c^r(E)\subset H_c^s(E)$ 与 $H_{loc}^r(E)\subset H_{loc}^s(E)$ 皆为紧算子; (ii) 若 $A\in\Psi_{\rho,\delta}^r(E,F)$, $t<s-r$, 则 $A:H_c^s(E)\to H_{loc}^t(F)$ 是紧算子; 当 $A\in\Psi^{-\infty}(E,F)$ 时对任给 $s,t\in\mathbf{R}$, $A:H_c^s(E)\to H_{loc}^t(F)$ 是紧算子.

证 类似于 10.4.2, (ii) 可从 (i) 与 10.6.4 推出. 对于 (i), 如同 9.7.7 一样, 只需证包含映射 $H^r(K,E)\subset H^s(K,E)$是紧算子, $K\subset M$是任一紧集, $s<r$. 任取有界序列$\{u_k\}\subset H^r(K,E)$. 设$K\subset\bigcup_1^q U_j$ (U_j 如 10.5.4), 则对每个 $j\leqslant q$, 由9.7.7可得出$\{u_k|U_j\}$在$H_{loc}^s(U_j,E)$中的收敛子列. 于是以显然的方式得出$\{u_k\}$在$H^s(K,E)$中的收敛子列. □

最后是极重要的 9.7.5 的推广.

10.6.6 嵌入定理 若 $s>\frac{n}{2}+r$, $s\in\mathbf{R}$, $r\in\mathbf{N}$, 则有连续的包含映射$H_{loc}^s(E)\subset\mathscr{E}^r(E)$.

证 直接从9.7.5推出$H_{loc}^s(E)\subset\mathscr{E}^r(E)$. 今设在$H_{loc}^s(E)$中 $u_k\to 0(k\to\infty)$, 则在$H_{loc}^s(U_i,E)$中 $\lambda_i u_k\to 0(k\to\infty, U_i,\lambda_i$ 如 10.5.4), 于是从 9.7.5 推出在$\mathscr{E}^r(U_i,E)$中 $\lambda_i u_k\to 0$, 而这推出在$\mathscr{E}^r(E)$中 $u_k\to 0$. □

推论 $\mathscr{E}(E)=\bigcap_{s\in\mathbf{R}}H_{loc}^s(E)$; $\mathscr{D}(E)=\bigcap_{s\in\mathbf{R}}H_c^s(E)$.

这恰好对应 9.7.6 之 1°. 不难看出$\mathscr{E}'(E)=\bigcup_{s\in\mathbf{R}}H_c^s(E)$, 于是从以上推论及10.6.4推出: 若 $A\in\Psi^{-\infty}(E,F)$, 则$A\mathscr{E}'(E)\subset\mathscr{E}(F)$; 若 $A\in\Psi^{-\infty}(E,F)$是适的, 则可直接证明$A\mathscr{D}'(E)\subset\mathscr{E}(F)$.

参考文献: [11], [60], [79].

习 题

1. $H^s_{loc}(M)$与$H^{-s}_c(M)$互为对偶.

2. 设$A\in\Psi^r_{\rho,\delta}(M)$，任给紧集$K\subset M$：$\lim\limits_{|\xi|\to\infty}\sup\limits_{x\in K}|\sigma_r(A)(x,\xi)|\cdot|\xi|^{-r}=0$，则$A: H^s_c(M)\to H^{s-r}_{loc}(M)$是紧算子(10.4.4的推广).

§7 椭 圆 算 子

PsDO理论中最优美且最有应用价值的部分无疑是椭圆算子的理论.

10.7.1 定义 若$A\in\Psi^r_{\rho,\delta}(M)$，对任给紧集$K\subset M$：

$$\lim_{|\xi|\to\infty}\inf_{x\in K}|\sigma_r(A)(x,\xi)||\xi|^{-r}>0 \qquad (1)$$

(关于$|\xi|$参看§1(11))，则说A是椭圆的.

注 1° 从§5(7)看出，可在局部坐标下验证条件(1). 因此可以说，$A\in\Psi^r_{\rho,\delta}(M)$是椭圆的$\Longleftrightarrow$对$M$的每个图$(U,\varphi)$，$A$的转移$A_\varphi$是椭圆的. 若$M=\Omega$，则(1)中的$\sigma_r(A)$显然可代以$\sigma(A)$.

2° 若$\sigma_r(A)(x,\xi)$关于ξ是r次正齐次的，则(1)相当于要求$\sigma_r(A)(x,\xi)\neq0(\xi\neq0)$.

3° 由§3(7)(9)，A是椭圆的$\Rightarrow A^t, A^*$是椭圆的.

"椭圆性"可刻划为一定意义下的"可逆性".

10.7.2 定理 设$A\in\Psi^r_{\rho,\delta}(M)$. 则$A$是椭圆的$\Longleftrightarrow\dot{A}(=A+\Psi^{-\infty}(M))$在代数$\Psi_{\rho,\delta}(M)$中是可逆的，即存在适的$B\in\Psi^{-r}_{\rho,\delta}(M)$：$AB\equiv BA\equiv I$（本节中$\equiv$表示模$\Psi^{-\infty}$等价），称$B$为$A$的拟逆或拟基本解.

证 1° 首先设$M=\Omega$. 不妨设A是适的. 若A是椭圆的，则有$b(x,\xi)\in C^\infty(\Omega\times\mathrm{R}^n)$，对大的$|\xi|$有$b=1/\sigma(A)$. 利用(1)并用类似于10.4.3中证$b_0\in S^0_{\rho,\delta}$的方法可指明$b\in$

$S^{-r}_{\rho,\delta}$. 取适的 $P\in\Psi^{-r}_{\rho,\delta}(\Omega)$：$P=\mathrm{Op}b$. 令 $R=PA-I$，则从 $\sigma_{-r}(P)\sigma_r(A)-1\in S^{\delta-\rho}_{\rho,\delta}$ 推出 $R\in\Psi^{\delta-\rho}_{\rho,\delta}$. 取适的 $Q\in\Psi^0_{\rho,\delta}$，使 $\sigma_Q\sim\sum(-\sigma_R)^j$. 令 $B=QP$，则从

$$BA=Q(I+R)=I-(-R)^m+[Q-\sum_{j<m}(-R)^j](I+R)$$

看出 $BA-I\in\Psi^{m(\delta-\rho)}_{\rho,\delta}$. 因 m 可任意大，故 $BA\equiv I$. 类似地可求出 B_1：$AB_1\equiv I$，于是 $AB\equiv ABAB_1\equiv AB_1\equiv I$.

反之，若 A 有拟逆 $B\in\Psi^{-r}_{\rho,\delta}(\Omega)$，则必定 $\sigma_r(A)\sigma_r(B)\equiv 1(\mathrm{mod}S^{\delta-\rho}_{\rho,\delta})$. 任给紧集 $K\subset\Omega$，当 $|\xi|$ 充分大时对 $x\in K$ 一致地有 $|\sigma_r(A)(x,\xi)\sigma_{-r}(B)(x,\xi)-1|\leqslant 1/2$，因此

$$\frac{1}{2}\leqslant|\sigma_r(A)(x,\xi)\sigma_{-r}(B)(x,\xi)|$$

$$\leqslant\text{const}\,|\sigma_r(A)(x,\xi)|\,(1+|\xi|)^{-r},$$

由此推出(1).

2° 设 $A\in\Psi^r_{\rho,\delta}(M)$ 是适椭圆算子，$\{U_i,\varphi_i,\lambda_i\}$ 如10.5.4（下面将不再声明）. 取 $A|U_j$ 的适拟逆 B_j，令

$$Bu=\sum\lambda_jB_j(u|U_j),\quad u\in\mathscr{D}(M),\qquad(2)$$

则 $B\in\Psi^{-r}_{\rho,\delta}(M)$. 易见 $BA\equiv I$. 另一方面，在 U_i 上

$$AB=\sum_j A\lambda_jB_i+\sum_j A\lambda_j(B_j-B_i)$$

$$=AB_i+\sum_j A\lambda_j(B_j-B_i).$$

因在 $U_i\cap U_j$ 上 $B_i\equiv B_j$，且仅有限个 $\mathrm{supp}\lambda_j$ 与 U_i 相交，故在 U_i 上 $AB\equiv I$，因此 B 是 A 的拟逆.

反之，若 $A\in\Psi^r_{\rho,\delta}(M)$ 有拟逆，则 A 局部地亦有拟逆，于是从已证的 1° 推出 A 是椭圆的. □

从10.7.2特别推出，在 PsDO的框架内可对椭圆微分算子（如 Laplace 算子）施行求逆运算. 这是导入 PsDO 概念的主要理由之一.

10.7.3 定理(Weyl-Schwartz) 设 $A\in\Psi^r_{\rho,\delta}(M)$ 是[适]

椭圆算子，$u\in\mathscr{E}'(M)[u\in\mathscr{D}'(M)]$．则 (i) $\operatorname{sing\,supp}Au=\operatorname{sing\,supp}u$（有此性质的$A$称为亚椭圆的，因此定理指出椭圆性推出亚椭圆性）；(ii)当 $Au\in H^s_{loc}(M)$，$k=\left[r+s-\frac{n}{2}\right]-1\geqslant 0$时$u\in C^k(M)$；特别当$Au\in L^2_{loc}(M)$，$k=\left[r-\frac{n}{2}\right]-1\geqslant 0$时 $u\in C^k(M)$．

证 设$u\in\mathscr{E}'(M)$，B是A的适拟逆，则$(I-BA)u\in C^\infty$（见上节末之说明），于是依 10.5.6 有

$$\operatorname{sing\,supp}u\subset\operatorname{sing\,supp}BAu\subset\operatorname{sing\,supp}Au,$$

这与 10.5.5一起推出(i)．若$Au\in H^s_{loc}(M)$，$k=\left[r+s-\frac{n}{2}\right]-1\geqslant 0$，则由10.6.4，10.6.6有$u=BAu+(I-BA)u\in C^k(M)$．若$A$是适的，以上论证亦适用于$u\in\mathscr{D}'(M)$． □

推论 若 $A\in\Psi^r_{\rho,\delta}(M)$是[适]椭圆算子，$u\in\mathscr{E}'(M)$ [$u\in\mathscr{D}'(M)$]，则 $Au\in C^\infty\Rightarrow u\in C^\infty$，特别$\operatorname{Ker}A\subset C^\infty$．

这就是关于椭圆算子的著名的"正则性定理"，它指明了右端充分光滑的椭圆型方程 $Pu=f$ 即使在广义函数的范围内，也只有光滑的解．另一方面，亦可利用拟逆来解决局部存在性问题．

10.7.4 定理 设P是Ω内的 r 阶椭圆微分算子，$f\in H^{-s}_c(\Omega)$，$s>n/2$．则对任给$x_0\in\Omega$，存在x_0的邻域U，$u\in H^{r-s}_{loc}(U)$，$Pu=f$，因此 $Pu=0$ 局部地有 C^∞ 解．

证 设$Q\in\Psi^{-r}(\Omega)$是P的适拟逆，$R=PQ-I$．则有x_0的邻域 $U\subset\Omega$，$\forall v\in\mathscr{D}(U)$：$\|R^*v\|_s\leqslant\frac{1}{2}\|v\|_s$．否则，必有 $v_k\in\mathscr{D}(B^n(x_0,1/k))$：$\|R^*v_k\|_s>\frac{1}{2}\|v_k\|_s(k=1,2,\cdots)$．令$u_k=$

$v_k/\|v_k\|_s$，取 t：$s>t>n/2$，不妨设在 H^t 中 $u_k\to u_0$(9.7.7)．因 $u_0\in H^t\subset C^0$(9.7.5)，$\operatorname{supp}u_0\subset\{x_0\}$，故必 $u_0=0$，这与 $\lim_k\|R^*u_k\|_s=\|R^*u_0\|_s\geqslant 1/2$ 矛盾．这样，对任给 $v\in\mathscr{D}(U)$ 有

$$\|v\|_s\leqslant\|Q^*P^*v\|_s+\|R^*v\|_s$$

$$\leqslant\text{const}\|P^*v\|_{s-r}+\frac{1}{2}\|v\|_s,$$

于是 $\|v\|_s\leqslant\text{const}\|P^*v\|_{s-r}$．因此存在 $A\in L(H^{s-r},H^s)$，使得 $AP^*|\mathscr{D}(U)=I$，若 Y 是 $P^*\mathscr{D}(U)$ 在 H^{s-r} 中的正交补，则 $A|Y=0$．设 A^*：$H^{-s}\to H^{r-s}$ 是 A 的相伴（注意 H^s 与 H^{-s} 互为对偶，参看 9.7.1)，令 $u=(A^*f)|U$，则 $u\in H^{r-s}_{loc}(U)$，$\forall v\in\mathscr{D}(U)$：

$$\langle Pu,v\rangle=(PA^*f,v)=(f,AP^*v)=\langle f,v\rangle,$$

可见 $Pu=f$．结合 10.7.3 得出定理后一结论． □

亦可以在向量丛上讨论椭圆 PsDO．若 $A\in\Psi^r_{\rho,\delta}(E,F)$，则 $\sigma_r(A)(x,\xi)$ 可看作一"矩阵值"函数，用类似于(1)的式子来刻划椭圆性就有所不便．为简单起见，下面仅考虑一种特殊情况，即 $A\in\Psi^r(E,F)$，$\sigma_r(A)(x,\xi)$ 关于 ξ 是 r 次正齐次的．当 $\sigma_r(A)$：$\pi^*E\to\pi^*F$ 为向量丛同构时，说 A 是椭圆的．若 A 是 r 阶微分算子或 $A\in\Psi^r(M)$，以上规定分别合于 10.1.3 与 10.7.1．设 $A\in\Psi^r(E,F)$ 是椭圆的，$a(x,\xi)=\sigma_r(A)(x,\xi)$，令 $b_0(x,\xi)=(a(x,\xi))^{-1}$，由公式

$$b_ja=-\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant j}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)D_x^\alpha b_{j-|\alpha|}(x,\xi)$$

归纳地决定 b_j $(j=1,2,\cdots)$，则 $b_j(x,\xi)$ 关于 ξ 是 $-r-j$ 次正齐次的．设 $b\sim\sum b_j$，$B=\operatorname{Op}b$，则可验证 $AB=I$．以上程序至少在局部是可施行的，然后依照熟知的方法即可整体地构成 A 的"拟逆"．一旦确立了拟逆存在，推广 10.7.3 就是平凡

的．现将结论概述如下：

10.7.5 定理 设 $A\in\Psi^r(E,F)$ 是[适]椭圆算子．则(i)存在 A 的适拟逆 $B\in\Psi^{-r}(F,E)$，$AB\equiv I$，$BA\equiv I$；(ii)任给 $u\in\mathscr{E}'(E)[u\in\mathscr{D}'(E)]$：$\text{sing supp}\,Au=\text{sing supp}\,u$；(iii) 若 $u\in\mathscr{E}'(E)[u\in\mathscr{D}'(E)]$，$Au\in H^s_{loc}(F)$，$k=\left[r+s-\frac{n}{2}\right]-1\geqslant 0$，则 $u\in\Gamma^k(E)$；(iv) 若 $u\in\mathscr{E}'(E)[u\in\mathscr{D}'(E)]$，$Au\in\Gamma(F)$，则 $u\in\Gamma(E)$；$\text{Ker}\,A\subset\Gamma(E)$．

关于椭圆算子的前述结果只是定性的．另一类条件导致某种定量结果．若 $A\in\Psi^r_{\rho,\delta}(M)$ 满足

$$\lim_{|\xi|\to\infty}\inf_{x\in M}\text{Re}\,\sigma_r(A)(x,\xi)|\xi|^{-r}>0,\tag{3}$$

则称 A 为强椭圆的。显然强椭圆算子是椭圆的，紧流形上的自伴椭圆算子是强椭圆的．

10.7.6 Gårding 不等式 设 $A\in\Psi^r_{\rho,\delta}(\Omega)$ 是强椭圆的，则存在 $\beta>0$，对任给紧集 $K\subset\Omega$，$s\in\mathbf{R}$，存在 $C>0$，使得

$$\text{Re}(Au,u)\geqslant\beta\|u\|^2_{r/2}-C\|u\|^2_s\quad(\forall u\in\mathscr{D}(K)),\tag{4}$$

其中 $\|u\|_s$ 记 H^s 中的范数．

证 设 Λ_s 如10.4.4，令 $B=\Lambda^*_{-r/2}A\Lambda_{-r/2}$，则 $B\in\Psi^0_{\rho,\delta}$，$R=A-\Lambda^*_{r/2}B\Lambda_{r/2}\in\Psi^{-\infty}$．以 2β 记(3)的左边(以 Ω 代 M)，令 $P=\frac{1}{2}(B+B^*)-\beta I$，则 $P=P^*\in\Psi^0_{\rho,\delta}$，$\sigma_0(P)=\text{Re}\,\sigma_0(B)-\beta=(1+|\xi|^2)^{-r/2}\text{Re}\,\sigma_r(A)-\beta$，与(3)对照看出 P 满足10.4.3之条件．于是有适的 $Q\in\Psi^0_{\rho,\delta}(\Omega)$：$B_1=Q^*Q-P\in\Psi^{-\infty}$．取定紧集 $K\subset\Omega$，$u\in\mathscr{D}(K)$，令 $v=\Lambda_{r/2}u$，则

$$\begin{aligned}\text{Re}(Au,u)&=\text{Re}((\Lambda^*_{r/2}B\Lambda_{r/2}+R)u,u)\\&=\text{Re}((Bv,v)+(Ru,u))\\&=\left(\frac{1}{2}(B+B^*)v,v\right)+\text{Re}(Ru,u)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=((\beta I+Q^*Q-R_1)v,v)+\mathrm{Re}(Ru,u)\\
&\geqslant\beta\|v\|_{L^2}^2+\|Qv\|_{L^2}^2-|(R_2u,u)|\\
&\geqslant\beta\|\Lambda_{r/2}u\|_{L^2}^2-|(R_2u,u)|,
\end{aligned}\tag{5}
$$

其中 $R_2=\frac{1}{2}(R+R^*)-\Lambda_{r/2}^*R_1\Lambda_{r/2}\in\Psi^{-\infty}$. 不妨在 9.7.4 的意义下理解 $\Lambda_{r/2}$，从而 $\|\Lambda_{r/2}u\|_{L^2}=\|u\|_{r/2}$（由此引起的误差放入后面的项，只需修改一下 R_2 即可）. 因 u 有紧支集，不妨设 $R_2(x,y)\in\mathscr{D}(\Omega\times\Omega)$，于是（利用 8.5.10）

$$
\begin{aligned}
|(R_2u,u)|^2&=\left|\iint R_2(x,y)\overline{u(x)}u(y)dxdy\right|^2\\
&=\left|\iint \hat{R}_2(\xi,\eta)\overline{\hat{u}(\xi)}\hat{u}(-\eta)d\xi d\eta\right|^2\\
&\leqslant\iint|\hat{R}_2(\xi,\eta)|^2(1+|\xi|^2)^{-s}(1+|\eta|^2)^{-s}d\xi d\eta\\
&\quad\cdot\iint(1+|\xi|^2)^s(1+|\eta|^2)^s|\hat{u}(\xi)\hat{u}(\eta)|^2d\xi d\eta\\
&=C^2\|u\|_s^4,
\end{aligned}\tag{6}
$$

常数 $C>0$ 与 u 无关. 结合(5)(6)得出(4). □

参考文献：[11], [18], [41], [57], [67], [76], [79].

习 题

1. $A\in\Psi_{\rho,\delta}^r(M)$ 是椭圆的 $\Longleftrightarrow$ 存在 M 上的正连续函数 $p(x),q(x)$，使得当 $\xi\geqslant q(x)$ 时 $|\sigma_A(x,\xi)|\geqslant p(x)|\xi|^r$.

2. 若 $A\in\Psi_{\rho,\delta}^r(\Omega)$ 是椭圆的，则当 $|\xi|$ 充分大时有 $(\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\sigma_A)/\sigma_A\in S_{\rho,\delta}^{-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}$.

3. $(\partial_x+i\partial_y)^2\ ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$ 是椭圆的而非强椭圆的.

§8 Fredholm 算子与 Hodge 定理

10.8.1 定义 设 X,Y 为LCS, $A\in L(X,Y)$. 若 $\dim\ker A<\infty$, $\dim\operatorname{coker}A<\infty$, 则称 A 为 Fredholm 算子，称 $\mathrm{Ind}A=$

dimKer$A$ - dimcoker$A$ 为A的指标. 下面分别以 $F(X,Y)$ 与 $K(X,Y)$记从X到Y的 Fredholm 算子与紧算子之全体.

若 $A\in L(X,Y)$可逆, 则显然 $A\in F(X,Y)$且 Ind$A=0$. 在某种意义上 Fredholm 算子接近于可逆算子, 而 Ind$A$ 则量度了A对可逆算子的偏离. 对于 $A\in F(X,Y)$, 令

$$X=X_1\oplus \mathrm{Ker}A,\quad Y=\mathrm{Im}A\oplus Y_1, \tag{1}$$

其中 $X_1\cong X/\mathrm{Ker}A$, $Y_1\cong \mathrm{coker}A$. 据(1)可将A分解为:

$$A: X\xrightarrow{\text{投影}} X_1 \overset{A|X_1}{\cong} \mathrm{Im}A\subset Y. \tag{2}$$

若 $A\in F(X,Y)$, $B\in F(Y,Z)$, $A_1\in F(X_1,Y_1)$, 则不难得出:

$$\mathrm{Ind}(BA)=\mathrm{Ind}B+\mathrm{Ind}A; \tag{3}$$

$$\mathrm{Ind}(A\times A_1)=\mathrm{Ind}A+\mathrm{Ind}A_1; \tag{4}$$

$$\mathrm{Ker}A'\cong \mathrm{coker}A,\quad \mathrm{Ker}A\cong \mathrm{coker}A' \tag{5}$$

(参考 1.8.10, 1.8.11), (5)推出 Ind$A'=-$Ind$A$. 由此推出, 若 $A=A^*\in F(H,H)$, H为Hilbert空间, 则 Ind$A=0$.

10.8.2 定理 若X,Y是F-空间, $A\in F(X,Y)$, 则ImA是Y的闭子空间.

证 依(1)的记号, 定义

$$T: X\oplus Y_1\to Y,\ (x,y)\longmapsto Ax+y,$$

则T是一连续线性满射, 因此为开映射 (1.6.1 之推论 1), 于是Im$A=Y\setminus T((X\oplus Y_1)\setminus X)$是闭的. □

因紧算子是已得到充分研究的算子, 故当$A-B\in K(X,Y)$时, 在一定意义上可以认为A, B能相互替换. 因此如同定义$\Psi_{\rho,\delta}^{\prime}$一样, 引进商 $\dot{L}(X,Y)=L(X,Y)/K(X,Y)$; 当 X 为B-空间时 $\dot{L}(X,X)$ 是一B-代数, 称为 Calkin 代数. 约定: 下面以 $A\equiv B$ 记 $A\equiv B(\mathrm{mod}K(X,Y))$.

10.8.3 定理 设X是 B-空间, $R\in K(X,X)$. 则 $A=$

$I-R\in F(X,X)$；当 $\dim \mathrm{Im}R<\infty$ 时 $\mathrm{Ind}A=0$.

证 由4.8.6，$\dim\mathrm{Ker}A<\infty$；由4.8.5，$\mathrm{Im}A$ 是闭的；由§1.8(6)及 R' 的紧性，$\dim\mathrm{coker}A<\infty$，于是 $A\in F(X,X)$. 因 $A(\mathrm{Im}R)\subset\mathrm{Im}R$，故 A 导出 $\tilde{A}\in L(X/\mathrm{Im}R, X/\mathrm{Im}R)$，使得 $\tilde{A}(x+\mathrm{Im}R)=Ax+\mathrm{Im}R$. $\tilde{A}$ 显然为双射，于是当 $\dim\mathrm{Im}R<\infty$ 时由(4)有

$$\mathrm{Ind}A=\mathrm{Ind}\tilde{A}+\mathrm{Ind}(A|\mathrm{Im}R)=0+0=0. \qquad \square$$

10.8.4 定理 设 X,Y 是 B-空间. (i) 任给 $A\in L(X,Y)$，$A\in F(X,Y)\Longleftrightarrow\exists B\in L(Y,X)$：$AB\cong I$，$BA\cong I$，或说 A 有一拟逆 B；(ii) $F(X,Y)$ 在 $L(X,Y)$ 中是开的；Ind 在 $F(X,Y)$ 上局部为常数；(iii) 若 $A\in F(X,Y)$，B 是 A 的拟逆，$A\cong A_1$，则 $\mathrm{Ind}A_1=\mathrm{Ind}A=-\mathrm{Ind}B$；(iv) 若 $A\in F(X,Y)$，则 $\mathrm{Ind}A=0\Longleftrightarrow\exists R\in K(X,Y)$：$A+R$ 可逆.

证 (i)设 $A\in F(X,Y)$，$\dim Y_1=n$(依(1)). 因 $\mathrm{Ker}A'=(\mathrm{Im}A)^{\perp}\cong Y_1'$ (1.8.11)，故有 $f_i\in\mathrm{Ker}A'$，$y_j\in Y$：$f_i(y_j)=\delta_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant n)$. 令

$$Py=y-\sum_i f_i(y)y_i,\quad y\in Y,$$

则 $P\in L(Y)$，$\mathrm{Im}P\subset\{f_1,\cdots,f_n\}^{\perp}=(\mathrm{Ker}A')^{\perp}=\mathrm{Im}A$(10.8.2, 1.8.10)，$PA=A$. 由(2)及1.6.1推论1，$A|X_1:X_1\to\mathrm{Im}A$ 是拓扑同构. 令 $B=(A|X_1)^{-1}\circ P$，则 $B\in L(Y,X)$，$\mathrm{Im}(BA-I)\subset\mathrm{Ker}A$，$\mathrm{Im}(AB-I)\subset V$，$V$ 是 $\{y_1,\cdots,y_n\}$ 生成的向量空间. 因此 $AB\cong I$，$BA\cong I$.

反之，若 A 有拟逆 B，则 AB 与 BA 皆为 Fredholm 算子(10.8.3)，于是从 $\mathrm{Ker}A\subset\mathrm{Ker}BA$ 及 $\mathrm{Im}A\supset\mathrm{Im}AB$ 推出 $A\in F(X,Y)$.

(ii) 取定 $A\in F(X,Y)$，取 A 的拟逆 R，由(i)之证明，不妨设 $AB-I$ 与 $BA-I$ 为有限秩算子. 设 $R\in L(X,Y)$，

$\|R\|\leqslant\|B\|^{-1}$，令 $B_1=B(I+RB)^{-1}(=(I+BR)^{-1}B)$，则

$$(A+R)B_1=I+(AB-I)(I+RB)^{-1}=I,$$

同理 $B_1(A+R)=I$，可见 $A+R\in F(X,Y)$，且依10.8.3有

$$\operatorname{Ind}(A+R)=-\operatorname{Ind}B_1=-\operatorname{Ind}B=\operatorname{Ind}A.$$

(iii) 设 $A_1=A+R$，$R\in K(X,Y)$，则 $A_1B=AB=I$，$BA_1=BA=I$，可见 $A_1\in F(X,Y)$. 因$A+tR(t\in\mathbf{R})$与A属同一分支，故 $\operatorname{Ind}A=\operatorname{Ind}A_1$. 这又推出 $\operatorname{Ind}A+\operatorname{Ind}B=\operatorname{Ind}AB=\operatorname{Ind}I=0$.

(iv) 若 $\operatorname{Ind}A=0$，则有同构 $R:\operatorname{Ker}A\cong Y_1$（依(1)）. 将$R$扩张到$X$上，使得 $R|X_1=0$，则$R\in K(X,Y)$，$A+R$可逆. 逆命题是显然的. □

现在将以上结果用到椭圆算子. M, E, F 的意义依然如§1，只是限定M为紧无边流形.

10.8.5 定理 设 $A\in\Psi^r(E,F)$ 是一椭圆算子，A_s 记 $A:H^s(E)\to H^{s-r}(F)(s\in\mathbf{R})$. 则(i) A_s 是Fredholm算子，$\operatorname{Ind}A_s$与s无关；若 $A\equiv P(\operatorname{mod}\Psi^t)$，$t<r$，则 $\operatorname{Ind}A=\operatorname{Ind}P$；(ii) 若 $E=F$，$r\geqslant0$，$A=A^*$，A_∞ 记 $A:\Gamma(E)\to L^2(E)$，则有正交分解

$$\Gamma(E)=\operatorname{Im}A_\infty\oplus\operatorname{Ker}A_\infty, \tag{6}$$

其中 $\operatorname{Ker}A_\infty$ 是有限维的.

证 (i) 取 A 的拟基本解 B，则 $AB-I:H^{s-r}(F)\to H^{s-r}(F)$与 $BA-I:H^s(E)\to H^s(E)$ 是紧算子(10.6.5)，于是 A_s 是Fredholm算子. 由10.6.5，$A-P:H^s(E)\to H^{s-r}(F)$是紧算子，因此 $\operatorname{Ind}A_s=\operatorname{Ind}P_s$(10.8.4). 任给 $t\in R$，

$$Q:H^t(E)\overset{A_{t-s}}{\cong}H^s(E)\xrightarrow{A_s}H^{s-r}(F)\overset{A_{s-t}}{\cong}H^{t-r}(F)$$

与A模Ψ^{r-1}等价，由已证结论得 $\operatorname{Ind}A_t=\operatorname{Ind}Q_t=\operatorname{Ind}A_s$.

(ii) $A_r:H^r(E)\to L^2(E)$是Fredholm算子，故$\operatorname{Im}A_r$在$L^2(E)$中是闭的，$\dim\operatorname{Ker}A_r<\infty$，$\operatorname{Ker}A_r=\operatorname{Ker}A_\infty$(10.7.5)；

将 A_r 看作从 $L^2(E)$的稠密子空间$H^r(E)$到 $L^2(E)$的算子时，有 $A_r^*=A_r$，因此$(\mathrm{Im}A_r)^\perp=\mathrm{Ker}A_r^*=\mathrm{Ker}A_\infty$. 于是依1.10.2有

$$L^2(E)=\mathrm{Im}A_r\oplus\mathrm{Ker}A_\infty. \tag{7}$$

再由 10.7.5，$\Gamma(E)\cap\mathrm{Im}A_r\subset\mathrm{Im}A_\infty$，于是从(7)推出(6). □

如同 §9.9 中一样，以$\mathscr{E}_p(M)$ 记M上的“复 p- 形式”之全体. $\mathscr{E}_p(M)$上有一个由 Riemann 度量 g 诱导的内积：

$$(u,v)=\int u\wedge *v \tag{8}$$

（参看 §1 及 §6.6）. 当 d，δ，Δ 限制在$\mathscr{E}_p(M)$上时分别记作$d_p,\delta_p,\Delta_p(0\leqslant p\leqslant n)$. 下面沿用第六章的记号.

10.8.6 定理 $\Delta_p(0\leqslant p\leqslant n)$是自伴的 2 阶椭圆微分算子；$\mathrm{Ker}\Delta_p=\mathrm{Ker}d_p\cap\mathrm{Ker}\delta_p$.

证 由 §6.6(17)，在局部坐标下 Δ 可表成：

$$(\Delta\omega)_I=-\nabla^j\nabla_j\omega_I+\cdots=-g^{ij}\partial_i\partial_j\omega_I+\cdots,$$

其中 $I=\{i_1,\cdots,i_p\}$，省略的项不含 ω_I 的 2 阶偏导数. 由此可见 Δ_p 是 2 阶微分算子，其主象征可表为 $-g^{ij}\xi_i\xi_j e$，其中 $\xi\in T'M$，$e=\mathrm{id}$，这就得出 Δ_p 的椭圆性.

任给 $\omega\in\mathscr{E}_p(M)$，$\sigma\in\mathscr{E}_{p+1}(M)$，由 §6.6(9)(11)得出：

$$\begin{aligned}d(\omega\wedge *\sigma)&=d\omega\wedge *\sigma+(-1)^p\omega\wedge d*\sigma\\&=d\omega\wedge *\sigma-\omega\wedge *\delta\sigma,\end{aligned}$$

故

$$(d\omega,\sigma)-(\omega,\delta\sigma)=\int d(\omega\wedge *\sigma)=0,$$

可见 $d_p^*=\delta_{p+1}$，由此推出 $\Delta_p^*=\Delta_p$. 显然 $\mathrm{Ker}d_p\cap\mathrm{Ker}\delta_p\subset\mathrm{Ker}\Delta_p$. 另一方面，从$(\Delta\omega,\omega)=\|d\omega\|^2+\|\delta\omega\|^2(\omega\in\mathscr{E}_p(M)$，$\|d\omega\|^2=(d\omega,d\omega))$推出 $\mathrm{Ker}\Delta_p\subset\mathrm{Ker}d_p\cap\mathrm{Ker}\delta_p$. □

在(7)中令 $A_\infty=\Delta_p$ 得到$\mathscr{E}_p(M)=\mathrm{Im}\Delta_p\oplus\mathrm{Ker}\Delta_p$，将此分解式限制到 $A^p(M)$上，即得到著名的

10.8.7 Hodge 定理 $A^p(M)$有如下正交分解：

$$\begin{aligned}A^p(M) &= \Delta A^p(M) \oplus \mathscr{H}^p \\ &= dA^{p-1}(M) \oplus \delta A^{p+1}(M) \oplus \mathscr{H}^p,\end{aligned} \tag{9}$$

其中$\mathscr{H}^p = A^p(M) \cap \mathrm{Ker}\Delta_p$（或写作$\mathscr{H}^p(M)$），$\dim\mathscr{H}^p < \infty$.

可以说每个$\omega \in \mathscr{H}^p$是"Laplace 方程$\Delta u = 0$的解"，因而称为**调和形式**．Hodge 定理有一些重要的拓扑推论．

10.8.8 定理 $H^p(M) \cong \mathscr{H}^p(M)$，$\dim H^p(M) < \infty (0 \leqslant p \leqslant n)$.

证 若$\omega = d\alpha + \delta\beta + \gamma \in Z^p(M)$，$\gamma \in \mathscr{H}^p$，则从$d\omega = d\delta\beta = 0$推出$\|\delta\beta\|^2 = (d\delta\beta, \beta) = 0$，因此$\gamma \in [\omega]$．若另有$\sigma \in [\omega] \cap \mathscr{H}^p$，则$\gamma - \sigma = d\varphi$，$\|\gamma - \sigma\|^2 = (\varphi, \delta(\gamma - \sigma)) = 0$，从而$\gamma = \sigma$．由此可见，$\mathscr{H}^p \to H^p(M)$，$\gamma \mapsto [\gamma]$是一线性同构． □

10.8.9 Poincaré 对偶定理 $H^{n-p}(M) \cong (H^p(M))^* (0 \leqslant p \leqslant n)$.

证 只需证$\mathscr{H}^{n-p} \cong (\mathscr{H}^p)^*$．任给$\sigma \in \mathscr{H}^{n-p}$，令$\tilde{\sigma}(\omega) = \int \omega \wedge \sigma (\omega \in \mathscr{H}^p)$，则$\tilde{\sigma} \in (\mathscr{H}^p)^*$．当$\sigma \neq 0$时$\tilde{\sigma}(*\sigma) = \|\sigma\|^2 > 0$，可见$\sigma \longmapsto \tilde{\sigma}$为线性单射，因此$\dim\mathscr{H}^{n-p} \leqslant \dim\mathscr{H}^p$．同理$\dim\mathscr{H}^p \leqslant \dim\mathscr{H}^{n-p}$，故必$\mathscr{H}^{n-p} \cong (\mathscr{H}^p)^*$，$\sigma \longmapsto \tilde{\sigma}$． □

推论 若M连通，则$H^n(M) \cong \mathrm{R}$.

注 结合 6.9.6 与 10.8.9 得出：若M是n维定向紧无边流形，则必$H^p(M) \cong H_{n-p}(M) (0 \leqslant p \leqslant n)$，$H_p(M)$记$M$的实系数奇异同调群(6.9.5).

设R^i_{jkl}如§6.5(12)．称$R_{ij} = R^k_{ikj}$为 **Ricci 张量**，可证明它是对称的([12])．R_{ij}可提供某些拓扑信息．

10.8.10 定理 若(R_{ij})是正定的，则$H^1(M) = \{0\}$.

证 任取$\omega \in \mathscr{H}^1$，今证$\omega = 0$．利用§6.6(15)(16)，从$d\omega = 0$，$\delta\omega = 0$推出$\nabla_i\omega_j = \nabla_j\omega_i$，$\nabla^i\omega_i = \nabla_i\omega^i = 0$．令$\theta_i = \omega_j\nabla^j\omega_i$，则

$$0=(d1,\theta)=(1,\delta\theta)=\int\delta\theta d\mu$$

$$=\int\nabla^i(\omega_j\nabla^j\omega_i)d\mu=\int\nabla_i(\omega^j\nabla_j\omega^i)d\mu$$

$$=\int[\omega^j\nabla_i\nabla_j\omega^i+(\nabla_i\omega^j)(\nabla_j\omega^i)-\omega^j\nabla_j\nabla_i\omega^i]d\mu$$

$$\geqslant\int\omega^j(\nabla_i\nabla_j-\nabla_j\nabla_i)\omega^i d\mu$$

$$=\int R_{ij}\omega^i\omega^j d\mu\geqslant 0,$$

（$d\mu$ 是 g-体积元），因此 $\omega=0$. □

注　若 $n\geqslant 2$，M有正常数"Gauss 曲率" K(参看[12])，则可证明 $R_{ij}=(n-1)Kg_{ij}$，因而 10.8.10 之结论成立.

参考文献：[2]，[7]，[11]，[12]，[16]，[41]，[60]，[61]，[67]，[79]，[83].

习　题

设 $A\in\Psi^r(E,E)$ 有主象征 $a(x,\xi)I$，I 记 E_x 上的单位映射. 若 $a(x,\xi)$ 关于 ξ 是 r 次齐次的且无处为零的实函数，则 $\mathrm{Ind}A=0$.

§9　微局部分析

如在 §9.5 中看到的，$u(x)\in\mathscr{E}'(\Omega)$的正则性与 $\hat{u}(\xi)$的增长有密切联系. 不难设想，对于 $u(x)$的正则性（或奇性）的全面了解有赖于在(x,ξ)空间(即 $T^*\Omega$)的各个局部进行分析. 一般地，对一个与余切丛 T^*M 有关的对象（如M上的分布与 PsDO)，可同时将 $x,\xi((x,\xi)\in T^*M)$限制在局部考虑，这样的研究方法称作**微局部分析**，它对分布与 PsDO 两者（它们彼此密切相关）都引出了精细的结果.

记号　$\pi:T^*M\to M$ 记投影. 称$\Gamma\subset T^*M$为**锥集**，若 $(x,\xi)\in\Gamma\Rightarrow\forall t>0$，$(x,t\xi)\in\Gamma$. 若$\Gamma\subset T^*\Omega$是一开锥集，$a(x,$

$\xi)\in C^\infty(\Gamma)$，当 $x\in K\subset\pi\Gamma$，$(x,\xi)\in\Gamma$ 时 §2(3)满足，则写作 $a\in S^r_{\rho,\delta}(\Gamma)$；$S^{-\infty}(\Gamma)$ 等记号意义自明．任给 $\xi\in R^n\setminus 0$，$\varepsilon>0$，称 $\Gamma(\xi,\varepsilon)=\left\{\eta\in \mathrm{R}^n\setminus 0\,\middle|\,\left|\frac{\eta}{|\eta|}-\frac{\xi}{|\xi|}\right|<\varepsilon\right\}$ 为 ξ 的ε-锥邻域．

10.9.1 定义 设 $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$，$A\in\Psi^r_{\rho,\delta}(\Omega)$．规定 u 的波前集 $\mathrm{WF}(u)$[A 的微支集 $\mu\mathrm{supp}A$]是 $T'\Omega$ 除掉如下的点 (x_0,ξ_0) 后的余集：存在 $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$，$\varepsilon>0$，$\varphi$ 在 x_0 邻近等于 1，$(\varphi u)^\wedge$ 在 $\Gamma(\xi_0,\varepsilon)$ 内速降，即 $\forall k>0$：$|(\varphi u)^\wedge(\xi)|\leqslant \mathrm{const}(1+|\xi|)^{-k}$，$\xi\in\Gamma(\xi_0,\varepsilon)$ $[\varphi(x)\sigma_A(x,\xi)\in S^{-\infty}(\Omega\times\Gamma(\xi_0,\varepsilon))]$．若 $\Gamma\subset T'\Omega\setminus\mathrm{WF}(u)$ $[\Gamma\subset T'\Omega\setminus\mu\mathrm{supp}A]$，则说 $u[A]$ 在 Γ 内是正则的．

直接看出 $\mathrm{WF}(u)$ 与 $\mu\mathrm{supp}A$ 是闭锥集，因而它们在 $T'\Omega$ 中的补是开锥集．任给锥集 $\Gamma\subset T'\Omega$，每点 $(x,\xi)\in\Gamma$ 总可用点 $(x,\xi/|\xi|)$ 来代表；因此可以认为 $\mathrm{WF}(u)$ 与 $\mu\mathrm{supp}A$ 属于 Ω 的余球面丛（参照 10.1.3）．

在某种意义上，波前集与微支集可相互刻划．

10.9.2 定理 设 $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$，$(x_0,\xi_0)\in T'\Omega$．则以下条件互相等价：(i) $(x_0,\xi_0)\overline{\in}\mathrm{WF}(u)$；(ii) 存在适的 $A\in\Psi^0(\Omega)$：$Au\in\mathscr{D}(\Omega)$，在 (x_0,ξ_0) 的某锥邻域 Γ 中 $\sigma_A=1(\mathrm{mod}S^{-\infty})$；(iii) 存在 (x_0,ξ_0) 的锥邻域 Γ，对任何 $B\in\Psi^0(\Omega)$，当 $\mu\mathrm{supp}B\subset\Gamma$ 时 $Bu\in C^\infty$．

证 (i)⇒(ii)．设 φ，ε 如 10.9.1．取 $\theta\in C^\infty(S^{n-1})$：$\theta$ 在 ξ_0（不妨设 $|\xi_0|=1$）邻近为 1，$\mathrm{supp}\theta$ 含于 ξ_0 的 ε-邻域；取 $\tau_1\in C^\infty(\mathrm{R}^n)$：$B^n(0,1/4)\prec 1-\tau_1\prec B^n(0,1/2)$；令 $\tau(\xi)=\tau_1(\xi)\theta(\xi/|\xi|)$．取 $\psi\in\mathscr{D}(\Omega)$：$\psi$ 在 x_0 邻近为 1，$\mathrm{supp}\psi\Subset\varphi^{-1}(1)$．令 $a=\psi(x)\varphi(y)\tau(\xi)$，$A=\mathrm{Op}a$，则 $A\in\Psi^0(\Omega)$ 是适的．从(§3(5))

$$\sigma_A(x,\xi)\sim\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\psi(x)D^\alpha\varphi(x)\partial^\alpha\tau(\xi)$$

看出，在(x_0,ξ_0)的某锥邻域Γ中$\sigma_A=1(\mathrm{mod}S^{-\infty})$；而

$$(Au)(x)=\psi(x)\iint\tau(\xi)\varphi(y)u(y)e^{i(x-y)\cdot\xi}dyd\xi$$

$$=\psi(x)\int_{\Gamma(\xi_0,\varepsilon)}\tau(\xi)(\varphi u)^\wedge(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi\in\mathscr{D}(\Omega).$$

(ii)⇒(iii). 设A，Γ如(ii)，$\mu\mathrm{supp}B\subset\Gamma$，则从分解$Bu=BAu+B(I-A)u$及对$B$，$A$的假定推出$Bu\in C^\infty$.

(iii)⇒(i). 假定(iii). 类似于证明第一段作$\tau(\xi)\in C^\infty(\mathrm{R}^n)$：$\pi\Gamma\times\mathrm{supp}\tau\subset\Gamma$，$\tau$在$\xi_0$邻近为$I$，$|\xi|>1/2$时$\tau$对$\xi$是0次齐次的. 任取$\varphi,\psi\in\mathscr{D}(\pi\Gamma)$，使$\varphi$在$x_0$邻近为1. 令$B=\mathrm{Op}\tau(\xi)$，则$\mu\mathrm{supp}(\psi B\varphi)\subset\Gamma$，从而$\psi B\varphi u\in C^\infty$. 由$\psi$之任意性，必$B\varphi u\in C^\infty$. 今证对任给$\alpha\in\mathrm{N}^n$及充分大的$k$，有$|x|^{2k}\partial^\alpha B\varphi u\in L^\infty$（这将推出$(B\varphi u)^\wedge=\tau(\varphi u)^\wedge\in\mathscr{S}$，从而$(\varphi u)^\wedge$在$\xi_0$的某锥邻域内速降）. 将$\partial^\alpha$并入$B$，且利用9.3.1，不妨设$v=\varphi u\in C_c(\mathrm{R}^n)$，$B=\mathrm{Op}b(\xi)\in\Psi^r(\Omega)$. 当$k>0$，$|x|$充分大时由分部积分有

$$|(Bv)(x)|=\left|\iint b(\xi)v(y)e^{i(x-y)\cdot\xi}dyd\xi\right|$$

$$=\left|\iint\Delta_\xi^k b(\xi)v(y)\,|x-y|^{-2k}e^{i(x-y)\cdot\xi}dyd\xi\right|$$

$$\leqslant\mathrm{const}\,|x|^{-2k}.$$ □

从10.9.2的证明看出，任给$u\in\mathscr{D}'(\Omega)$，有

$$\mathrm{WF}(u)=\bigcap(T'\Omega\setminus\mu\mathrm{supp}A),\tag{1}$$

其中A取遍所有使$Au\in C^\infty$的$A\in\Psi^0(\Omega)$. 在另一方向有：

10.9.3 定理 任给适的$A\in\Psi^r_{\rho,\delta}(\Omega)$，有

$$\mu\mathrm{supp}A=\overline{\bigcup_{u\in\mathscr{D}'(\Omega)}\mathrm{WF}(Au)}.\tag{2}$$

证 若$(x_0,\xi_0)\overline{\in}\mu\text{supp}A$，则$A$在$(x_0,\xi_0)$的某锥邻域$\Gamma$中是正则的. 设$\psi,B,\varphi$如10.9.2证明之最后一段，$Q=\psi B\varphi$，则$QA\in\Psi^{-\infty}$. 任给$u\in\mathscr{D}'(\Omega)$，$QAu\in C^\infty$，由10.9.2（$Q$相当于10.9.2中的$A$），$(x_0,\xi_0)\overline{\in}\text{WF}(Au)$.

其次，若(x_0,ξ_0)不属于(2)之右边，则有(x_0,ξ_0)的锥邻域Γ，$\forall u\in\mathscr{D}'(\Omega)$：$Au$在$\Gamma$内正则. 若$B$类似于上面的$Q$，则$BAu\in C^\infty$,即$BA$是一正则算子（例如参看[60]），由此可推出$A$在$(x_0,\xi_0)$的某锥邻域内正则，从而$(x_0,\xi_0)\overline{\in}\mu\text{supp}A$. □

从10.5.2看出，10.9.2之条件(iii)在变量代换下不变. 因此，若$h\in\text{Diff}(\Omega,\Omega')$，$u\in\mathscr{D}'(\Omega)$，则

$$\text{WF}(h_*u)=h_*\text{WF}(u), \tag{3}$$

右边的h_*记h导出的余切丛同构$h_*: T^*\Omega\cong T^*\Omega'$. (3)与(2)结合又得到：对任何适的$A\in\Psi^r_{\rho,\delta}(\Omega)$有

$$\mu\text{supp}A_h=h_*\mu\text{supp}A. \tag{4}$$

基于(3)(4)，可将WF(u)与$\mu\text{supp}A$推广到流形上.

10.9.4 定义 设$u\in\mathscr{D}'(M)$，$A\in\Psi^r_{\rho,\delta}(M)$是适的. 则规定$u$的波前集WF$(u)$[$A$的微支集$\mu\text{supp}A$]为如下的$(x,\xi)\in T^*M$之全体：任给含$x$的图$(U,\varphi)$，有$\varphi_*\xi\in\text{WF}(\varphi_*u)$ [$\varphi_*\xi\in\mu\text{supp}A_\varphi$].

已证的10.9.2与10.9.3在流形上有适当的推广.

WF(u)自然包含了由singsupp$u$提供的全部信息.

10.9.5 定理 $\pi\text{WF}(u)=\text{singsupp}u\,(u\in\mathscr{D}'(M))$.

证 只需就$M=\Omega$的情况证明. 若$x_0\in\Omega\setminus\text{singsupp}u$，则有$\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$：$\varphi$在$x_0$邻近为1，$\varphi u\in\mathscr{D}(\Omega)$，于是$(\varphi u)^\wedge\in\mathscr{S}$，从而$x_0\overline{\in}\pi\text{WF}(u)$. 反之，若$x_0\in\Omega\setminus\pi\text{WF}(u)$，则从10.9.2的证明看出（利用$S^{n-1}$的紧性），存在有限个类似于10.9.2(i)中的$A$的$A_j\in\Psi^0(\Omega)$，$A_ju\in C^\infty$，在$x_0$的某邻域$V$内$\sum A_j=I(\text{mod}\Psi^{-\infty})$. 于是

$$u|V=(\sum_j A_j u)|V+(I-\sum_j A_j)u|V\in C^\infty,$$
可见 $x_0\overline{\in}\operatorname{singsupp}u$. □

10.9.6 定理 设 $u\in\mathscr{D}'(M)$, $A\in\Psi^r_{\rho,\delta}(M)$是适的，则

$$\mathrm{WF}(Au)\subset\mathrm{WF}(u)\cap\mu\operatorname{supp}A. \tag{5}$$

证 (2)(它亦适用于流形)推出 $\mathrm{WF}(Au)\subset\mu\operatorname{supp}A$. 设 $(x,\xi)\overline{\in}\mathrm{WF}(u)$，取$(x,\xi)$的锥邻域 Γ,Γ'; $\Gamma'\Subset\Gamma$; 利用10.9.2的证法可将A分解为 $A=B+R$，使得 $\mu\operatorname{supp}B\subset\Gamma'$，而$R$在$\Gamma$内是正则的. 由10.9.2, $Bu\in C^\infty$; 而 $\mathrm{WF}(Ru)\subset\mu\operatorname{supp}R$ 推出$(x,\xi)\overline{\in}\mathrm{WF}(Ru)$. 因此$(x,\xi)\overline{\in}\mathrm{WF}(Au)$. □

现在考虑椭圆性概念的微局部化.

10.9.7 定义 设 $A\in\Psi^r_{\rho,\delta}(M)$, $\Gamma\subset T'M$是一开锥集. 若对任何紧集$K\subset\pi\Gamma$, §7(1)限制在$(x,\xi)\in\Gamma$时成立，则说A在Γ内是椭圆的.

将§7中使用的那种构造程序限制在开锥集内施行，并运用10.9.2的证法加以修正，即得到10.7.2的以下推广(证明细节参考[60])：

10.9.8 定理 设 $A\in\Psi^r_{\rho,\delta}(M)$, $\Gamma\subset T'M$是一开锥集. 则A在Γ内是椭圆的$\Longleftrightarrow$任给开锥集 $\Gamma'\Subset\Gamma$, $\pi\Gamma'$紧，存在$B\in\Psi^{-r}_{\rho,\delta}(M)$; $AB-I$与$BA-I$在Γ'内是正则的.

以下结果可看作是10.7.3的微局部形式.

10.9.9 定理 设适 PsDO$A\in\Psi^r_{\rho,\delta}(M)$在开锥集$\Gamma\subset T'M$内是椭圆的，$u\in\mathscr{D}'(M)$. 则$\mathrm{WF}(Au)\cap\Gamma=\mathrm{WF}(u)\cap\Gamma$.

证 只要证 $\mathrm{WF}(u)\cap\Gamma\subset\mathrm{WF}(Au)\cap\Gamma$. 设$\Gamma',B$如10.9.8，则

$$\mathrm{WF}(u)\cap\Gamma'=\mathrm{WF}(BAu)\cap\Gamma'\subset\mathrm{WF}(Au)\cap\Gamma'.$$

所要结论由Γ'的任意性推出. □

设 $A\in\Psi^r_{\rho,\delta}(M)$, $\sigma_r(A)(x,\xi)$对ξ是r次齐次的，令$\operatorname{Char}A=\{(x,\xi)\in T'M|\sigma_r(A)(x,\xi)=0\}$ (A的特征集)，则

A 在开锥集 $\Gamma=T'M\setminus\mathrm{Char}A$ 内是椭圆的．于是10.9.9推出：若 $u\in\mathscr{D}'(M)$, $Au\in C^\infty$，则 $\mathrm{WF}(u)\subset\mathrm{Char}A$．这就为线性偏微分方程 $Pu=f(f\in C^\infty)$ 的解 u 的奇性提供了精确的信息：u 的"间断"集中在特征集 $\mathrm{Char}P$ 上．这与通常数学物理方程（如波动方程）的熟知经典结果是一致的．

参考文献：[18]，[28]，[41]，[60]，[79]．

参 考 文 献

[1] Abraham, R., *Transversality in manifolds of mappings*, Bull. Amer. Math. Soc., 69(1963), 470-474.

[2] Abraham, R., Marsden, J.E., Ratiu, T., *Manifolds, tensor analysis and applications*, Addison-Wesley, 1983.

[3] Adams, J.F., *Vector fields on spheres*, Ann. Math. 75 (1962), 603-632.

[4] Adams, R. A., *Sobolev spaces*, Acad. Press. N. Y., 1975 (有中译本).

[5] Agoston, M.K., *Algebraic topology*, Marcel. Dekker, 1976.

[6] Arnold, V.I., *Ordinary differential equations*, MIT. Press, 1973 (有中译本).

[7] Atiyah, M. F., Singer, I. M., *The index of elliptic operators on compact manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc., 69(1963), 422-433.

[8] Aubin, T., *Nonlinear analysis on manifolds, Monge-Ampère equations*, Springer-Verlag, N.Y., 1982.

[9] Bachman, G., *Elements of abstract harmonic analysis*, Acad. Press, N.Y., 1964.

[10] Beals, R., *A general calculus of pseudo-differential operators*, Duke. Math. J., 42(1975), 1—42.

[11] Boos, B., Bleecker, D. D., *Topology and analysis*, Springer-Verlag, N.Y., 1985.

[12] Boothby, W. M., *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, Acad. Press, N.Y., 1975.

[13] Bott, R. Tu, L. W., *Differential forms in algebraic topology*, Springer-Verlag, N.Y., 1982.

[14] Butzer, P.L., Nessel, R.J., *Fourier analysis and approximation*, Vol. 1, Birkhäuser, 1971 (有中译本).

[15] Calderón, A.P., *Singular integrals*, Bull. Amer. Math. Soc.,72(1966), 427-465.

[16] Cantor, M., *Elliptic operators and the decomposition of tensor fields*, Bull. Amer. Math. Soc.,5(1981), 235-262.

[17] Caleson, L., *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*, Acta. Math., 116 (1966), 135—157.

[18] Chen Qingyi (陈庆益), 流形, 分布与拟微分算子, 华中工学院出版社, 1985.

[19] Chen Wen yuan (陈文嫄), 非线性泛函分析, 甘肃人民出版社, 1982.

[20] Choquet-Bruhat, Y., Dewitt-Morette, C., Dillard-Bleick, M., *Analysis, manifolds and physics*, North-Holland, Amsterdam, 1977.

[21] Cohn, D.L., *Measure theory*, Birkhäuser, 1980.

[22] Dieudonné, J., *Treatise on analysis*, Vols 1-6, Acad. Press, N.Y., (1969—1978).

[23] Edwards, R.E., *Fouries series, A modern introduction*, Vols. 1, 2, 2ed, Springer-Verlag, N. Y., 1979, 1982.

[24] Ehrenpreis, L., *Solution of some problems of division*, Amer. J. Math., 76(1954), 883—903.

[25] Fang Jialin (方嘉琳), 点集拓扑学, 辽宁人民出版社, 1983.

[26] Feldman, M. B., *A proof of Lusin's theorem*, Amer. Math. Monthly, 88(1981), 191—192.

[27] Folland, G.B., Real *analysis, modern techniques and their applications*, John Wiley and Sons, N.Y., 1984.

[28] Gabor, A. *Some remarks on the wave front of a distribution*, Trans. Amer. Math. Soc., 170(1972), 239—244.

[29] Gelfand, I., *Abstrokte Funktionen und Linesne Operatoren*, Rec. Math., N.S. , 4(1938), 235—284.

[30] Гельфанд, И.М., Шилов, Г.Е., Обобщенных функций, Том. 1—5, Физматгиз, Москва (1958—) (有中译本卷1—4) .

[31] Gilmore, R., *Lie groups, Lie algebra and some of their applications*, John Wiley, 1974.

[32] Gleason, A.M., *Groups without small subgroups*, Ann. Math., 56(1952), 193—212.

[33] Globevnik, J., *A note on normal-operator-valued analytic functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 37(1973), 619—621.

[34] Guillemin, V., Pollack, A., *Differential topology*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1974.

[35] Hamilton, R., *The inverse function theorem of Nash and Moser*, Bull. Amer. Math. Soc., 7(1982), 65—222.

[36] Hartig, D.G.,*The Riesz representation theorem revisited*, Amer. Math. Monthly, 90(1983), 277—280.

[37] Hartman, Ph., *Ordinary differential equations*, 2ed, Birkhäuser, Boston, 1982.

[38] Hewitt, E., Ross, K. A., *Abstract harmonic analysis*, Vols. 1, 2, Springer-Verlag, Berlin, 1963, 1970.

[39] Hille, E., Phillips, R. S., *Functional analysis and semigroups*, Waverly Press, 1957.

[40] Hirsch, M.W., *Differential topology*, Springer-Verlag, N.Y., 1976.

[41] Hörmander, L., *The analysis of Linear partial differential operators*, Vols. 1-4,Springer-Verlag, 1983-1985.

[42] Hu Chuangan (胡传淦) , 向量值分析及其应用, 南开大学出版社, 1985.

[43] Hu Shigeng (胡适耕) , 关于多值线性算子的某些结果, 华中工学院学报, 1986, No4, 429—433.

[44] Husemoller,D, *Fibre bundles*,2ed, Springer-Verlag,1975.

[45] Kahn, D.W., *Introduction to global analysis*, Acad. Press., N.Y., 1980.

[46] Kanwal, R, P., *Generalized functions, theory and technique*, Acad. Press., N.Y., 1983.

[47] Karp, L., *On Stokes' theorem for non-compact manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc., 82(1981), 487—490.

[48] Kelley, J., *General topology*, Van Nostrand, N. Y., 1975（有中译本）.

[49] Kohn, J.J., Nirenberg, L., *On the algebra of pseudodifferential operators*, Comm. Pure. Appl. Math., 18(1965), 269—305.

[50] Köthe, G., *Topological vector spaces* I, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[51] Lang, S., *Differential manifolds*, Springer-Verlag, N.Y., 1985.

[52] ———, *Real analysis*, 2ed, Addison-Wesley, 1983.

[53] Loomis, L. H., Sternberg, S., *Advanced calculus*, Addison-Wesley, 1968.

[54] Lu Qikeng（陆启铿），多复变数函数引论，科学出版社，1961.

[55] Moser, J., *On the volume elements on a manifold*, Trans. Amer. Math. Soc., 120(1965), 286—294.

[56] Narasimhan, R., *Several complex variables*, Chicago Univ. Press., 1971（有中译本）.

[57] ———, *Analysis on real and complex manifolds*, North-Holland, 2ed, 1973（有中译本）.

[58] Oaklander, E.T., *L_{pq} interpolatons and the theorem of Marcinkiewicz*, Bull. Amer. Math. Soc., 72(1966), 49-53.

[59] O'Neil, R., *Convolution operators and $L(p,q)$ spaces*, Duke. Math. J., 30(1963), 129—142.

[60] Qi Minyou（齐民友），线性偏微分算子引论，上册，科学出版社，1986.

[61] Rham, G. de., *Differentiable manifolds*, Springer-

Verlag, 1984.

[62] Robbin, J., *On the existence theorem for differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc., 19(1968), 1005—1006.

[63] Rosenblum, M., *On a theorem of Fuglede and Putnam*, J. London. Math. Soc., 33(1958), 376—377.

[64] Rudin, W., *Functional analysis*, McGraw-Hill, N.Y., 1973.

[65] ————, *Real and complex analysis*, 2ed, McGraw-Hill, N.Y., 1974.

[66] Sard, A., *The measure of the critical points of differentiable maps*, Bull. Amer. Math. Soc., 48(1942), 883—890.

[67] Seeley, R.T., *Integro-differential operators on vector bundles*, Trans. Amer. Math. Soc., 117(1965), 167—204.

[68] Shapiro, V., *Fourier series in several variables*, Bull. Amer. Math. Soc., 70(1964), 48—93.

[69] Smale, S., *Differential dynamical systems*, Bull. Amer. Math. Soc., 73(1967), 747—817.

[70] ————, *An infinite dimensional version of Sard's theorem*, Amer. J. Math., 87(1965), 861—866.

[71] Stanton, P.J., *On mean convergence of Fourier series on compact Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc., 218(1976), 61—87.

[72] Stein, E. M., *Interpolation of Linear operators*, Trans. Amer. Math. Soc., 87(1956), 159—172.

[73] ————, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton, 1979.

[74] Stein, E.M., Wainger, S., *Problems in harmonic analysis related to curvature*, Bull. Amer. Math. Soc., 84(1978), 1239—1295.

[75] Stein, E.M., Weiss, G., *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton, 1971 (有中译本).

[76] Taylor, M., *Pseudodifferential operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[77] ______, *Fourier series on compact Lie groups*, Proc, Amer. Math. Soc., 19(1968), 1103—1105.

[78] Treves, F., *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Acad. Press. N.Y., 1967.

[79] ______, *Introduction to pseudo-differential and Fourier integral operators*, I, II, Plenum Press., N.Y., 1980.

[80] Tromba, A.J., *The Morse lemma on arbitrary Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc.,79(1973), 85—86.

[81] Tuan, V. T., Ang, D. D., *A representation theorem for differentiable functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 75(1979), 343—350.

[82] Wang Yufeng,Hu Shigeng (王玉丰，胡适耕)，现代数学基础初析，华中工学院出版社，1986.

[83] Warner, F.W., *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[84] Xu Senlin (徐森林)，流形与Stokes定理，科学出版社，1982.

[85] Yosida, K. (吉田耕作)，*Functional analysis*,Springer-Verlag, 1978 (有中译本).

[86] Zheng Xue-an (郑学安)，紧*Lie*群上的Fourier分析，数学进展，13(1984)，103—118.

名 词 索 引

名词后的数字指出该名词最初出现的页数；当标出几个页数时，表明该名词在几个不同的意义上使用.

1—3 划

4 划

5 划

常 用 记 号

$\Lambda^p(E)$：E（向量空间或向量丛）的 p 次外幂。

$B(a,r)=\{x|d(a,x)<r\}$；$\bar{B}(a,r)=\{x|d(a,x)\leqslant r\}$。

$B^n(a,r)=\{x\in\mathrm{R}^n||x-a|<r\}$。

C：复数域。

$C^r(X,Y)=\{f:X\to Y|f\text{ 是 }C^r\text{ 函数}\}$；$C^r(X)=C^r(X,\mathrm{C})$。

$C^r(X,n)=C^r(X,\mathrm{C}^n)$，一般地，$\mathscr{F}(X,n)=\mathscr{F}(X,\mathrm{C}^n)$。

C^r_c：有紧支集的 C^r 函数空间。

$\mathrm{coker}A$：A 的余核。

$\chi(A)$：代数 A 的结构空间。

χ_A：集 A 的特征函数。

$D=-i\partial$，$D_j=-i\partial_j$。

$\mathrm{Diff}(M,N)=\{f:M\to N|f\text{ 是微分同胚}\}$，$\mathrm{Diff}(M)=\mathrm{Diff}(M,M)$。

$D(y)/D(x)=\det(\partial y^i/\partial x^j)=\dfrac{D(y^1,\cdots,y^n)}{D(x^1,\cdots,x^n)}$。

$\mathscr{D}^r(\Omega,E)$：带 LF 拓扑的 $C^r_c(\Omega,E)$，$\mathscr{D}=\mathscr{D}^\infty$。

$df_x=df(x)=Df(x)=f'(x)$。

$d(x,A)$：x 到 A 的距离。

$\partial^\alpha=\partial^\alpha_x=\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$，$\partial_j=\dfrac{\partial}{\partial x_j}$。

$\partial(y)/\partial(x)=(\partial y^i/\partial x^j)=\dfrac{\partial(y^1,\cdots,y^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}$。

∂A：A 的边界。

Δ：Laplace 算子，对角线。

$\delta^n f(x,h)=\dfrac{d^n}{dt^n}f(x+th)|_{t=0}$。

$\delta^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_p}$：广义 Kronecker 符号，$\delta^i_j=\delta_{ij}$。

$\mathscr{E}^r(\Omega,E)$：带 F-空间结构的$C^r(\Omega,E)$；$\mathscr{E}=\mathscr{E}^\infty$。

f_*：切映射或推前；f^*：拉回。

$\mathrm{GL}(n,\mathrm{K})=\{a\in M_n(\mathrm{K})\mid \det a\neq 0\}$；$\mathrm{GL}(n)=\mathrm{GL}(n,\mathrm{R})$。

$\Gamma^r(E)$：E 上 C^r 截面之全体；$\Gamma(E)=\Gamma^\infty(E)$。

$\Gamma^r(U,E)=\Gamma^r(E|U)$。

$H(\Omega,E)=\{f:\Omega\to E\mid f$ 全纯$\}$；$H(\Omega)=H(\Omega,\mathrm{C})$。

$H^p(M)$：M的 p 阶 de Rham 群。

$H^s(\mathrm{R}^n)$，$H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$：Sobolev 空间。

$\mathrm{Im}\,A$：算子 A的值域。

i：$A\subset X$：包含映射。

i_X：内积算子。

$J(f)$：f 的 Jacobi 行列式。

$\mathrm{Ker}f$：同态 f 的核。

LCH = 局部紧 Hausdorff 空间。

LCS = 局部凸空间。

$\mathrm{Lie}(G)$：Lie 群 G 的 Lie 代数。

$L^p(\Omega,E,\mu)$：从(Ω,μ)到E的 p 次可积函数空间。

L^p_{loc}：局部 L^p 函数空间。

L^p_c：有紧支集的 L^p 函数空间。

$L(X_1,\cdots,X_n;Y)$：从 $X_1\times\cdots\times X_n$ 到 Y 的连续 n 重线性算子空间。

$L^n(X,Y)=L(\overbrace{X,\cdots,X}^{n\text{个}};Y)$；$L^n_s(X,Y)=\{a\in L^n(X,Y)\mid a$ 对称$\}$。

L_X：Lie 导数。

$l^p(\Omega,E)=L^p(\Omega,E,\mu)$，$\mu$是计数测度。

$\Lambda^p(M)=\Gamma(\Lambda^p(T^*M))$；$\Lambda(M)=\bigoplus_p\Lambda^p(M)$。

λ_a：左平移$x\longmapsto ax$。

$M_n(\mathrm{K})=L(\mathrm{K}^n,\mathrm{K}^n)$，$\mathrm{K}=\mathrm{R}$ 或 C。

$M_{mn}=L(\mathrm{C}^n,\mathrm{C}^m)$。

$M(\Omega,E)$：Ω 上的E值(正则)测度空间；$M(\Omega)=M(\Omega,\mathrm{C})$。

M_x：M在 x 的切空间。

$\mathrm{N}=\{0,1,2,\cdots\}$。

$\mathrm{Op}a$：以 a 为振幅的 PsDO。

PsDO＝拟微分算子。

$\Psi^r_{\rho,\delta}(M)$：M 上的 $\Psi^r_{\rho,\delta}$ 类 PsDO 之全体。

$\mathrm{rank}f(x)$：f 在 x 的秩。

ρ_a：右平移 $x\longmapsto xa$。

$S^n=\{x\in\mathrm{R}^{n+1}\mid|x|=1\}$。

$\mathscr{S}(\mathrm{R}^n,E)$：$E$ 值速降函数空间。

$\mathrm{singsupp}f$：f 的奇支集。

$\mathrm{supp}f$：f 的支集。

$\sigma(x)$：x 的谱。

$\sigma_A=\sigma(A)$：A 的象征；$\sigma_r(A)$：A 的主象征。

TM：M 的切丛。

T^*M：M 的余切丛；$T^{\cdot}M=T^*M\setminus 0$。

T^q_pV：V 上 (p,q) 阶张量之全体；$T(V)=\bigoplus\limits_{p,q}T^q_pV$。

$T^q_p(E)$：向量丛 E 上的 (p,q) 阶张量丛。

$T^q_pM=T^q_p(TM)$。

TVS＝拓扑向量空间。

$\mathscr{T}^q_p(M)=\Gamma(T^q_pM)$；$\mathscr{T}(M)=\bigoplus\limits_{p,q}\mathscr{T}^q_p(M)$。

X'：X 的拓扑对偶；X^*：X 的代数对偶。

$X(f)=L_Xf$：f 沿 X 之方向导数。

$\mathscr{X}(M)=\Gamma(TM)$。

Z：整数集。

a^t：a 的转置；a^*：a 的共轭转置。

$\binom{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$，$\alpha,\beta\in\mathrm{N}^n$，$\beta\leq\alpha$。

0：数零，零元，零函数，零空间，等等，具体含义由上下文确定。

0^n：R^n 的零元。

$\cong$：同构，同胚，微分同胚，拓扑同构，等等，具体含义由上下文确定。

$\simeq$：同伦等价。

$\overset{a.e.}{=}$：几乎处处相等；$\overset{a.e.}{\leqslant}$ 仿此。

$\equiv(\mathrm{mod}\cdots)$：模…等价。

$\Subset$：$A\Subset B\Longleftrightarrow A\subset B^\circ$。

$\hookrightarrow$：嵌入。

$\hookrightarrow$：$X\hookrightarrow Y \Longleftrightarrow i: X\subset Y$ 连续且 $\overline{i(x)}=Y$。

$\prec$：$A\prec f[f\prec B]\Longleftrightarrow f\in C(X,[0,1]), f|A=1[\operatorname{supp} f\Subset B], A,B\subset X$。

$\overset{X}{\rightrightarrows}$：在$X$上一致收敛。

$\overset{\mu}{\rightarrow}$：依测度$\mu$收敛；$\overset{W}{\rightarrow}$：弱收敛。

$\wedge$：划去，如$a\hat{b}c=ac$。

$\vee$：反射，如$\check{f}(x)=f(-x)$。

$\|\ \|_u$：上确界范数，即$\|f\|_u=\sup\limits_x|f(x)|$。